АРМАГЕДДОН, или МАТЕМАТИЧЕСКАЯ КИТАЙСКАЯ ГРАМОТА

Доктор технических наук В.Ф. ОЧКОВ
(НИУ “МЭИ”)

DOI: 10.7868/S0233361923010068

Но лишь только глаза закрывались, сон улетал опять,
и сознание становилось таким ясным,
что Марков мог в уме решать алгебраические задачи
на уравнения с двумя неизвестными.

Даниил Хармс “Сон дразнит человека”.

В статье обсуждаются особенности решения системы алгебраических уравнений в среде математического пакета *SMath*[1] на примере задачи о полёте астероида к Земле. Предлагается новая – простая и понятная – методика старой классической математической задачи – приведения кривой второго порядка к каноническому виду. Задача рассматривается в ключе новой технологии обучения *STEM*[2].

Краткое содержание голливудского фильма “Армагеддон”[3], если кто забыл или совсем не знает, такое. К нашей планете приближается астероид “размером с Техас”. Если ничего не предпринять, то через 18 дней он столкнётся с Землей и наступит этот самый Армагеддон[4] – конец Света[5]. На астероид посылается экспедиция, которая бурит в нём скважину и закладывает в неё ядерный заряд. Астероид взрывается, а его осколки летят мимо Земли. Армагеддон переносится на более поздний срок.

В СМИ время от времени появляются сообщения о том, что к Земле приближается на опасное расстояние некий объект[6]. Специальные службы наблю-

[1] *SMath Studio – условно бесплатный отечественный математический пакет с графическим интерфейсом для вычисления математических выражений и построения двумерных и трёхмерных графиков.*

[2] *Аббревиатура STEM (Science, Technology, Engineering, Mathematics) расшифровывается как Наука, Технологии, Инженерия, Математика и обозначает практико-ориентированный подход к построению содержания образования и организации учебного процесса.*

[3] *URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/Армагеддон_(фильм,_1998)*

[4] *Др.-греч.* Ἁρμαγεδών *– упоминаемое в “Апокалипсисе” место последней битвы сил добра с силами зла в конце времён. Став крылатым, слово получило значение конца Света.*

[5] *Одна из самых достоверных версий гибели на Земле динозавров – это падения астероида.*

[6] *Эта статья писалась, когда пандемии коронавируса плавно переходила в украинский кризис. Пользователи социальных сетей так комментировали сообщения о приближении к Земле астероидов: “Нам для полного счастья только астероида не хватало!”*

“Энергия: экономика, техника, экология” 1’2023

$$\boldsymbol{R} := 6.370 \quad \boldsymbol{X} := \begin{bmatrix} -101.3458163064 \\ -113.2807845695 \\ -124.8215951776 \\ -136.0411418426 \\ -146.9927769667 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{Y} := \begin{bmatrix} 11.1124503035 \\ 15.3606693302 \\ 19.5559348307 \\ 23.7011590531 \\ 27.7998904386 \end{bmatrix}$$

Рис. 1.
Исходные данные задачи о полёте астероида к Земле.

дения за космическим пространством с помощью радио- и обычных телескопов, наземных и орбитальных, сканируют ближайший космос и определяют траектории полётов астероидов. А какие нужно сделать расчёты, чтобы оценить опасность астероида? Давайте проведём подобный расчёт, где будем опираться на базовые понятия линейной алгебры[7], но внесём в расчёт и что-то новенькое, до предела упростив задачу, сделав её решение понятным для не очень посвящённых в математику.

На рис. 1 показано начало расчетного *SMath*-документа[8] с двумя векторами *X* и *Y*, в которых хранятся декартовы координаты (абсциссы и ординаты) приближающегося к Земле астероида в пять разных моментов времени. Значения даны в тысячах километров. Они условные и не связаны с каким-то конкретным астероидом. Эти данные отображены на декартовом графике (рис. 2), начало координат которого помещено в центр Земли – в центр окружности радиусом 6370 км (переменная *R*). Космическое пространство, конечно, трёхмерное, но мы будем рассматривать нашу задачу на плоскости.

Математический пакет *SMath* может работать с единицами измерения, но мы не будем их использовать в данном расчёте, так как некоторые инструменты пакета (решение уравнений и др.) не вполне приспособлены к работе с размерными величинами.

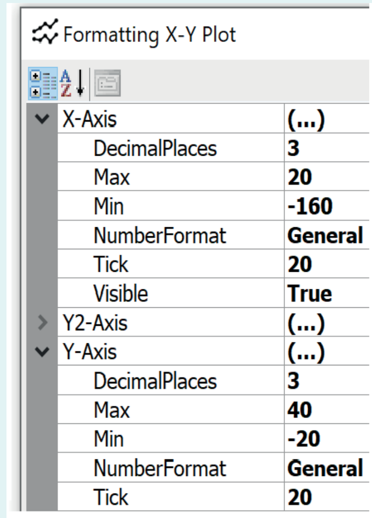
Два небесных тела, как известно из классической небесной механики[9], перемещаются относительно друг друга по траекториям, представляющим собой *эллипс* (окружность в частном случае), *гиперболу* (одну из её ветвей) или (очень редко) *параболу* (переходный случай от эллипса к гиперболе)[10]. Эти “космические” плоские кривые второго порядка называют также и *коническими*: если круглый прямой конус рассечь плоскостью, то геометрическим местом точек, общих и для конуса, и для плоскости, будут эллипс (окружность в частном случае), гипербола или парабола[11]. Кстати, во многих вузах курс линейной алгебры читают параллельно с курсом инженерной графики (начертательной геометрии). В этих учебных курсах пересекаются понятия эллипса, гиперболы и параболы.

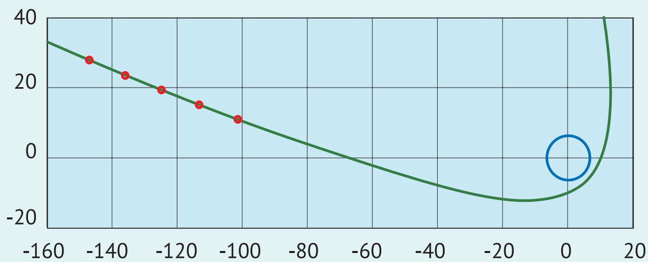
На рис. 2 дано простое и понятное решение задачи о полёте астероида через задание в матричном виде уравнения кривой второго порядка, проходящей через пять точек. Из графика видно, что астероид, слава богу, пролетит мимо Земли. На графике этого рисунка прорисованы, во-первых, окружность, изображающая Землю, во-вторых, пять точек, отмечающих

[7] Ильин В.А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра. М.: Наука, 1984. 304 с.
[8] Пакет можно скачать с сайта www.smath.com.

[9] Дубошин Г.Н. Небесная механика. Основные задачи и методы. М.: Наука, 1968.
[10] Савелов А.А. Плоские кривые. Систематика, свойства, применения (справочное руководство). М.: Физматлит, 1960. URL: http://mexalib.com/view/20726
[11] URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/Коническое_сечение

$$f(x,y) := \left| \begin{bmatrix} x^2 & x \times y & y^2 & x & y & 1 \\ (x_1)^2 & x_1 \times y_1 & (y_1)^2 & X_1 & Y_1 & 1 \\ (x_2)^2 & x_2 \times y_2 & (y_2)^2 & X_2 & Y_2 & 1 \\ (x_3)^2 & x_3 \times y_3 & (y_3)^2 & X_3 & Y_3 & 1 \\ (x_4)^2 & x_4 \times y_4 & (y_4)^2 & X_4 & Y_4 & 1 \\ (x_5)^2 & x_5 \times y_5 & (y_5)^2 & X_5 & Y_5 & 1 \end{bmatrix} \right|$$





$$\left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 - R^2 \\ \text{augment}(X, Y, \text{"o"}, 5, \text{"red"}) \\ f(x, y) \end{array} \right.$$

Рис. 2.
Графическое решение задачи о полёте астероида.

положение астероида в пяти различных моментах времени, и, в-третьих, и главных – траектория астероида около Земли. Она, повторяем, вытекает из уравнения кривой второго порядка $f(x, y) = 0$, которая проходит через пять заданных точек. Правая часть уравнения – это определитель (две вертикальные прямые) квадратной матрицы с шестью строками и шестью столбцами. Уравнение найдено в Интернете по ключу поиска “кривая второго порядка”. Все просто и понятно!

Первая запись в аргументе графика (его охватывают фигурные скобки справа от графика) на рис. 2 – это уравнение окружности $x^2 + y^2 = R$ (наша голубая планета Земля). Правая часть уравнения R перенесена в левую часть, чтобы получилось не уравнение, а функция двух аргументов. Вторая запись в аргументе графика содержит функцию *augment*, формирующую матрицу с пятью строками (число точек на графике) и с пятью столбцами, хранящими вектор X, вектор Y, символ, который будет прописан на графике (это точка), его размер (5 единиц) и его цвет (у нас он красный). Третья запись – это тоже неявная функция вида $f(x, y) = 0$, отображающая кривую второго порядка – траекторию полета астероида.

А что это за кривая на рис. 2 – дуга эллипса, дуга параболы или дуга гиперболы? Чтобы это узнать, достаточно в нашем случае расширить область построения графика. Для этого нужно дважды щёлкнуть по графику мышкой

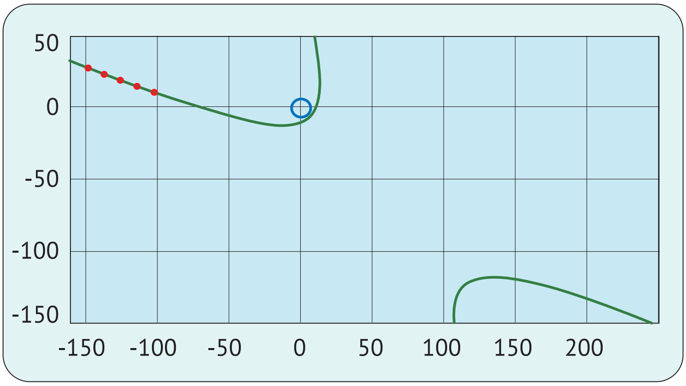


Рис. 3.
Графическое решение задачи о полёте астероида: видны две ветви гиперболы.

и вызвать диалоговое окно его форматирования, в котором изменить некоторые настройки. Окно показано на рис. 2 в верхнем правом углу. Из рис. 3 следует, что наш астероид летит по гиперболической орбите: гипербола отличается от параболы и эллипса тем, что у неё четко видны на рис. 3 две ветви.

Из школьного и вузовского курсов математики мы вынесли немало так называемых "математических китайских грамот" – описаний решений задач, которые невозможно понять многим непосвящённым[12]. Пытаешься вникнуть во всё это и чувствуешь себя, пардон, дурак-дураком. Одна из таких задач – это *приведение кривой второго порядка к каноническому виду*. Очень многие наслышанные об этой задаче не понимают ход её решения, которое приводится в справочниках и учебниках по математике. Читатель, проведи поиск в Интернете по ключу "*приведение кривой второго порядка к каноническому виду*"! Выползет куча формул и графиков, но непосвященному трудно в них разобраться. Вот два ярких примера[13].

Более того, в словах "приведение кривой к каноническому виду" слышится что-то сакральное, божественное и небесное (астероид в небе), чего нельзя понять, а во что нужно просто верить. Что-то типа "канонизация святого"! Описанные в сноске подходы дублируют бескомпьютерные решения. А мы-то знаем, что компьютер с его математическими программами намного упрощает и облегчает решение математических и инженерных задач – и это немаловажно для их понимания. А давайте приведём нашу гиперболу к каноническому виду, не прибегая к "китайским грамотам".

Первый шаг "канонизации" кривой второго порядка – вычисление шести коэффициентов её уравнения, отмеченного первым оператором на рис. 4. Далее показано, как встроенная в *SMath* функция *roots* провела численный поиск корней пяти уравнений с пятью неизвестными – уравнений кривой второго порядка, проходящих через пять точек. В уравнении шесть коэффициентов с именем *a* и с разными индексами. Можно было бы написать просто *a*11, *a*12, *a*22 и т.д., но в математике принято писать a_{11}, a_{12}, a_{22} и т.д. В среде *SMath* для этого вставляют точку между буквой и числом (индексом в имени

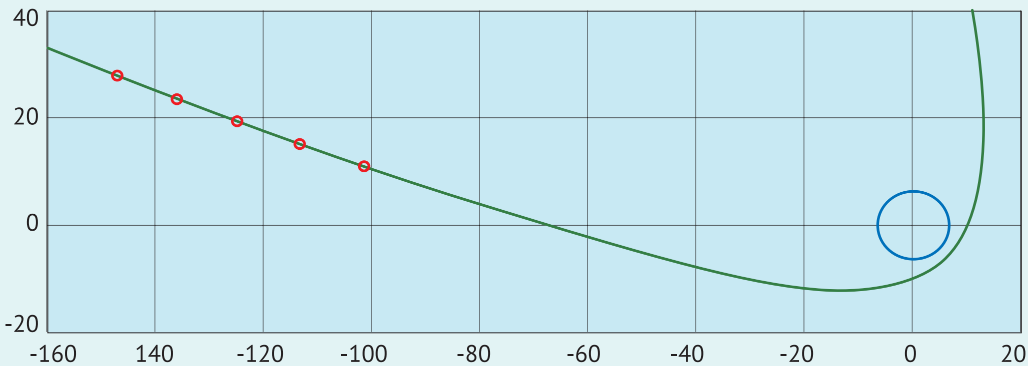
---

[12] *Англичане тут говорят: "It's all Greek to me!" – "Это для меня греческая грамота!"*

[13] *Ахметова Ф.Х., Акимова И.Я., Чигирёва О.Ю. Методика приведения уравнений кривых и поверхностей второго порядка к каноническому виду с применением среды MathCAD // Научно-методический электронный журнал "Концепт". 2016. № 11. С. 151–161. URL: http://e-koncept.ru/2016/16250.htm; Изнатьев Ю.Г., Самигуллина А.Р. Программное обеспечение теории кривых второго порядка в пакете компьютерной математики // Вестник ТГГТУ. 2011. № 4(26). С. 24–29. URL: https://cyberleninka.ru/article/n/programmnoe-obespechenie-teorii-krivyh-vtorogo-poryadka-v-pakete-kompyuternoy-matematiki*

$$a_{11}\times x^2 + 2\times a_{12}\times x\times y + a_{22}\times y^2 + 2\times a_{13}\times x + 2\times a_{23}\times y + a_{33} = 0 \qquad a_{33} := 1$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{22} \\ a_{13} \\ a_{23} \end{bmatrix} := \mathrm{roots}\left(\begin{bmatrix} a_{11}\times x_1^2 + 2\times a_{12}\times x_1\times y_1 + a_{22}\times y_1^2 + 2\times a_{13}\times x_1 + 2\times a_{23}\times y_1 + a_{33} = 0 \\ a_{11}\times x_2^2 + 2\times a_{12}\times x_2\times y_2 + a_{22}\times y_2^2 + 2\times a_{13}\times x_2 + 2\times a_{23}\times y_2 + a_{33} = 0 \\ a_{11}\times x_3^2 + 2\times a_{12}\times x_3\times y_3 + a_{22}\times y_3^2 + 2\times a_{13}\times x_3 + 2\times a_{23}\times y_3 + a_{33} = 0 \\ a_{11}\times x_4^2 + 2\times a_{12}\times x_4\times y_4 + a_{22}\times y_4^2 + 2\times a_{13}\times x_4 + 2\times a_{23}\times y_4 + a_{33} = 0 \\ a_{11}\times x_5^2 + 2\times a_{12}\times x_5\times y_5 + a_{22}\times y_5^2 + 2\times a_{13}\times x_5 + 2\times a_{23}\times y_5 + a_{33} = 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{22} \\ a_{13} \\ a_{23} \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} -0.0014915 \\ -0.0020473 \\ -0.0011563 \\ -0.0434335 \\ -0.0471354 \end{bmatrix}$$



$$\begin{cases} x^2 + y^2 - R^2 \\ \mathrm{augment}\,(X, Y, \text{"o"}, 5, \text{"red"}) \\ a_{11}\times x^2 + 2\times a_{12}\times x\times y + a_{22}\times y^2 + 2\times a_{13}\times x + 2\times a_{23}\times y + a_{33} \end{cases}$$

Рис. 4.
Решение системы пяти уравнений с пятью неизвестными.

переменной). В наших уравнениях есть и другие индексы – операторы указания элемента в векторах *X* и *Y*. Этот индекс вводится в расчёт горячей клавишей [, а не точкой. Начинающие изучать пакет *SMath* часто путают эти два вида индексов из-за их полного внешнего сходства. У второго "матричного" индекса не появляется точка, когда к переменной с индексом подводят курсор.

По идее у нас должно быть пять уравнений (кривая второго порядка проходит через пять точек) с шестью неизвестными – коэффициентами a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_{13}, a_{23} и a_{33}. Такая недоопределённая система имеет бесконечное число решений, включая и тривиальное, когда все неизвестные равны нулю. Выход из такого даже не дву-, а "бесконечносмысленного" положения таков. Одной из неизвестных присваивается ненулевое значение. После этого число уравнений становится равным числу неизвестных, что позволяет найти одно из нетривиальных решений – значения остальных пяти коэффициентов уравнения кривой второго порядка. На рис. 4 показано, что переменной a_{33} присвоено значение единицы и через функцию *roots* (корни) найдены значения остальных коэффициентов, подстановка которых в уравнения превращают их в тождества. После этого строится график полёта астероида, который полностью совпадает с графиком, показанным на рис. 2.

Но несложно сообразить, что уравнения у нас линейные. Можно при-

$$M \times x = v$$

$$M := \begin{bmatrix} x_1^2 & 2 \times x_1 \times y_1 & y_1^2 & 2 \times x_1 & 2 \times y_1 \\ x_2^2 & 2 \times x_2 \times y_2 & y_2^2 & 2 \times x_2 & 2 \times y_2 \\ x_3^2 & 2 \times x_3 \times y_3 & y_3^2 & 2 \times x_3 & 2 \times y_3 \\ x_4^2 & 2 \times x_4 \times y_4 & y_4^2 & 2 \times x_4 & 2 \times y_4 \\ x_5^2 & 2 \times x_5 \times y_5 & y_5^2 & 2 \times x_5 & 2 \times y_5 \end{bmatrix} \quad |M| = 2856.6247 \quad v := \begin{bmatrix} -a_{33} \\ -a_{33} \\ -a_{33} \\ -a_{33} \\ -a_{33} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{22} \\ a_{13} \\ a_{23} \end{bmatrix} := M^{-1} \times v = \begin{bmatrix} -0.0014915 \\ -0.0020473 \\ -0.0011563 \\ -0.0434335 \\ -0.0471354 \end{bmatrix} \qquad M \times \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{22} \\ a_{13} \\ a_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Рис. 5.
Решение системы пяти линейных уравнений с пятью неизвестными.

менить к ним не функцию *roots* (она предназначена для систем нелинейных уравнений), а другие инструменты *SMath* – задание квадратной матрицы *M*, расчёт её определителя, ненулевое значение которого говорит о том, что есть решение и оно единственно, и умножение инвертированной матрицы *M* на вектор свободных членов *v* – см. рис. 5. Ответ получился тот же, что на рис. 4.

Так или иначе (см. рис. 4 и 5) найдены шесть коэффициентов уравнения кривой второго порядка и можно ещё раз построить её график – см. рис. 4. Есть и третий вариант нахождения этих коэффициентов – "выуживание" их из неявного выражения *f* (*x*, *y*), показанного на рис. 2. Понять, что у нас гипербола, а не эллипс или парабола, можно и количественно, а не только качественно – см. рис. 5 с двумя ветвями гиперболы. Это делается через подсчёт по коэффициентам a_{11}, a_{12} и a_{22} одной из инвариант (ещё один иероглиф китайской грамоты). Если эта инварианта окажется отрицательной, то мы имеем дело с гиперболой: положительной – с эллипсом, нулевой – с параболой.

Приведение гиперболы к каноническому виду подразумевает нахождение параметров *a* и *b* её канонической записи:

$$x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1.$$

Такую задачу, повторяем, многие помнят, но только Избранные (канонизированные) знают, как это делается.

Решить задачу нам поможет рис. 6 со схемой "канонизированной" гиперболы, дополненной отрезками прямых и характерными точками с их обозначениями (взято из Википедии в статье о гиперболе).

Голубым пунктиром показаны асимптоты гиперболы (красные прямые линии). Асимптоты пересекаются в центре гиперболы (*C*) и асимптотически приближаются к гиперболе (к ветвям её ветвей) по мере удаления от центра гиперболы. Два фокуса гиперболы обозначены как F_1 и F_2. В одном из них

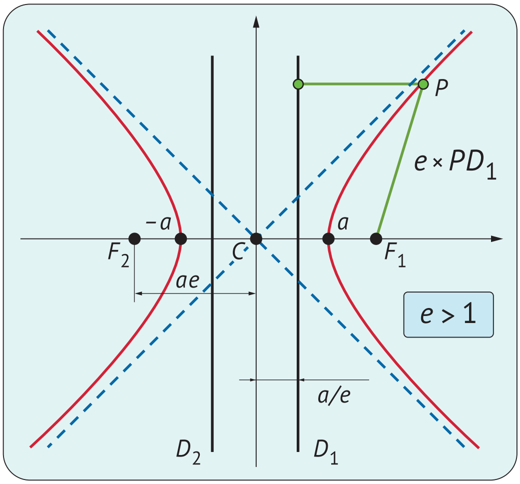
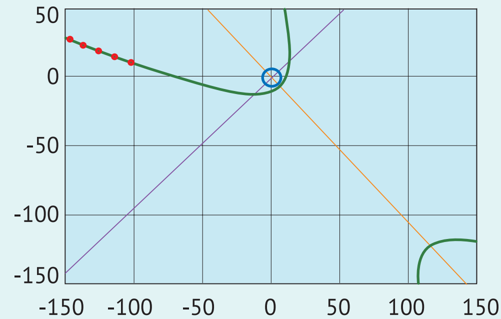


Рис. 6.
Гипербола в каноническом виде с её характерными линиями и точками.

$$\varphi := \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \times \operatorname{arcctg}\left(\frac{2 \times a_{12}}{a_{11} - a_{22}}\right) = 42.6594^{\circ}$$



$$\begin{cases} x^2 + y^2 - R^2 \\ \text{augment}\,(X, Y, \text{"o"}, 5, \text{"red"}) \\ a_{11} \times x^2 + 2 \times a_{12} \times x \times y + a_{22} \times y^2 + 2 \times a_{13} \times x + 2 \times a_{23} \times y + a_{33} \\ tg(\varphi) \times x \\ tg\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) \times x \end{cases}$$

Рис. 7.
Поворот осей на угол φ.

(в левом) будет находиться центр Земли, если вспомнить об исходной задаче о полёте астероида. Директрисы гиперболы обозначены как D_1 и D_2. Эксцентриситет гиперболы *e* равен отношению расстояний точки *P* на гиперболе до фокуса и до соответствующей директрисы. Если эксцентриситет равен единице, то это не гипербола, а парабола. При эксцентриситете, меньшем единицы, получим эллипс. Что такое фокус гиперболы, её директриса и её эксцентриситет (ещё одни “китайские иероглифы”), мы расскажем ниже. Вершины гиперболы обозначены как ±*a*. Параметры гиперболы на рис. 6 обозначают следующее:

a – расстояние от центра *C* до каждой из вершин;

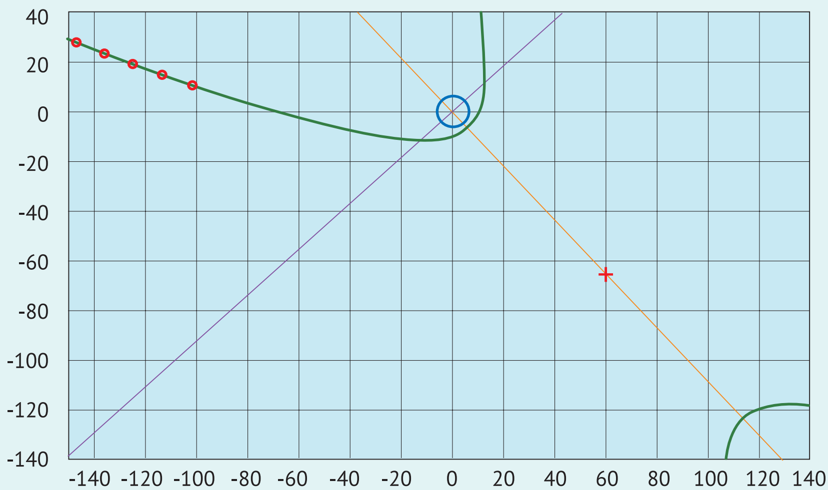
c – расстояние от центра *C* до любого из фокусов, F_1 и F_2.

Первый шаг в процессе приведения кривой второго порядка к каноническому виду – это нахождение угла φ, на который нужно повернуть график, чтобы наша гипербола стала канонически “горизонтальной” – см. рис. 7. Соответствующая формула для этого угла “вылезает” первой в потоке информации, появляющейся в Интернете при поиске по ключу “приведение кривой второго порядка к каноническому виду”. Далее в потоке этой информации идёт та самая “китайская грамота” с упоминанием квадрик, собственных значений и собственных векторов и прочих математических премудростей, непонятных для многих, и требующая тщательного изучения для того, чтобы не выглядеть профаном в математике. Но на это нет ни времени, ни способностей. Поэтому мы решим задачу без “китайской грамоты”, используя простые и понятные численные методы решения систем уравнений на компьютере – «надломим скорлупу “Колумбова яйца” и поставим его вертикально». Раньше таких методов не было совсем или их использование было связано с большими трудностями. Да и не было компьютеров, их реализующих. Это одна из причин появления той самой “китайской грамоты”,

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} := \mathrm{roots}\left(\begin{bmatrix} a_{11} \times x^2 + 2 \times a_{12} \times x \times y + a_{22} \times y^2 + 2 \times a_{13} \times x + 2 \times a_{23} \times y + a_{33} = 0 \\ y = \mathrm{tg}\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) \times x \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 5.5446 \\ -6.0172 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} := \mathrm{roots}\left(\begin{bmatrix} a_{11} \times x^2 + 2 \times a_{12} \times x \times y + a_{22} \times y^2 + 2 \times a_{13} \times x + 2 \times a_{23} \times y + a_{33} = 0 \\ y = \mathrm{tg}\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) \times x \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 110 \\ 125 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 113.4184 \\ -123.0854 \end{bmatrix}$$

$$x_0 := \frac{x_2 + x_1}{2} = 59.4815 \qquad y_0 := \frac{y_2 + y_1}{2} = -64.5513$$



$$\left\{\begin{array}{l} x^2 + y^2 - R^2 \\ \mathrm{augment}\,(X, Y, \text{"o"}, 5, \text{"red"}) \\ a_{11} \times x^2 + 2 \times a_{12} \times x \times y + a_{22} \times y^2 + 2 \times a_{13} \times x + 2 \times a_{23} \times y + a_{33} \\ \mathrm{tg}(\varphi) \times x \\ \mathrm{tg}(\varphi + \frac{\pi}{2}) \times x \\ \mathrm{augment}\,(x_1, y_1, \text{"o"}, 5, \text{"red"}) \\ \mathrm{augment}\,(x_2, y_2, \text{"o"}, 5, \text{"red"}) \\ \mathrm{augment}\,(x_0, y_0, \text{"o"}, 10, \text{"red"}) \end{array}\right.$$

Рис. 8.
Нахождение центра новой системы координат.

понятной лишь яйцеголовым, да и то далеко не всем. Тут сразу вспоминается эта самая история “Колумбова яйца” о довольно грубом, но простом решении старой проблемы.

На рис. 8 показано, как через численное решение систем уравнений с двумя неизвестными (см. эпиграф) при разных начальных приближениях высчитываются координаты двух точек пересечения новой (повернутой на угол φ) оси абсцисс с двумя ветвями гиперболы. Эти точки отмечены кружочками на пересечении гиперболы

Рис. 9.
Две ветви гиперболы полета астероида, приведённые к каноническому виду.

$$a := \frac{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}{2} = 79.5954$$

$$ae := \sqrt{(x_0 - 0)^2 + (y_0 - 0)^2} = 87.7777$$

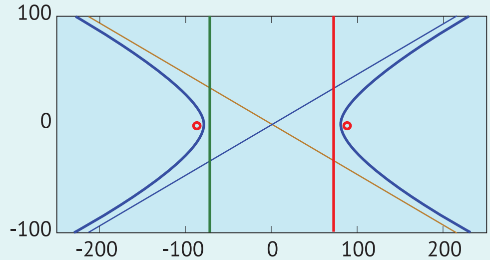
$$e := \frac{ae}{a} = 1.1028$$

$$b := \sqrt{a^2 \times (e^2 - 1)} = 37.0066$$

$$D := \frac{a}{e} = 72.1759$$

$$X_1 := (X - x_0) \times \sin(\varphi) - (Y - y_0) \times \cos(\varphi)$$

$$Y_1 := (X - x_0) \times \cos(\varphi) + (Y - y_0) \times \sin(\varphi)$$



$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} - 1 \\ \text{augment}(-ae, 0, \text{"o"}, 5, \text{"red"}) \\ \text{augment}(-ae - 23, \text{"F1"}, 7, \text{"red"}) \\ \text{augment}(ae, 0, \text{"o"}, 5, \text{"red"}) \\ \text{augment}(ae, 0, \text{"F2"}, 7, \text{"red"}) \\ \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} \\ \dfrac{x}{a} - \dfrac{y}{b} \\ \text{augment}\left(\begin{bmatrix} D \\ D \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 100 \\ -100 \end{bmatrix}\right) \\ \text{augment}\left(\begin{bmatrix} -D \\ -D \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 100 \\ -100 \end{bmatrix}\right) \\ \text{augment}(x_1, y_1, \text{"o"}, 5, \text{"red"}) \end{cases}$$

с новой осью абсцисс – читатель, поверни голову вправо набок! Центр отрезка, соединяющего эти две точки, помечен крестиком. Это будет также и центром новой системы координат. Остальное – дело техники, вернее, вычислительной техники – см. рис. 9. На этом рисунке (читатель, верни голову в привычное прямое положение!) показано, как по известным простым формулам находятся значения второго параметра *b* канонического уравнения гиперболы, положение её директрисы *D* и значение эксцентриситета *e*. Показано также, как пересчитываются векторы *X* и *Y* для новой системы координат. Формулы для этого пересчёта выужены из “потока информации”, упомянутого выше. В итоге строится сама гипербола в каноническом виде с нанизанными на неё исходными точками положения астероида – см. рис. 1. Центр Земли, повторяем, находится в левом фокусе.

Все просто и понятно без какой-либо “китайской грамоты”, которую можно “прочесть”, если появится желание углубиться в решение задачи и вспомнить о том, как её решали в докомпьютерную эру. “Китайская грамота” нацелена на общее решение задачи. Наш же простой и понятный подход связан с частным случаем, с гиперболой. Хотя, конечно, и наши расчёты, описанные здесь, кому-то покажутся “китайской грамотой”, написанной на реально существующем упрощённом китайском языке, возникшем с появлением компьютеров.

Остается только просто и понятно объяснить, что за *фокус*, *директриса* и *эксцентриситет* упоминаются при описании гиперболы на рис. 6. Ведь фокус и директрису обычно связывают с параболой, а не с гиперболой. А у эллипса целых два фокуса, как, впрочем, и у гиперболы.

SMath-программа, показанная на рис. 10, “одним махом” строит гиперболу, параболу и эллипс около фокуса и директрисы. Напомним, что парабола есть геометрическое место точек

$x_1 := -1 \quad x_2 := 1 \quad y_1 := 0 \quad y_2 := 1.8$

$x_F := 0 \quad y_F := 1 \quad Dir := 0.5 \quad n := 300$

$XY :=$ | i := 1

for $x \in x_1, x_1 + \dfrac{x_2 - x_1}{n} .. x_2$

for $y \in y_1, y_1 + \dfrac{y_2 - y_1}{n} .. y_2$

$L_1 := \sqrt{(x - x_F)^2 + (y - y_F)^2}$

$L_2 := y - Dir$

if "Hyperbola" $\vee$ "Parabola" $\vee$ "Ellipse"

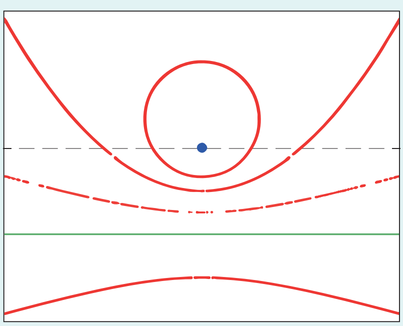
$\varepsilon := 3 \quad \left|\dfrac{L_1}{L_2}\right| \approx \varepsilon$ | $\varepsilon := 1 \quad \dfrac{L_1}{L_2} \approx \varepsilon$ | $\varepsilon := 0.5 \quad \dfrac{L_1}{L_2} \approx \varepsilon$

$X_i := x$

$Y_i := y$

i := i +1

augment (X, Y, " . ", 1, "red")



XY
augment (x_F, y_F, " . ", 5, "blue")
Dir

Рис. 10.
Жук второго порядка.

на плоскости, для которых расстояние до заданной точки (фокуса) равно расстоянию до заданной прямой (директрисы). Слово “эллипс” же переводится с древнегреческого как “опущение”; нехватка, недостаток. А недостаток чего? Ответ – этого самого эксцентриситета. У гиперболы же наблюдается избыток эксцентриситета. У гиперболы расстояние от любой её точки до фокуса больше расстояния до директрисы. У эллипса всё наоборот. Отношение этих расстояний и есть этот самый эксцентриситет – степень отклонения кривой от окружности, у которой эксцентриситет равен нулю.

На рис. 10 графики гиперболы, параболы и эллипса построены “тупым” сканированием (опять вспоминается “Колумбово яйцо” с его тупым концом!) заданной прямоугольной области x_1-x_2-y_1-y_2, где находятся фокус и директриса. Если какая-то точка окажется на одной из трёх упомянутых кривых, то её координаты *x*-*y* заносятся в векторы *X* и *Y*, которые затем отображаются графически. У нас получился некий жук второго порядка с овальной головой, одним глазом-фокусом и шестью ногами[14]. Или с восьмью ногами, если учитывать и директрису. Эксцентриситет гиперболы жука равен трём. При увеличении значения эксцентриситета две ветви гиперболы будут стремиться к двум параллельным прямым линиям. Эксцентриситет эллипса жука равен 0.5. При уменьшении эксцентриситета эллипс будет стремиться к окружности.

Сайты с расчётными файлами:
https://community.ptc.com/t5/PTC–Mathcad/Armageddon-not-coronavirus/m-p/655474;

https://community.ptc.com/t5/Mathcad/Hyperbola-transformed-to-a-canonical-form/td-p/828142.

[14] *Очков В.Ф., Фалькони А.Д. Информатика, алгебра, геометрия: четыре арифметические кривые с покемоном // Информатика в школе. 2016. № 9. С. 57–61. URL: http://www.twt.mpei.ac.ru/ochkov/4-curves.pdf*