

Розеттский камень компьютерной оптики

Описан предельно простой метод нахождения медианного профиля плоско-выпуклой линзы. Решение задачи для сравнения представлено в трёх программных средах – Mathcad, SMath Studio и SimInTech.

Ключевые слова: линза, медианный профиль линзы, численное и аналитическое решение системы дифференциально-алгебраических уравнений.

Читатель, с каким запахом у тебя связано наступление весны?! Для многих это запах распускающихся почек на березе или тополе. Для одного из авторов этой статьи запах весны – это запах... жженого дерева. Почему?

Самую раннюю весеннюю пору часто называют Весной Света. Февраль, снег ещё и не думает таять, никаких цветов и листьев пока нет, но наконец-то после долгой зимы ярко засветило солнце. Во времена детства этого автора многие пацаны в это время выбегали на улицу с лупами и выжигали картинки или слова на всём, что сделано из дерева¹ – см. рис.

1. А лупы (увеличительные стекла) в те времена были практически в каждой семье.

Приходит старость, глаза слабеют, нужны не только очки, но и лупа, если хочется почитать книгу, газету или журнал... Это сейчас тексты можно читать не только без лупы, но даже и без очков. Достаточно пальцами или мышкой увеличить текст на компьютере, электронной книге или смартфоне...

¹ В рассказе чешского писателя Карела Чапека (1890–1938) «Истории о взломщике и поджигателе» описывается загадочный пожар. В ясный солнечный день сидит человек дома со своим семейством и празднует именины, но тут стучат ему в окно и кричат, то у него крыша горит... На следующий день сыщик, выполняя функции пожарного дознавателя, замечает на обгоревшей балке чердака какой-то блестящий предмет. Это оказалась лупа, которую, как выяснилось в результате расследования, задолго до пожара установил на чердаке бывший ученик хозяина дома. Он был зол на патрона за то, что тот запрещал делать физические опыты и лупил его за это. Решив отомстить хозяину, мальчик рассчитал, где будет стоять солнце в полдень в день именин хозяина, и укрепил на чердаке лупу под таким углом, чтобы загорелся пучок соломы, а он к тому времени убрался подальше...



Рис. 1. Выжигание на дереве с помощью лупы: проставление точки над i

А какую форму должна иметь лупа (линза), чтобы параллельный пучке света, пройдя через стекло, сошелся в фокусе [1-4]. Давайте ответим на этот вопрос, решив задачу в средах трёх программ: Mathcad, SMATH Studio и SimInTech.

На рисунке 2 показана схема задачи о форме медианного профиля плоско-выпуклой линзы.

На плоскую сторону линзы сверху падает пучок параллельных лучей света², один из которых показан красным цветом. На одной на нижней границе «стекло-воздух» луч света преломляется согласно закону Снеллиуса (https://ru.wikipedia.org/wiki/Закон_Снеллиуса) и попадает в фокус, отстоящий от нижнего края линзы на расстоянии F . Этот край линзы (точка 0) будет у нас началом декартовых координат. Коэффициент преломления n равен отношению синуса угла β к синусу угла α – отношению значений скорости света в двух средах.

Какова должна быть форма линзы, чтобы имело место такая геометрия – геометрическая оптика, не учитывающая волновую или корпускулярную природу света. В подавляющем числе случаев линзам придают сферическую форму, но есть и линзы с другой формой (https://ru.wikipedia.org/wiki/Асферическая_линза).

² Как правило, к солнцу, к источнику света поворачивают выпуклую сторону линзы. Но мы изменим эту традицию для того, чтобы упростить задачу.

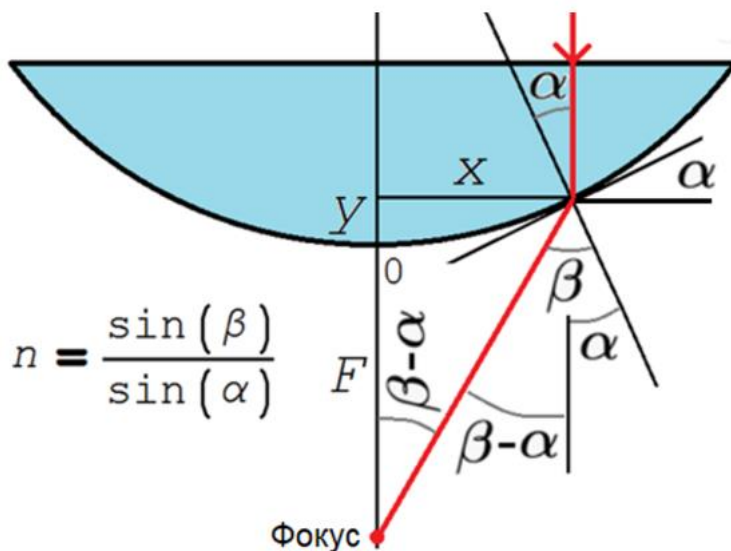


Рис. 2. Схема задачи о линзе

Задача сводится к решению простой системы двух алгебраических, точнее, тригонометрических уравнений и одного обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка с начальными условиями (https://ru.wikipedia.org/wiki/Задача_Копли). Два тригонометрических уравнения подстановкой можно свести к одному, но мы не будем этого делать в решениях на рис. 3 и 4 для того, чтобы сохранить ясность физики задачи. Но закон Снелллиуса мы запишем не дробью (рис. 2), а выражением $n \cdot \sin(\alpha) = \sin(\beta)$ – см. рис. 3-5. Запись дробью будет приводить к делению на нуль при старте численного решения задачи.

На рисунке 3 показано, как задача решается в среде Mathcad Prime, на рис. 4 – в среде SMath Studio, а на рис. 5 – в среде SimInTech.

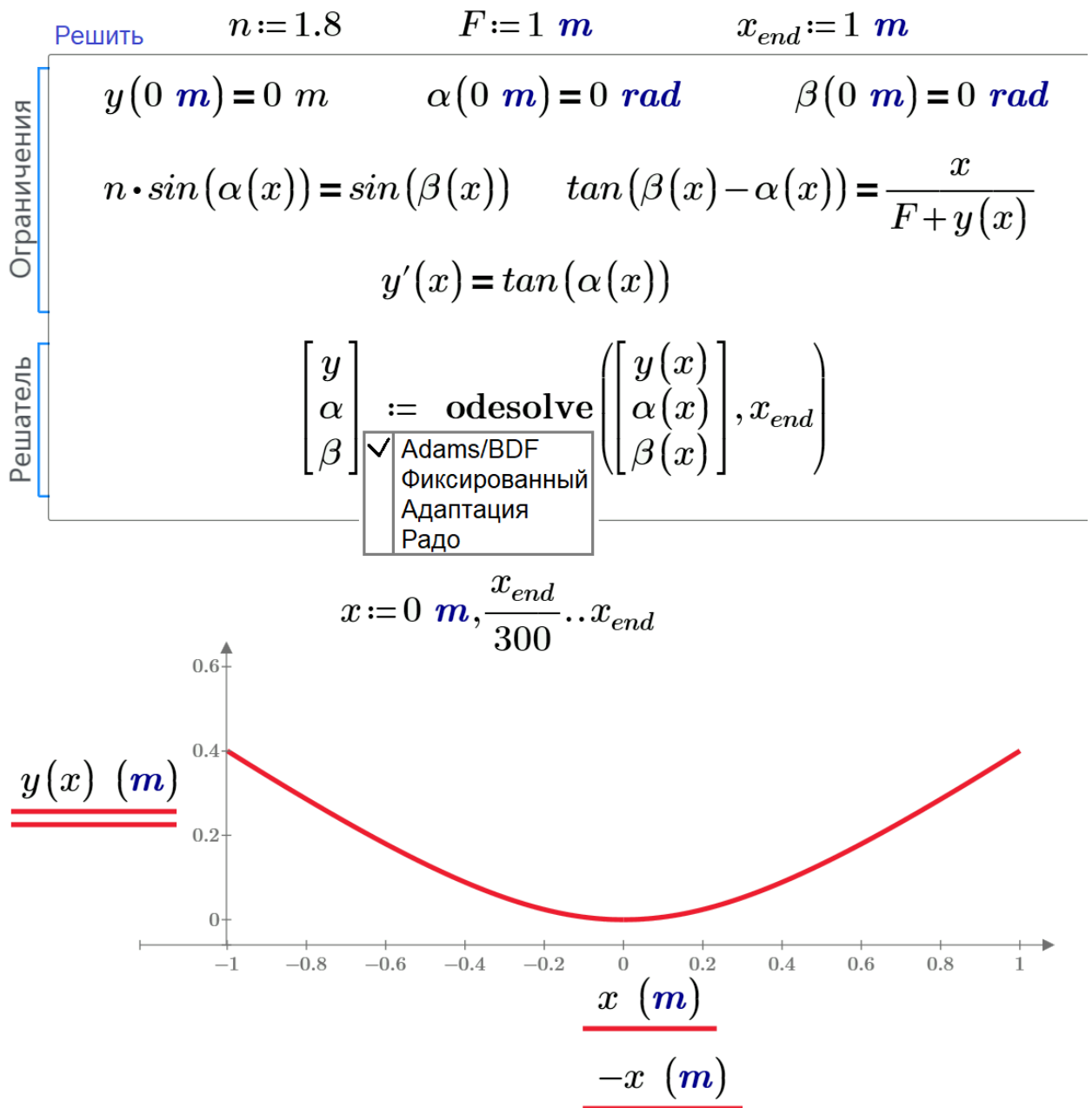


Рис. 3. Mathcad Prime

$n := 1.8$ $F := 1$ $x_{\text{end}} := 1$ $N := 30$ $x_0 := 0$ $y_0 := 0$

$$\alpha(x, y) := \text{roots} \left(\begin{bmatrix} n \cdot \sin(\alpha) = \sin(\beta) \\ \text{tg}(\beta - \alpha) = \frac{x}{F + y} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \right)$$

1 Первый элемент вектора решения

$D(x, y) := \text{tg}(\alpha(x, y))$ $L := \text{rkfixed}(y_0, x_0, x_{\text{end}}, N, D)$

$y(x) := \text{lspline}(\text{col}(L, 1), \text{col}(L, 2), x)$

$r := \left(\text{solve} \left(1^2 + (y(x_{\text{end}}) - r)^2 = r^2, r \right) \right) = 1.4488$ Радиус окружности - см. пунктир

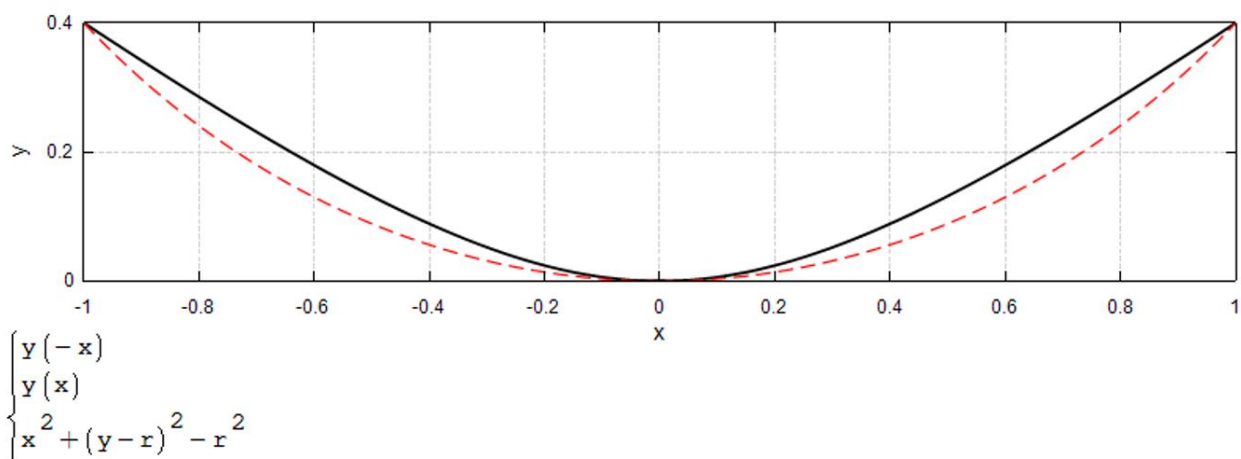


Рис. 4. SMath Studio

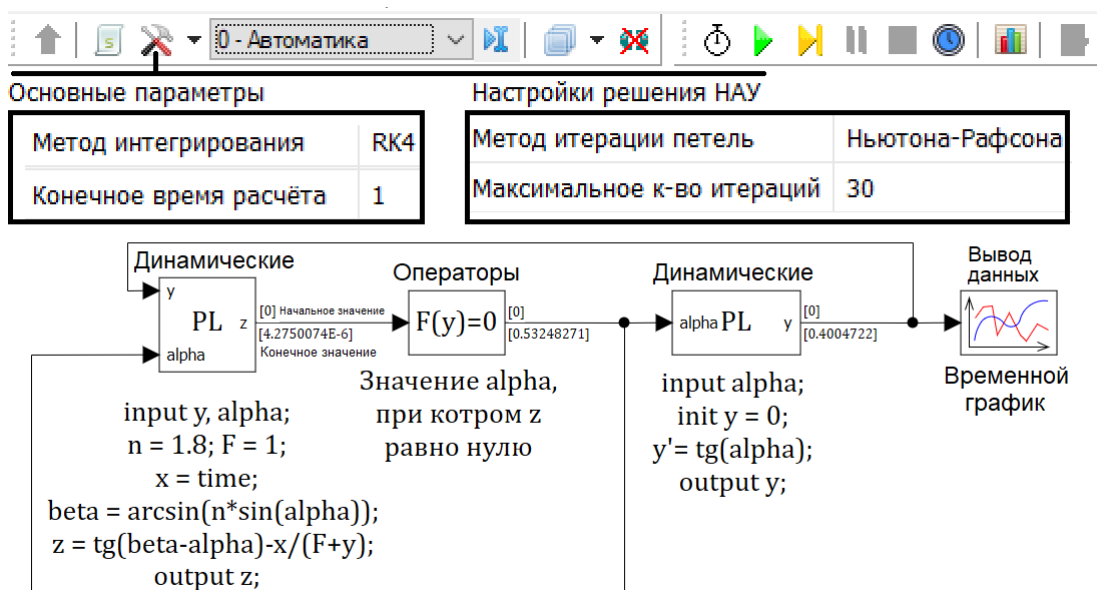


Рис. 5. SimInTech (решаем одно тригонометрическое уравнение)

Профиль половинки линзы

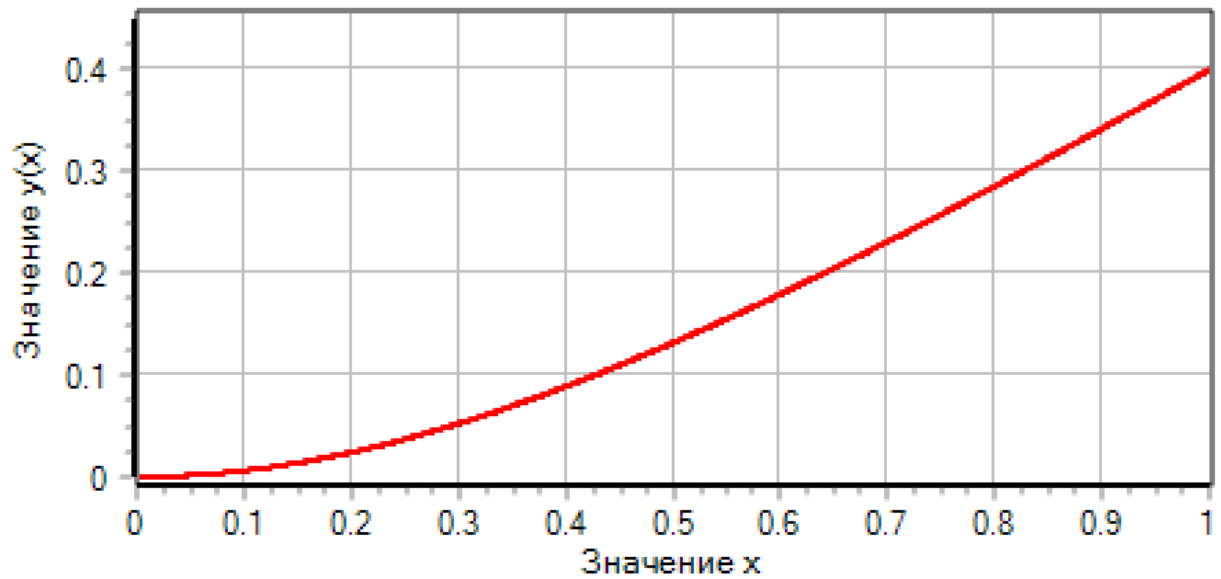


Рис. 6. Профиль линзы (SimInTech)

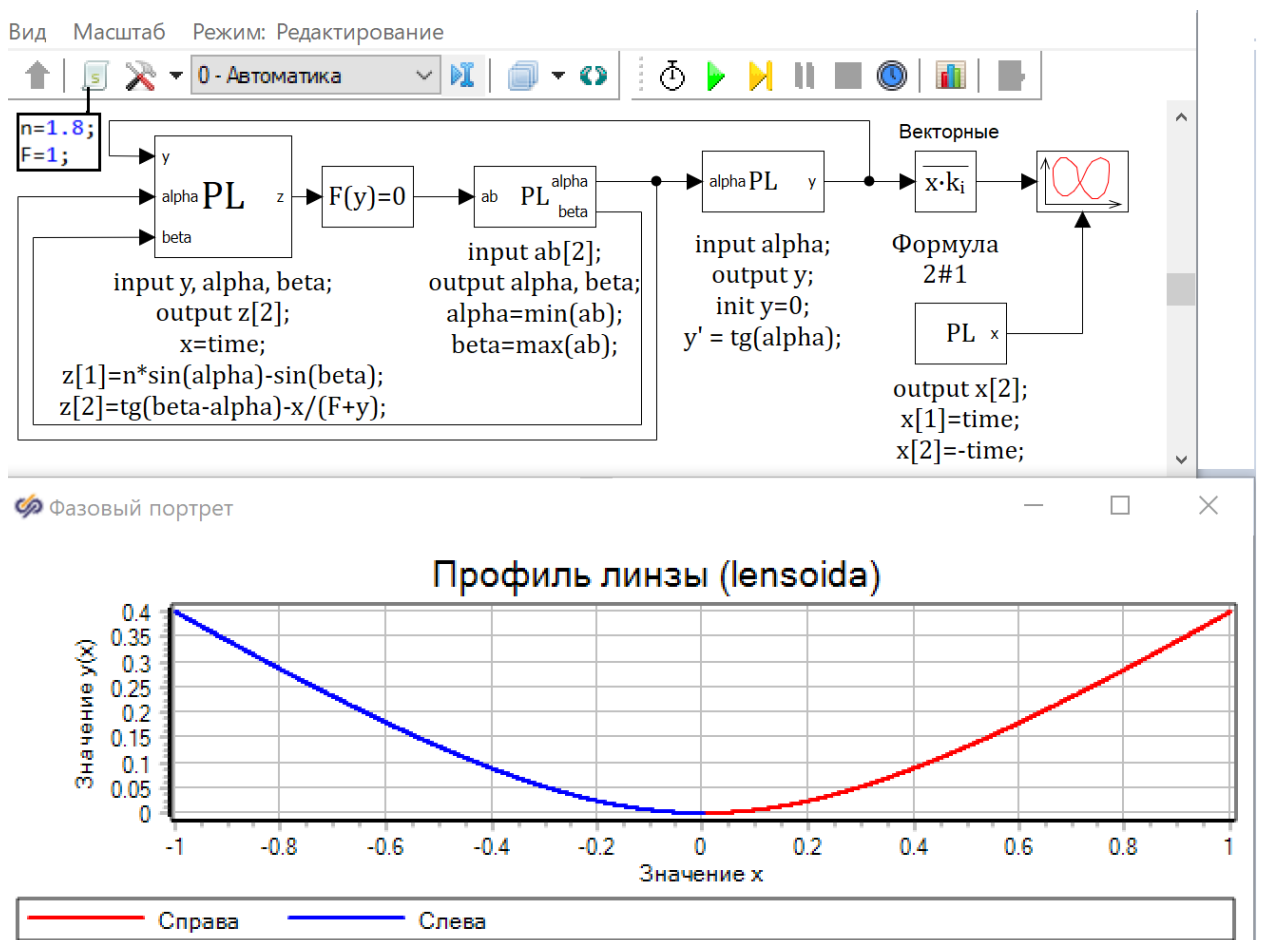


Рис. 6а SimInTech (решаем два тригонометрических уравнения)

Анализ решений на рисунках 3-5 заставляет вспомнить... Розеттский камень (рис. 7, https://ru.wikipedia.org/wiki/Розеттский_камень), найденный в 1799 году в Египте. Он

послужил ключом к расшифровке древнеегипетских иероглифов. На нём выбит один и тот же текст в трёх вариантах – вверху иероглифами, в середине демотическим письмом (скорпись эпохи позднего Египта) и внизу на древнегреческом языке.

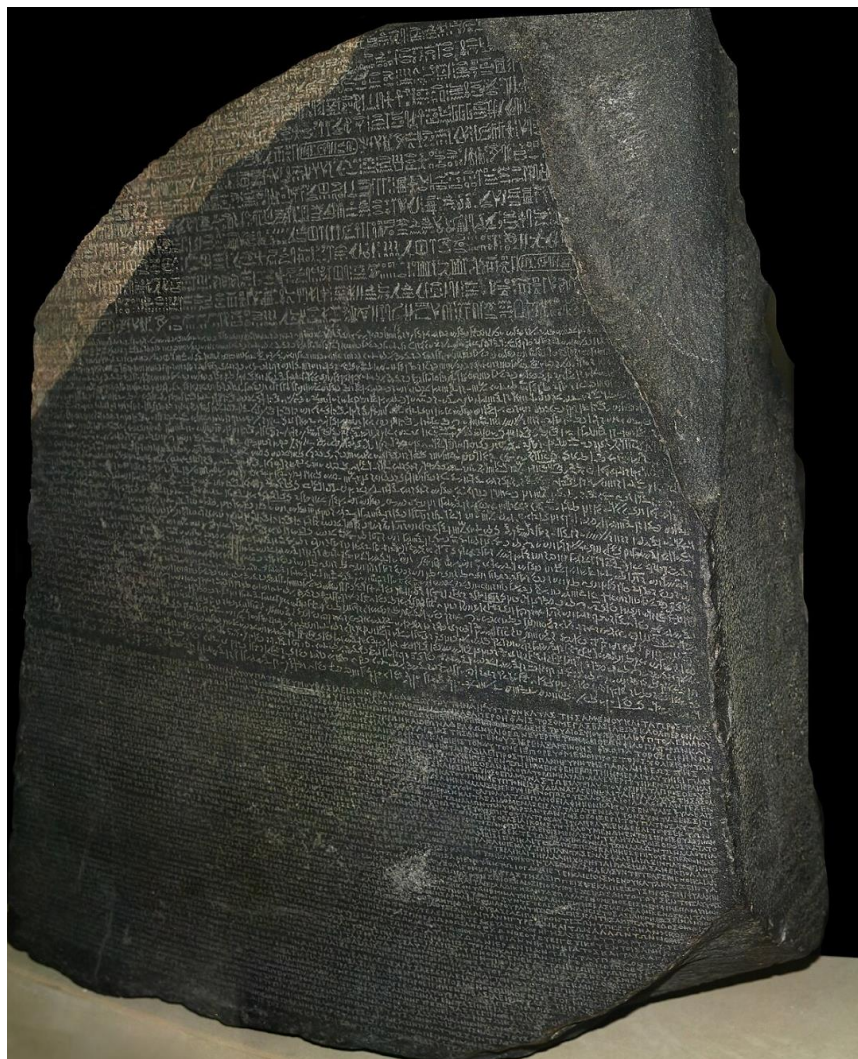


Рис. 7. Розеттский камень

Так вот, рисунок 3 – это древнегреческие письмена, рисунок 4 – это демотические знаки, а рисунок 5 – древнеегипетские иероглифы. Непосвященному понять, что изображено на рисунке 5, можно, только глядя на рисунки 4 и 3!

Решение на рисунке 3 (Mathcad) понятно без каких-либо дополнительных пояснений. Достаточно только отметить, что встроенная функция **odesolve** в нашем случае возвращает искомую функцию $y(x)$, а также две вспомогательные функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$. Все три функции получены в результате интерполяции дискретных значений численного решения задачи. Метод решения пользователь может изменить, нажав правую кнопку мыши на имени функции **odesolve**. По умолчанию выбирается универсальный гибридный метод Адамса/BDF, применяемый практически для любых ОДУ (https://ru.wikipedia.org/wiki/Метод_Адамса, BDF – backward differentiation formula – обратная формула дифференцирования). Решение отображено графически, но сама найденная функция не может быть показана так как она, повторяем, представляет из себя

не алгебраическое выражение (см. рис. 8 в конце статьи), а является продуктом интерполяции дискретных данных на отрезке от нуля до заданного значения x_{end} .

Функция $y(x)$ определена только на интервале значений аргумента от 0 до единицы. Но «маленькие хитрости» позволили на графике охватить интервал от минус до плюс единицы.

Особо отметим, что в решении на рис. 3 используются единицы физических величин (метры и радианы), что позволяет повысить наглядность (открытость) расчёта и избежать некоторых ошибок.

В решении на рис. 4 (SMath Studio) приходится отдельно с помощью встроенной функции `roots` численно решать систему двух тригонометрических уравнений. Возвращается не численный ответ, а формируется пользовательская функция с именем α и двумя аргументами x и y , которая затем используется при численном решении дифференциального уравнения с помощью встроенной функции `rkfixed` (метод Рунге–Кутты четвертого порядка с фиксированным шагом –

https://ru.wikipedia.org/wiki/Метод_Рунге_—_Кутты). Эта функция возвращает матрицу с двумя столбцами и $n+1$ строками. Чтобы получить пользовательскую функцию $y(x)$, приходится прибегать к встроенной функции `lspline` для сплайн-интерполяции дискретных значений. Результат расчёта также отображён на графике (сплошная линия). На графике дополнительно прочерчена дуга окружности (пунктир), охватывающая центр и края линзы. Сделать это довольно просто – графика пакета SMath Studio позволяет строить кривые и по неявным функциям, чем мы и воспользовались.

Отметим, что пакет SMath Studio, как и пакет Mathcad может работать с единицами измерения, но с некоторыми ограничениями. В частности, единицы измерения не состыковываются с функцией `roots`. Поэтому метры и радианы из расчёта на рис. 4 были убраны.

А теперь перейдем к «иероглифам» – к рисунку 5.

Сразу отметим, что программа SimInTech принципиально отличается от программ Mathcad и SMath Studio. Пакет SimInTech – это не математическая программа, а компьютерный инструмент динамического моделирования, создания цифровых двойников нестационарных процессов, где главным и определяющим параметром является время. Основным инструментом такого моделирования является явное или неявное решение дифференциальных уравнений. Наша задача о линзе – это стационарная задача. Стационарную задачу в среде SimInTech можно решить, привязав аргумент искомой функции решения дифференциально-алгебраического уравнения (у нас это расстояние x от центра линзы) к системной переменной **time**. Системное время меняется от нуля до 10 секунд – умолчание, которое можно нарушить (ввести единицу), обратившись к диалоговому окну настроек (рис. 5 – кнопка с перекрещёнными молотком и отверткой).

Еще одна особенность пакета SimInTech заключается в том, что отдельные операторы (блоки) выполняются не в естественной последовательности языков программирования (слева-направо и сверху-вниз), а по указаниям особых стрелок-связей, которые пользователь прочерчивает, реализуя задуманный алгоритм.

Все это создаёт некие психологические барьеры при переходе от языков программирования (BASIC, Pascal, C, Python и др.) и математических программ (Mathcad, SMath Studio, Maple, Mathematica и др.) к работе с инструментами динамического моделирования типа SimInTech. А это приходится делать, если есть желание или потребность создавать сложные динамические цифровые двойники реальных объектов. Поэтому-то авторы и затронули пакет SimInTech в данной статье.

Да, при решении дифференциального уравнения время не всегда является аргументом искомой функциональной зависимости. В нашей задаче о форме линзы аргументом является не время, а расстояние – см. рис. 2. Поэтому в первом (левом) программном блоке PL записан оператор $x = \text{time}$, позволяющий решить в среде SimInTech не типичную для этого программного продукта задачу. В этом же программном блоке вычисляется невязка z решения тригонометрического уравнения, к которому подстановкой сведена исходная система двух уравнений (см. рис. 3 и 4). Далее вступает в работу блок решения нелинейного уравнения $F(y)=0$, а затем второй (правый) программный блок PL, где ведется численное интегрирование задачи. Через диалоговое окно настроек выбирается метод интегрирования RK4 – метод Рунге–Кутты четвёртого порядка с фиксированным шагом [5], равным (умолчание) 0.001. Этот же метод был использован в решении, показанном на рис. 4 (SMath Studio).

График на рисунке 6, который на рис. 5 отмечен как временной, что не совсем верно в нашем случае, показывает симметричную половинку профиля линзы. Дополнительными операторами и блоками можно показать линзу целиком как на рис. 3 и 4.

Задачу о линзе можно и линеаризовать – заменить синусы и тангенс на сами углы (https://ru.wikipedia.org/wiki/Параксиальное_приближение). В этом случае нашу систему дифференциально-алгебраических уравнений можно решить и аналитически – с получением алгебраического выражения - см. рис. 8.

$$n \cdot \alpha - \alpha = \frac{x}{F + y} \xrightarrow[\text{simplify}]{\text{solve, } \alpha} \frac{x}{(n-1) \cdot (y + F)}$$

$$\left[y'(x) = \frac{y(0) = 0}{(n-1) \cdot (y(x) + F)} \right] \xrightarrow[\text{simplify}]{\text{solve, } y(x)} \left[\begin{array}{l} \frac{\sqrt{(n-1) \cdot (x^2 + (F^2 \cdot n - F^2))}}{n-1} - F \\ -\frac{\sqrt{(n-1) \cdot (x^2 + (F^2 \cdot n - F^2))}}{n-1} - F \end{array} \right]$$

$$y_a(x, n, F) := \frac{\sqrt{(n-1) \cdot (x^2 + (F^2 \cdot n - F^2))}}{n-1} - F$$

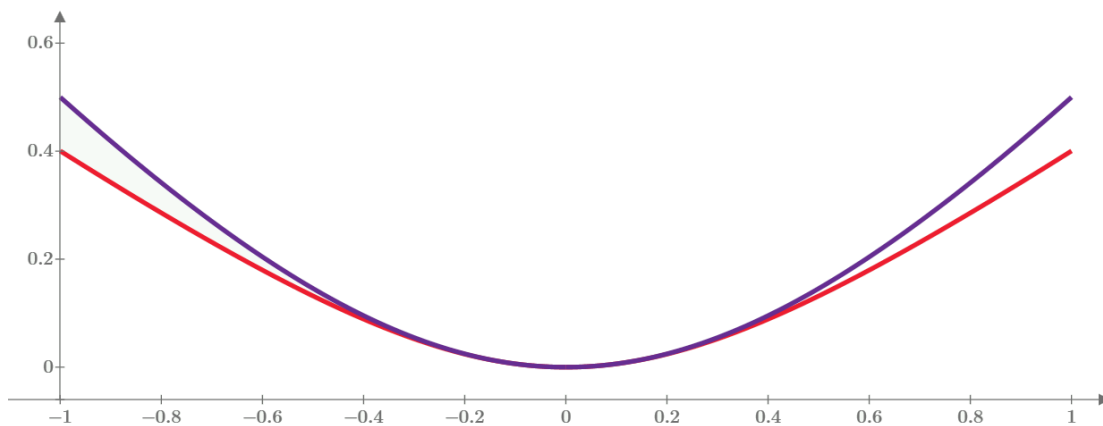


Рис. 8. Аналитическое решение задачи о линзе (синяя линия) в сравнении с нелинеаризованным численным решением (красная кривая) (Mathcad)

Так или иначе, никакой сферы (окружности) тут не наблюдается. Линзы делают сферическими не из физико-математических, а из технологических соображений.

Поверхность вращения, полученная через численное решение нашей оптической задачи, заслуживает названия. Она, кстати, ещё не описана в энциклопедии кривых и поверхностей (<https://mathcurve.com>).

В работе [8], вышедшей на год позже авторской работы [5], поиск формы линзы дан через численное решение одиночного сложного дифференциального уравнения, вывод которого очень трудно понять. Это тоже своеобразная китайская грамота, состоящая из иероглифов. Опора же на систему двух тригонометрических и одного дифференциального уравнения (рис. 3 и 4) – это опять же некая замена иероглифов на привычное фонетическое письмо.

В [9] дан пример приближенного решения задачи.

Вывод.

Современные компьютерные средства решения задач позволяют предельно просто численно решить задачу о форме медианного сечения асферической линзы.

Литература.

1. Очков В.Ф. Какую форму имеет линза // Физика в школе № 8. 2024. С.36-38 (http://twi.mpei.ac.ru/ochkov/fizika_v_shkole_2024_08.pdf)
2. Алешкевич В.А. Курсовой физики. Оптика — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2011. — 320 с. (<https://studizba.com/files/show/pdf/77682-1-uchebnik--optika--aleshkevich-v-a.html>)
3. Бегунов Б. Н. Геометрическая оптика, Изд-во МГУ, 1966 (<https://alexandr4784.narod.ru/begunov.html>).
4. Очков В.Ф. Сказка о зайце и геометрической оптике // Физика в школе. № 4. 2022
5. Литературно-физическая композиция "Истории о зеркале и линзе" / В.Ф. Очков, Яна Калова, А.В. Соколов, Ю.В. Чудова // Открытое образование. № 1. 2016. С. 34-42 (<http://twi.mpei.ac.ru/ochkov/Mirror-Lens.pdf>)
6. Скворцов Л. М. Численное решение обыкновенных дифференциальных и дифференциально-алгебраических уравнений. М. : ДМК-Пресс, 2018 – 230 с.
7. Основы теории обыкновенных дифференциальных уравнений : учебное пособие / А.Е. Умнов, Е.А. Умнов.— Москва : МФТИ, 2024.— 326 с. (www.mathematics/study/uchebniki/УП-ОТОДУ_Умнов_2024.pdf)
8. https://www.researchgate.net/publication/316662261_Differential_equation_of_an_aspherical_lens_and_its_solution
9. Расчёт стигматической линзы с минимальными френелевскими потерями / Л.Л. Досколович, Д.А. Быков, Г.И. Грейсх, Ю.С. Стрелков // Компьютерная оптика. — 2021. — Т. 45, № 3. — С. 350-355. — DOI: 10.18287/2412-6179-СО-813.