ЧТО НАМ СТОИТ МОСТ ПОСТРОИТЬ! или ЗНАНИЕ – СИЛА

Доктор технических наук В.Ф. ОЧКОВ, профессор (НИУ МЭИ),
Н.Р. УМИРОВА, старший преподаватель
(Ташкентский технический университет)

DOI: 10.7868/S0233361922090038

– Самолюбия, – сказал Левин, задетый за живое словами брата, – я не понимаю. Когда бы в университете мне сказали, что другие знают цепную функцию, а я не знаю, – тут самолюбие.

Лев Толстой. “Анна Каренина”.

Когда-то не так уж давно использовать в расчётах синусы, косинусы и прочие логарифмы было некой проблемой. Необходимо было отрываться от расчёта и заглядывать в справочники – в знаменитые таблицы Брадиса, например, на которых выросло несколько поколений школьников. При этом часто нужно было проводить интерполяцию по дискретным справочным данным. Так поступали, делая вычисления на бумаге столбиком, на арифмометрах, с помощью логарифмической линейки или простейшего электронного калькулятора. Потом появились так называемые научные (инженерные) калькуляторы, которые помимо сложения, вычитания, умножения, деления, извлечения квадратного корня и вычисления процентов, “научились” работать и с вышеперечисленными, и с другими подобными математическими функциями.

Сейчас появились так называемые *компьютерные суперкалькуляторы* (математические программы), которые дополнительно могут строить графики, работать с матрицами, искать пределы, брать производные и интегралы (см. эпиграф[1] и задачу ниже), решать уравнения – алгебраические и дифференциальные, вести оптимизацию и проводить другие довольно сложные операции, связанные уже не с элементарной (школьной), а с высшей (вузовской) математикой, с математическим анализом, если говорить конкретнее.

Давайте для иллюстрации этих тезисов решим в среде одного из суперкалькуляторов – в среде математической программы Mathcad – одну очень красивую инженерную задачу.

На двух берегах реки на расстоянии L друг от друга возвели два пилона высотой h_1 и h_2 будущего цепного моста, к вершинам которых прикрепили цепь длинной S и с линейной массой m_c. К цепи на расстоянии x_1 от левого

[1] *В романе Толстого упоминается не цепная линия, а интегральное исчисление, которое напрямую связано с задачей статьи.*

“Энергия: экономика, техника, экология” 9’2022

пилона подвесили груз массой m_g (это, к примеру, элемент будущей проезжей части моста)[2]. На рис. 1 показан расчёт, где перечисленным переменным (исходные данные) присваиваются численные значения с соответствующими единицами измерений. Это ещё одно существенное отличие суперкалькуляторов от простых калькуляторов, электронных таблиц и языков программирования – суперкалькуляторы работают не просто с числами, а с физическими величинами! Это ускоряет расчёты, делает их удобными, исключает возможные ошибки пересчёта единиц измерения. Такие программы называют не просто математическими, а физико-математическими.

За таблицей с исходными данными следует свёрнутая область расчётов – знак плюса в квадратике с прямой линией справа. На эту область при необходимости можно наложить пароль, чтобы пользователь расчёта не мог видеть его, а мог только пользоваться его результатами. Затем дан не количественный, а качественный ответ в виде графиков провисания цепи в трёх вариантах: 1) к цепи подвешен груз так, чтобы были чётко видны провисания левого и правого участков цепи, 2) цепь не нагружена, и её участки сливаются в одну провисающую цепь и 3) масса цепи ничтожно мала по сравнению с массой груза и участки цепи натянуты, как струны. Пунктиром показаны фантомные продолжения участков цепи.

Раскроем свёрнутую область расчёта и посмотрим, что в ней записано. А в ней хранится, так сказать, ядро математического анализа, которое изучают на первом курсе технических вузов во время занятий по высшей математике!

[2] *Задачу можно упростить – строить не мост, а подвесную канатную дорогу.*

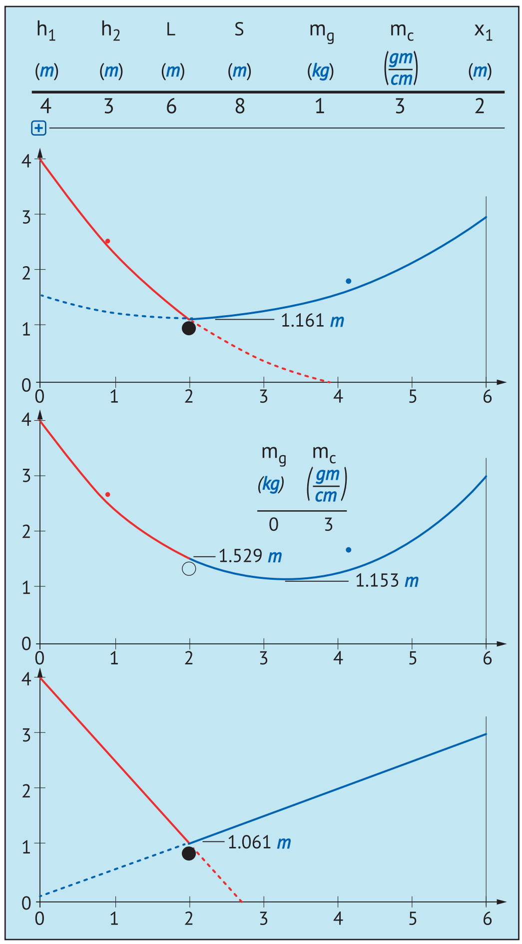
Считается, что создание и отладка *функций пользователя* с правильным перечнем аргументов – это наполовину решённая задача. На рис. 2 показаны шесть таких нужных нам функций.

1. Цепная линия y с одним аргументом x и тремя параметрами.

2. Производная цепной линии y' по аргументу x и с двумя параметрами.

3. Длина цепной линии L_c на отрезке от x_1 до x_2. Переменная x_1 уже используется в нашем расчёте в исходных данных (рис. 1), но в этой и двух последующих функциях пользователя это будет локальная переменная, видимая

Рис. 1.
Ввод исходных данных и вывод ответа в виде графика.



только в самих данных пользовательских функциях.

4. Ордината центра тяжести цепной линии y_{gc} на отрезке от x_1 до x_2.

5. Абсцисса центра тяжести цепной линии x_{gc} на отрезке от x_1 до x_2.

6. Потенциальная энергия PE цепи с грузом.

Зависимости п.п. 1, 3, 4 и 5 несложно найти в Интернете, запустив поиск по соответствующим ключам. Функция абсциссы центра тяжести цепной линии (п. 5) в расчёте не участвует, но она необходима для показа на графике провисания цепи центров тяжести двух участков цепи (см. эти центры на графиках рис. 1 над участками цепной линии). В третьем варианте провисания цепи на рис. 1, как и ожидалось, эти центры оказались в середине прямолинейных участков цепи. Один из эффективных способов тестирования созданного расчёта – это задание таких исходных данных, при которых ответ заранее известен.

Комментарии к функциям на рис. 1. Если вы спросите друзей и знакомых, по какой функции провисает цепь, то 99 человек из 100 скажут, что это парабола. К такому ответу толкает не только внешний вид традиционной школьной параболы с минимумом в начале координат, но и тот факт, что камень, запущенный под углом к горизонту, летит по параболе. Ведь на провисающую цепь и на летящий камень действует одна и та же сила – сила притяжения. Поэтому-то в таком отождествлении цепи и параболы нет ничего удивительного – даже великий Галилей так считал. Правда, в конце жизни он признался, что ошибся. Формулу цепной линии, уже после Галилея, почти одновременно и независимо друг от друга открыли три великих математика – Бернулли, Гюйгенс и Лейбниц[3].

Цепная линия на рис. 2 в п. 1 дана не в каноническом виде a cosh(x/a), когда её вершина находится в точке $x = 0$, $y = a$, а таким образом, что вершина будет находиться в точке $x = x_0$, $y = h$. Это связано с тем, что в нашей задаче начало декартовых координат расположено у основания левого пилона моста (см. рис. 1), а не в той плавающей по вертикали точке $x = 0$, $y = a$, которую задает канонический вид цепной линии. Поэтому-то функция пользователя, записанная в п. 1 на рис. 2, имеет один аргумент x, но три параметра (a, x_0 и h), а не один.

Производная цепной линии (2) найдена средствами символьной математики Mathcad – с помощью оператора символьного преобразования “→”. Это позволяет не высчитывать каждый раз производную численно, что само по себе считается довольно сомнительной операцией с позиций “чистой” математики.

Можно символьные преобразования применить и к функциям с интегралами. А можно этого не делать, тем более, что выражения под номерами 4 и 5 не будут до конца избавлены от интегралов – от так называемых неберущихся интегралов, записанных в числителе дробей.

Функция *потенциальной энергии* нашей неподвижной механической системы (цепь с грузом) с аж с восемью аргументами, имеет тройку слагаемых: потенциальная энергия левого участка цепи, потенциальная энергия груза и потенциальная энергия правого участка цепи. Забегая вперёд, скажем, что решение нашей задачи опирается на частный случай принципа Д’Аламбера–Лагранжа, гласящего, что механическая система принимает в статике такое положение, при котором её потенциальная энергия будет минимальна.

Второе название статьи появилось неслучайно. Оно на латинском звучит

[3] *Меркин Д.Р. Введение в механику гибкой нити. М.: Наука. 1980. URL: https://dwg.ru/lib/1317)*

$$y(x, a, x_0, h) := a \times \cosh\left(\frac{x - x_0}{a}\right) - a + h \qquad (1)$$

$$y'(x, a, x_0) := \frac{d}{dx}\, y(x, a, x_0, h) \rightarrow \sinh\left(\frac{x - x_0}{a}\right) \qquad (2)$$

$$L_c(x_1, x_2, a, x_0) := \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'(x, a, x_0)^2}\, dx \qquad (3)$$

$$y_{cg}(x_1, x_2, a, x_0, h) := \frac{\displaystyle\int_{x_1}^{x_2} y(x, a, x_0, h) \times \sqrt{1^2 + y'(x, a, x_0)^2}\, dx}{L_c(x_1, x_2, a, x_0)} \qquad (4)$$

$$x_{cg}(x_1, x_2, a, x_0) := \frac{\displaystyle\int_{x_1}^{x_2} x \times \sqrt{1^2 + y'(x, a, x_0)^2}\, dx}{L_c(x_1, x_2, a, x_0)} \qquad (5)$$

$$\begin{aligned} PE(y_1, a_L, x_{0L}, h_L, a_R, x_{0R}, h_R) := {} & L_c(0\,\boldsymbol{m}, x_1, a_L, x_{0L}) \times m_c \times \boldsymbol{g} \times y_{cg}(0\,\boldsymbol{m}, x_1, a_L, x_{0L}, h_L) \\ & + m_g \times \boldsymbol{g} \times y_1 \\ & + L_c(x_1, L, a_R, x_{0R}) \times m_c \times \boldsymbol{g} \times y_{cg}(x_1, L, a_R, x_{0R}, h_R) \qquad (6) \end{aligned}$$

Рис. 2. Функции пользователя.

так “Scientia potentia est”. Его приписывают Фрэнсису Бэкону – “Knowledge is Power”. Из латинского и английского вариантов этого крылатого выражения и вырисовывается ключевое понятие нашего расчёта – *потенциальная энергия*. Но не только! К знаниям, переходящим в силу, мы ещё вернёмся. У нас появится сила, но не как некое абстрактное философское понятие, а сила как конкретная физическая величина.

Итак, исходные данные и функции пользователя введены – можно приступить к решению задачи!

На рис. 3 показан блок *решателя* Mathcad с тремя зонами – зона первых приближений переменных оптимизации, зона ограничений с равенствами и зона, где могут быть записаны не только равенства (как в нашем случае), но и неравенства, и зона, где может быть записана одна из четырёх встроенных функций Mathcad – **Find**, **MinErr**, **Maximize** и **Minimize**[4]. Наша задача о провисающей цепи с грузом решается с помощью последней функции. Она по особому численному алгоритму меняет значения последних семи своих аргументов (первый аргумент с именем PE – это имя целевой функции оптимизации – см. п. 6 на рис. 2). Меняет так, чтобы ограничения выполнялись, а целевая функция, согласно вышеуказанному принципу, приняла минимальное значение.

---

[4] *Очков В.Ф., Богомолова Е.П., Мати Хейнлоо. Решатели или Великолепная семерка Mathcad // Открытое образование. 2015. № 3. С. 37–50. URL: http://www.twt.mpei.ac.ru/ochkov/Solvers-OE.pdf*

Решить

Начальные приближения

$y_1 := 1\,\boldsymbol{m}$

$a_L := 1\,\boldsymbol{m} \qquad x_{0L} := 1\,\boldsymbol{m} \qquad h_L := 1\,\boldsymbol{m}$

$a_R := 1\,\boldsymbol{m} \qquad h_{0R} := 1\,\boldsymbol{m} \qquad h_R := 1\,\boldsymbol{m}$

Ограничения

$h_1 := y\,(0\boldsymbol{m}, a_L, x_{0L}, h_L) \quad (1)$

$h_2 := y\,(L, a_R, x_{0R}, h_R) \quad (2)$

$y_1 := y\,(x_1, a_L, x_{0L}, h_L) = y\,(x_1, a_R, x_{0R}, h_R) \quad (3)$

$S := L_c\,(0\boldsymbol{m}, x_1, a_L, x_{0L}) + L_c\,(x_1, L, a_R, x_{0R}) \quad (4)$

Решатель

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ a_L \\ x_{0L} \\ h_L \\ a_R \\ x_{0R} \\ h_R \end{bmatrix} := \mathbf{Minimize}\,(PE, y_1, a_L, x_{0L}, h_L, a_R, x_{0R}, h_R) = \begin{bmatrix} 1.161 \\ 3.441 \\ 4.915 \\ -0.15 \\ 4.752 \\ 1.944 \\ 1.161 \end{bmatrix} \boldsymbol{m}$$

Рис. 3.
Минимизация потенциальной энергии.

В зоне ограничений языком математики записаны следующие условия задачи:

1. Левый конец цепи (индекс L) закреплен на высоте h_1.

2. Правый конец (R) цепи закреплен на высоте h_2.

3. Два участка цепи сходятся в точке подвеса груза $x_1 - y_1$. Значение x_1 задано, а значение y_1 нужно найти в процессе минимизации целевой функции потенциальной энергии системы.

4. Длина цепи – S величина постоянная. В принципе, цепь должна удлиниться после её подвеса на пилонах и прикрепления к ней груза, и это можно учесть в процессе усложнения задачи.

По найденным функцией **Minimize** значениям строятся графики, показанные на рис. 1. По этим данным также несложно рассчитать значения сил, растягивающих цепь, и построить соответствующие силовые *эпюры*.

Но сперва вернёмся к началу статьи, где упоминается великий Галилей. Если у людей, знающих, по какому закону провисает цепь, спросить, какой не просто геометрический, а конкретно *физический смысл* заложен в параметр a функции цепной линии, то опять же, образно говоря, 99% скажут, что не знают этого или дадут неверный ответ. А правильный ответ таков.

Давайте в однородном гравитационном поле с ускорением свободного падения **g**, равном 9.807 метра, делённым на квадратные секунды, поместим цепочку с линейной массой m_C, равной семидесяти граммам на метр (см. первую строку расчёта, показанного на рис. 4). И подвесим цепочку так, чтобы она провисала, как показано на графике рис. 4. Концы цепочки при этом окажутся в точках с координатами –1 *m* и 1.53 *m* и 1 *m* и 1.53 *m*. Длина такой цепочки будет равна 2.69 метра, а масса 188 граммам. Всё это, конечно, округлённые значения.

Если замерить силу F, с которой наша цепочка будет растягиваться влево и вправо в точке минимума, то она будет равна половине ньютона. Эту силу можно замерить и так: прицепить *горизонтально* к одному из концов цепочки динамометр и посмотреть, что он покажет – это и будет значение горизонтальной проекции силы, растягивающей цепочку. Несложно доказать, что эта сила постоянна по длине цепочки. На этом положении основано дифференциальное уравнение, решением которого и будет цепная функция. Вертикальная же проекция растягивающей силы – величина переменная. Она меняется от нуля в самой нижней точке цепочки до значения половины веса цепочки на её краях. Эти три физические величины (F, **g** и m_C) и будут определять “физическое” значение параметра *a*, входящего в формулу цепной линии. Но во всех справочниках по математике – бумажных и электронных – эту константу упорно прописывают безразмерной. А она имеет не только сокращённую размерность пространства (метры), но и полную размерность, показанную на рис. 4, возвращающую, повторяем, физический смысл формулы цепной линии.

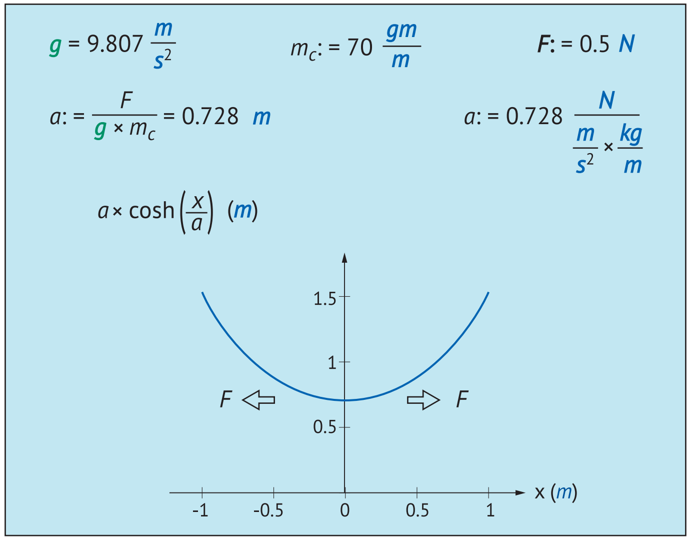


Рис. 4.
Физический смысл параметра а цепной линии.

При решении дифференциального уравнения константы *F*, **g** и m_C для простоты объединяют в одну константу (параметр) *a*. Вот это и есть та самая простота, которая, согласно поговорке, бывает хуже воровства!

$$F_x(x) := \mathbf{g} \times m_c \times \mathbf{if}(x < x_1, a_L, a_R)$$

$$F(x) := \frac{F_x(x)}{\cos(\operatorname{atan}(\mathbf{if}(x < x_1, y'(x, a_L, x_{0L}), y'(x, a_R, x_{0R}))))}$$

$$F_y(x) := \sqrt{F(x)^2 - F_x(x)^2}$$

Рис. 5.
“Силовые” функции пользователя.

Опираясь на вышесказанное (а о нём, образно говоря, знает только “один процент от одного процента”), можно создать ещё три функции пользователя (рис. 5), которые помогут нам построить эпюру сил, действующих на отдельные точки цепи с грузом (рис. 6). Вот оно – то *знание*, которое эквивалентно *силе* (см. второе название статьи). И не просто силе, а эпюре сил, растягивающих цепочку.

Функции на рис. 5 имеют одно ограничение – они ошибочно выдадут нулевые значения сил, если цепь невесома (третий график на рис. 1), а груз имеется. Но это нереальный случай, и мы должны его игнорировать при расчёте. Ошибка может иметь место и в том случае, когда вес у цепочки есть, но он очень мал по сравнению с весом груза. Однако это уже другой класс задач – задачи верёвочного многоугольника (по-английски Funicular Polygon)[5].

Ошибка может иметь место и в тех случаях, когда груз подвешен очень близко от точки крепления цепи. Эта ошибка связана с точностью численной математики, которую также называют и приближённой математикой. Об этом знают грамотные инженеры,

[5] *Очков В.Ф., Ленер Ф., Чудова Ю.В., Капитонец В.К., Тараканова Д.Ю. Физика vs информатика: верёвочный многоугольник с гирьками в статике, кинематике и динамике или Ньютон vs Лагранж // Cloud of Science 2017. Том 4. № 2. С. 147–180. URL: http://www.twt.mpei.ac.ru/ochkov/Polygon.pdf*

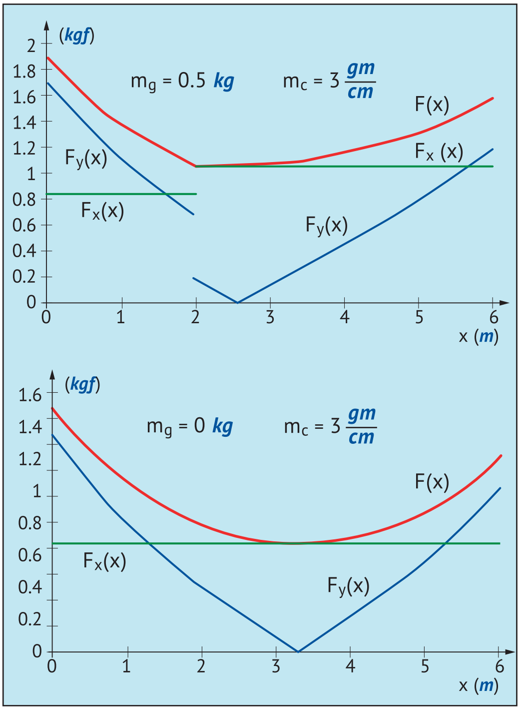
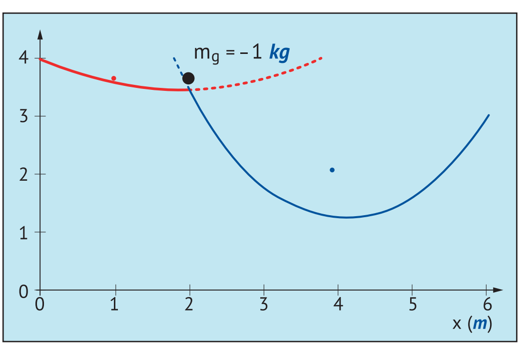


Рис. 6.
Эпюра сил, действующих на подвешенную цепь с грузом.

использующие компьютеры для решения своих задач. В задаче о цепочке с грузом ошибка бывает не только количественной, но и качественной. Так, если вес цепочки очень мал, то функция **Minimize** (см. рис. 3) может выдать отрицательные значения искомых

Рис. 7.
Цепь с антигрузом.

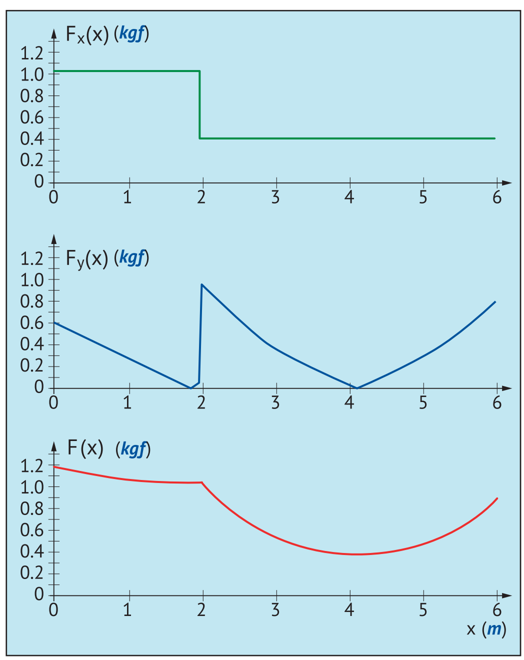


величин a_L и a_R: у нас получатся арки, а не провисающие участки цепи.

К цепи можно “вешать” своеобразный антигруз (см. рис. 7 и 8), отображающие такую ситуацию. По реке, через которую перекинут провод линии электропередачи (ЛЭП), должно пройти негабаритное высокое судно. Чтобы его пропустить, выключают напряжение, а провод временно приподнимают с помощью крана или вертолёта.

Говоря о знании, эквивалентном силе, следует также отметить, что многие забывают о физической сути параметра выражения не только для экзотичной цепной линии, но и для обычной школьной параболы, которую, повторяем, часто путают с цепной линией. Каноническое уравнение параболы в прямоугольной системе координат такое: $y^2 = 2p\,x$. Кто знает о том, что параметр p в этом уравнении тоже имеет чёткий физический смысл?!

Рис. 8.
Эпюра сил, действующих на подвешенную цепь с антигрузом.



Он равен расстоянию от фокуса параболы до её директрисы. Многие просто не слышали про фокус и директрису параболы! А ведь именно параболическая антенна собирает радиолучи в фокусе.

Параболу можно привязать к процессу строительства моста и в таком ключе. Если к подвешенным двум цепям или тросам крепить на вантах всё новые и новые грузы (секции будущей проезжей части моста), то нагрузка на цепи (тросы) окажется примерно одинаковой на всех участках в том случае, если провисание будет по параболе, а не по цепной линии.

Напоследок упомянем ещё об одной особенности цепной линии, связанной с интересной физико-математической константой, которую можно назвать *цепным числом* π. Если цепь без груза подвесить концами на одинаковой высоте, то нетрудно найти отношение *S*/*L*, при котором сила, растягивающая цепь в местах её крепления, будет минимальной. Приближённое значение этой константы равно 1.258, и она связана с корнем уравнения с гиперболическим котангенсом $\coth(x) = x^6$ и о ней знает один процент людей, понимающих физический смысл параметра *a* цепной линии. Первый автор статьи открыл эту константу независимо и одновременно с одним американцем китайского происхождения[7].

---

[6] *URL: https://community.ptc.com/t5/PTC–Mathcad/Can-we-solve-it-symbolical/td-p/787902*

[7] *C Y Wang. The optimum spanning catenary cable. March // European Journal of Physics. 36(2). 2015. Очков В.Ф., Богомолова Е.П., Иванов Д.А. Физико-математические этюды с Mathcad и Интернет. Изд-во Лань. 2016.*