Занятие 3. Подводная лодка «Наутилус»
Или
Доверяй, но проверяй!

Вот оригинальная цитата из романа Жюль Верна «Двадцать тысяч лье под водой»: «*Voici, monsieur Aronnax, les diverses dimensions du bateau qui vous porte. C'est un cylindre très allongé, à bouts coniques. <…>. Ces deux dimensions vous permettent d'obtenir par un simple calcul la surface et le volume du Nautilus. Sa surface comprend mille onze mètres carrés et quarante-cinq centièmes; son volume, quinze cents mètres cubes et deux dixièmes — ce qui revient à dire qu'entièrement immergé il déplace ou pèse quinze cents mètres cubes ou tonneaux.*»

Перевод цитаты с французского языка на язык математики таков. Капитан Немо на вопрос профессора Аронакса о размерах подводной лодки отвечает, что «Наутилус» имеет форму геометрического тела, составленного из трех тел – двух одинаковых по высоте (наше допущение) прямых круговых конусов (нос и корма лодки) и прямого кругового цилиндра (корпус лодки – см. рис. 3.1). Радиусы оснований конусов и цилиндра равны. Известны объем лодки V (1500.2 м^3) и площадь её наружной поверхности S (1011.45 м^2).

Капитан Немо по каким-то своим соображениям не стал раскрывать профессору Аронаксу габариты лодки, а сформулировал математическую задачу, которую мы постараемся решить.

Задача такая: необходимо определить размеры подводной лодки — радиус основания двух конусов и цилиндра r, высоты двух конусов (длину носа и кормы) h, а также высоту цилиндра (длину корпуса) l (см. рис. 3.1).

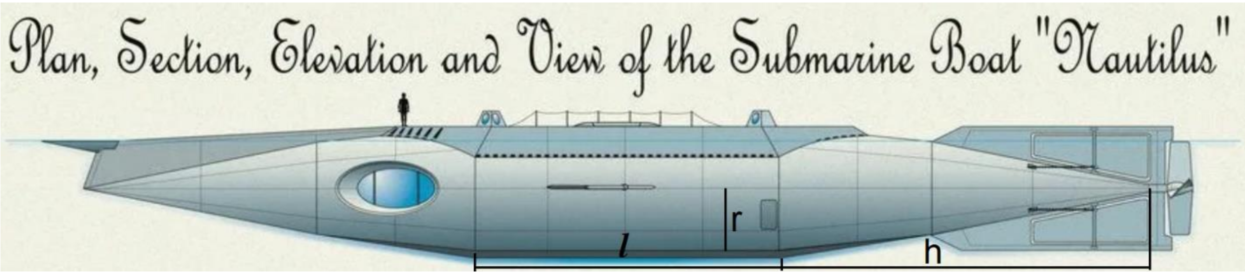


Рис. 3.1. Один из вариантов изображения подводной лодки «Наутилус»

Жюль Верн по образованию был адвокатом, а не инженером. Этим можно объяснить излишнюю точность при описании объема и площади поверхности подводной лодки. Мы округлим эти данные и примем, что V = 1500 m^3 и S = 1000 m^2 (см. левый верхний угол на рис. 3.3). В научно-фантастической литературе авторы часто оперируют показной высокой точностью для того, наверное, чтобы было побольше научности и поменьше фантастичности. Читатель может «поиграть» со значениями параметров V и S и посмотреть, что из этого будет получаться (ещё одно задание в дополнение к тем, которые приведены в конце главы).

Задача сводится к решению системы двух нелинейных уравнений (уравнения объема лодки $V = \dots$ и уравнения её наружной поверхности $S = \dots$ – см. рис. 3.2) с тремя неизвестными r, h и l. Система получилась *недоопределенной*, т.к. число неизвестных (три) больше числа уравнений (два). Тем не менее, мы постараемся её решить. И не только, и не столько для того, чтобы получить ответ – конкретные численные значения неизвестных r, h и l, а для образовательных и научных целей.

Любое уравнение или систему уравнений сразу нужно постараться решить аналитически (символьно) – абсолютно точно и с максимально возможным количеством ответов (корней), а потом уже при необходимости прибегнуть к численным методам (см. главу 2). На рисунке 3.2 показано, как в среде SMath записано уравнение объема «Наутилуса», из которого в ручном режиме (копированием и редактированием формул) выведено выражение для длины корпуса лодки l_1. Уравнение же площади наружной поверхности этого подводного судна для разнообразия решается с помощью функции `solve` из пакета Maple, расширяющего пакет SMath через загрузку соответствующего приложения. Получилось выражение для переменной l_2, которое можно слегка отредактировать – убрать лишний минус. Но можно этого и не делать. Для тренировки очень полезно поупражняться в ручных аналитических преобразованиях, что мы сделали для переменной l_1. А ещё лучше поступить так – получить ручное решение, которое затем сравнить с машинным. Ответы часто не совпадают полностью по внешнему виду, но если не было ошибки ручного или машинного счета, то они идентичны по своей математической сути. Но просчеты бывают и при машинных аналитических преобразованиях. Это мы и покажем ниже.

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h + \pi \cdot r^2 \cdot l + \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$$ Объем подводной лодки - работаем вручную

$$V = \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h + \pi \cdot r^2 \cdot l \qquad V - \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h = \pi \cdot r^2 \cdot l \qquad l_1 := \frac{V - \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h}{\pi \cdot r^2}$$

Площадь поверхности - используем дополнение Maple для решения

$$l_2 := \mathrm{maple}\left(\mathrm{solve}\left(S = \pi \cdot r \cdot \sqrt{r^2 + h^2} + 2 \cdot \pi \cdot r \cdot l + \pi \cdot r \cdot \sqrt{r^2 + h^2},\ l\right)\right) = -\frac{-S + 2 \cdot \pi \cdot r \cdot \sqrt{r^2 + h^2}}{2 \cdot \pi \cdot r}$$

Рис. 3.2. Начало аналитического решения задачи о «Наутилусе»

Выражения, хранимые в переменных l_1 и l_2, тождественны при заданных численных значениях параметров V и S, так как они отображают один и тот же параметр подводной лодки – длину её цилиндрической части. Поэтому их можно приравнять друг к другу и решить относительно переменной h с привлечением той же maple-функции `solve` – см. рис. 3.3, где показаны два корня-выражения, которые отличатся знаком в числителе перед радикалом (плюс/минус). Но это незначительное отличие существенно меняет характер графика функции, показанного в нижней части рис. 3.3.

$V := 1500 \qquad S := 1000$

$$\begin{bmatrix} h_1(r) \\ h_2(r) \end{bmatrix} := \mathrm{maple}\left(\mathrm{solve}\left(l_1 = l_2,\ h\right)\right) = \begin{bmatrix} \dfrac{3\cdot\left(200\cdot(-3+r)\cdot\sqrt{5}+\sqrt{450000\cdot\left(3\cdot(3-2\cdot r)+r^2\right)-r^6\cdot\pi^2}\right)}{\pi\cdot\sqrt{5}\cdot r^2} \\ \dfrac{3\cdot\left(200\cdot(-3+r)\cdot\sqrt{5}-\sqrt{450000\cdot\left(3\cdot(3-2\cdot r)+r^2\right)-r^6\cdot\pi^2}\right)}{\pi\cdot\sqrt{5}\cdot r^2} \end{bmatrix}$$

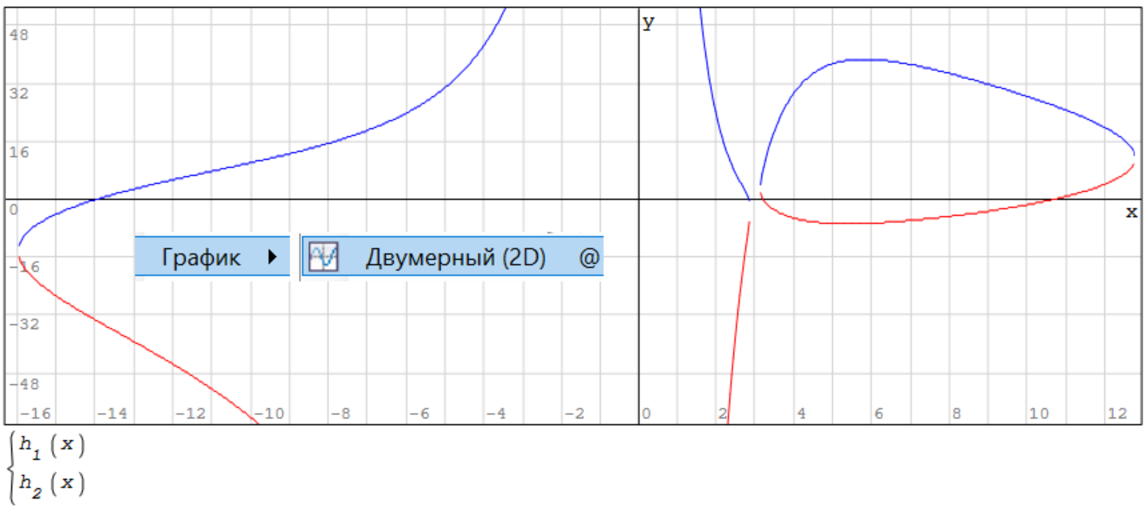


Рис. 3.3. Аналитическое решение уравнения длины корпуса «Наутилуса» (продолжение расчёта, показанного на рис. 3.2)

По этим двум корням были построены графики, представляющие собой множество точек решения нашей недоопределенной системы уравнений. Все просто, понятно и даже элегантно, но…

Оказалась, что наша недоопределенная система уравнений имеет, так сказать, избыточное решение. Истинным решением является только правая замкнутая[1] кривая, показанная справа на рис. 3.3 и составленная из двух «половинок» функций h_1 и h_2. Все остальные

[1] Разрывы кривых на графике связаны с недостатками техники построения графиков, а не с особенностями выражений.

кривые слева на графике (показаны только их части) – это ошибка аналитического решения уравнения [2, 3]. Это легко увидеть, если выбрать любую точку у «левых» кривых, подставить её абсциссу (2.5, например – см. рис. 3.4) в исходные выражения и убедиться в том, что одно из двух исходных уравнений объема или площади не превращается в тождество.

$r := 2.5$ Выбираем одну из "левых" точек

$$h := h_1(r) = 7.3927 \qquad l := \frac{V - \frac{2}{3}\cdot\pi\cdot r^2\cdot h}{\pi\cdot r^2} = 71.4659$$

$$\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot r^2\cdot h + \pi\cdot r^2\cdot l + \frac{1}{3}\cdot\pi\cdot r^2\cdot h = 1500 \quad \text{OK}$$

$$\pi\cdot r\cdot\sqrt{r^2 + h^2} + 2\cdot\pi\cdot r\cdot l + \pi\cdot r\cdot\sqrt{r^2 + h^2} = 1245 \quad \text{Должно быть 1000}$$

Рис. 3.4. Разоблачение «левой» кривой

Автор попросил одного преподавателя математики вручную решить уравнение «Наутилуса», показанное на рис. 3.2 и 3.3. Этот доктор физико-математических наук с многолетним стажем исписал несколько листов бумаги, но так и не довел дело до конца. Он предположил только то, что на каком-то этапе нужно решать квадратное уравнение и выбрать один из двух корней для дальнейшей работы с ним. Этот преподаватель оправдывал свое фиаско тем, что он специалист в узкой области математики, далекой от нашей задачи.

Итак, непогрешимость аналитических методов решения задач пошатнулась. Повторяем, доверяй символьной (аналитической) математике, но проверяй! Эта ошибка, кстати, присутствует в самых мощных математических программах – Maple и Mathematica. Это заставляет нас отойти от аналитического решения, показанного выше, и прибегнуть к численным методам (см. рис. 3.5) в области тех значений r, где решение уравнения корректно, то есть в области единственной замкнутой кривой. Никаких «левых» кривых на графике нет. В этом легко убедиться, если диапазон осей графика на рис. 3.5 увеличить в соответствии с рис. 3.3. На графике рис.3.5 оси поменяны местами. Это было сделано для того, чтобы масштаб осей был одинаков, а сам график расположился горизонтально.

$V = 1500 \qquad S = 1000 \qquad f(h;\, r) := \dfrac{V - \dfrac{2}{3}\cdot\pi\cdot r^2\cdot h}{\pi\cdot r^2} - \dfrac{S - 2\cdot\pi\cdot r\cdot\sqrt{r^2 + h^2}}{2\cdot\pi\cdot r}$

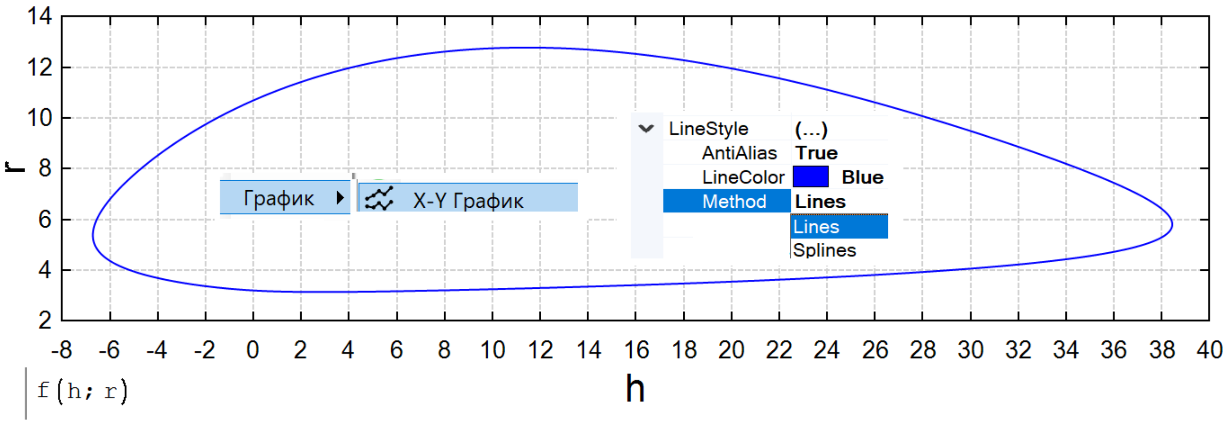


Рис. 3.5. Построение графика неявной функции задачи о «Наутилусе»

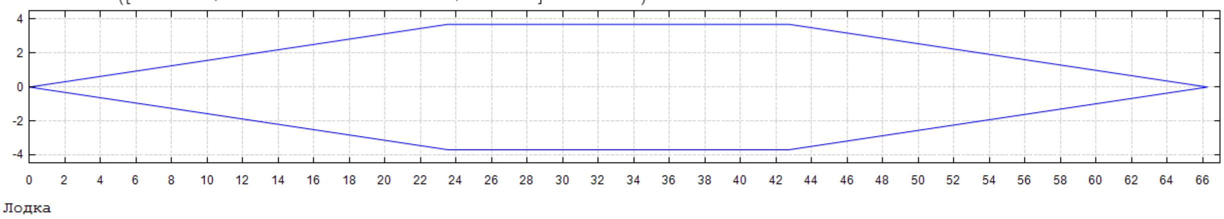
Математические пакеты строят графики функции, табулируя значения аргумента (абсцисса) и функции (ордината), и соединяя полученные точки прямыми линиями или сглаживая их некой интерполяционной кривой – см. внутри графика позиции Lines и Splines диалогового окна форматирования графика. Если студент на занятиях по математическому анализу начнет таким манером строить графики, то требовательный и эмоциональный преподаватель выгонит такого студента с занятий, топая при этом ногами и улюлюкая ему вослед. Мы обычно строим подобные графики более интеллигентно — качественно, а не количественно: анализируем функцию, ищем особые точки — нули, экстремумы, точки перегиба, асимптоты, точки разрыва и проч. Поэтому-то многие преподаватели математики в школах и в вузах вполне обоснованно считают, что машинная аналитика и графика отупляют студентов, отучают их работать головой… Вернее так: отупляют основную массу учащихся, но обогащают остальных — умных и добросовестных.

На рисунке 3.6 показана работа численной функций `roots` пакета SMath при вычислении корней уравнений. Принимается, что `r` равняется 3.7 м.

$r := 3.7$

$$\begin{bmatrix} h \\ l \end{bmatrix} := \text{roots}\left(\begin{bmatrix} V = \frac{1}{3}\cdot\pi\cdot r^2\cdot h + \pi\cdot r^2\cdot l + \frac{1}{3}\cdot\pi\cdot r^2\cdot h \\ S = \pi\cdot r\cdot\sqrt{r^2+h^2} + 2\cdot\pi\cdot r\cdot l + \pi\cdot r\cdot\sqrt{r^2+h^2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} h \\ l \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 20 \\ 30 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 23.5471 \\ 19.1789 \end{bmatrix}$$

$$\text{Лодка} := \begin{bmatrix} 0 & h & h+l & h+l+h & h+l & h & 0 \\ 0 & r & r & 0 & -r & -r & 0 \end{bmatrix}^T$$



$r = 3.7 \qquad h = 23.5471 \qquad l = 19.1789$

Проверка $\quad \frac{1}{3}\cdot\pi\cdot r^2\cdot h + \pi\cdot r^2\cdot l + \frac{1}{3}\cdot\pi\cdot r^2\cdot h = 1500 \qquad \pi\cdot r\cdot\sqrt{r^2+h^2} + 2\cdot\pi\cdot r\cdot l + \pi\cdot r\cdot\sqrt{r^2+h^2} = 1000$

Формула, выведенная из объема лодки $\quad l := \dfrac{V - \frac{2}{3}\cdot\pi\cdot r^2\cdot h}{\pi\cdot r^2} = 19.1789$

Формула, выведенная из площади поверхности подки $\quad l := \dfrac{S - 2\cdot\pi\cdot r\cdot\sqrt{r^2+h^2}}{2\cdot\pi\cdot r} = 19.1789$

Рис. 3.6. Одно из численных решений задачи о размерах подводной лодки «Наутилус»

На рисунке 3.6 показан контур подводной лодки при r = 3.7 м. Для рисования контура (замкнутой ломаной кривой, состоящей из отрезков прямых линий) была создана матрица *Лодка*, хранящая координаты точек излома. Первая строка матрицы – это абсциссы точек, а вторая – ординаты. Матрица для экономии места была создана горизонтальной, а потом транспонирована. Шаг сетки графика равен двум метрам, что несколько больше роста взрослого человека. Это было сделано намерено для того, чтобы рассчитанный нами контур подводной лодки можно было сравнить с контуром, показанным на рис. 3.1, где художник нарисовал и контур человека. Есть предположение, что художнику помогал математик, проанализировавший цитату из романа, приведенную в начале статьи.

Под контуром лодки на рис. 3.6 помещены проверочные операторы – повторяем: доверяй, но проверяй!

На рисунке 3.3 масштабы по осям абсцисс и ординат были разными, что не очень хорошо. Рисунок 3.5 – это множество точек решения нашей недоопределенной задачи о размерах подводной лодки в координатах, имеющих одинаковые масштабы. Контур на рисунке 3.5 сам по себе красив. Его можно выбрать для контура самой лодки, а при ординате, равной 10, провести ватерлинию лодки в надводном положении. Этот профиль может быть и у крыла самолета или у горизонтальных рулей самой подводной лодки, служащих для динамического погружения или всплытия.

Замечание о подводной лодке «Наутилус»

О романе «Двадцать тысяч лье под водой» в интернете можно прочесть следующее.

Жюль Верн в ходе работы над романом оставался под впечатлением от польского восстания 1863 года. Изначально капитан Немо был польским аристократом, сражающимся против российских угнетателей, погубивших всю его семью. Но под давлением своего издателя Этцеля, исходившего не только из политической конъюнктуры, но и из здравого расчёта, что у польского аристократа просто не хватит средств построить такое подводное судно, Жюль Верн «лишил» Немо национальности, которая так и осталась неизвестна профессору Аронаксу и его спутникам. О «польском следе» в его истории напоминает только портрет революционера Тадеуша Костюшко в каюте капитана. Позже, в романе «Таинственный остров», Жюль Верн раскроет инкогнито капитана Немо и представит его как беглого индийского принца Нана Сагиба, ушедшего в море после провала восстания сипаев и мстящего Англии, поработившей его родину.

Политическая же конъюнктура состояла в том, что Франция в преддверии франко-прусской войны активно искала поддержку России. Но Россия была сильно обижена на Францию после поражения в Крымской войне (четверо на одного – Англия, Франция, Оттоманская империя и Сардинское королевство против России). Это (нейтралитет России и «подгаживание» англичанки) во многом определило разгром Франции в войне с Пруссией и потерю Эльзаса и Лотарингии. Перед первой мировой войной Франции удалось заручиться поддержкой России. Если бы не Россия, то немецкие войска ещё бы раз прошлись по Парижу в 1914 году, как они это сделали в 1870 году и в начале Второй мировой войны.

Подобные приливы и отливы в отношениях России и Запада продолжаются и в XXI веке, и мы это отметили в главе 1.

Ещё одну недоопределенную систему алгебраических уравнений можно найти в романе Л.Н. Толстого «Анна Каренина».

Читаем в романе: «*Скачки должны были происходить на большом четырехверстном эллиптической формы кругу…*». В английском переводе «Анны Карениной» четыре версты Красносельского ипподрома превратились в три мили, но эллипс остался: “*The race course was a large three-mile ring of the form of an ellipse...”* (перевод Constance Garnett).

Толстой по каким-то своим эстетическим, вкусовым, а не формальным причинам выбрал «эллипс», а не «овал» или какое-то другой термин для описания формы Красносельского ипподрома. С другой стороны, в кабинете Каренина «*над креслом висел овальный, в золотой раме, прекрасно сделанный знаменитым художником портрет Анны*». Заметим – овальный, а не эллиптический! Это наводит на мысль, что Красносельский ипподром и вправду был устроен в виде эллипса? Но, скорее всего, для Толстого слова «овал» и «эллипс» были некими синонимами. Вернее, так. Овал – это что-то компактное (медальон, фарфоровое блюдо, зеркало или портрет на стене, стол, кабинет и т.д.), а эллипс – это что-то более грандиозное: беговая дорожка ипподрома, например, или орбита спутника планеты. А спутники на самом деле вращаются вокруг планет по эллиптическим орбитам. Или по круговым (окружность – это частный случай эллипса). Толстой как артиллерийский офицер должен был хорошо это знать.

Но оставим в стороне филологические споры и займемся делом, инженерным делом – сооружением ипподрома, разметить который на огромном Красносельском лугу можно было с помощью двух оптических дальномеров, установленных в двух фокусах будущего эллипса. В точках периметра эллипса ставят солдат, которые держат в руках шесты (вешки). Офицеры замеряют расстояния от своих фокусов до шеста, суммируют их и отдают команды солдатам, куда нужно переместит шест, чтобы разметить очередную точку эллиптической беговой дорожки. Эллипс, как известно, это геометрическое место точек на плоскости, сумма расстояний от которых до двух фокусов остается постоянной. Веха же (или вешка) — это вертикальная прямая жердь, используемая при геодезических работах для фиксирования точки на местности.

Представим себе, что Красносельский ипподром на самом деле был сделан в виде эллипса с периметром в четыре версты. Давайте рассчитаем его размеры. В задаче две неизвестные a и b (большая и малая полуоси эллипса), а уравнение у нас пока одно – уравнение длины периметра эллипса. Такая система уравнений называется недоопределенной. С такой системой мы уже имели дело – см. начало занятия. Чтобы получить не семейство решений, а одно решение, нужно иметь и второе уравнение. Давайте зададим его не с математических (инженерных) позиций, а с довольно-таки общих литературоведческих и эстетических воззрений.

Конец жизни Л.Н. Толстого пришелся на стык золотого и серебряного веков русской литературы.

Мы можем допустить, что ипподромный эллипс Толстого имел золотую или серебряную пропорцию. Вот вам и второе уравнение. Остается только вспомнить о математических формулах для периметра эллипса и для этих «металлических» пропорций! Читатель может сделать запрос в интернете и узнать много интересного о них.

Сделаем мы вычисления приближенно, учитывая тот факт, что точные формулы для расчета периметра эллипса очень сложные, включающие в себя бесконечные ряды. Но есть приближенные формулы, одну из которых (самую известную) мы будем использовать, работая в среде SMath.

На рисунке 3.7 показан расчет значений полуосей эллипса с золотой (g) и серебряной (s) пропорциями. Для решения системы уравнений используется функция `roots` (корни). В системах уравнений первое уравнение – это одна из «металлических» пропорций, а второе – это приближенная формула длины периметра эллипса. Для серебряного и золотого сечения взяты явные формулы-равенства.

Найти размеры эллипса с периметром четыре версты

Старые русские единицы длины

$$\text{сажень} := 7\ \text{фут} = 2.1336\ \text{м} \qquad \text{верста} := 500\ \text{сажень} = 1066.80\ \text{м}$$

$$L := 4\ \text{верста} = 4267.2\ \text{м}$$

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} := \text{roots}\left(\begin{bmatrix} \dfrac{a+b}{a} = \dfrac{a}{b} \\ 4 \cdot \dfrac{\pi \cdot a \cdot b + (a-b)^2}{a+b} = L \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}\right) = \blacksquare$$

$$L := \frac{L}{\text{м}} = 4267.2$$ **Лишаем переменную размерности**

Золотое сечение

$$\begin{bmatrix} a_g \\ b_g \end{bmatrix} := \text{roots}\left(\begin{bmatrix} \dfrac{a+b}{a} = \dfrac{a}{b} \\ 4 \cdot \dfrac{\pi \cdot a \cdot b + (a-b)^2}{a+b} = L \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 826.8796 \\ 511.0397 \end{bmatrix}$$

Серебрянное сечение

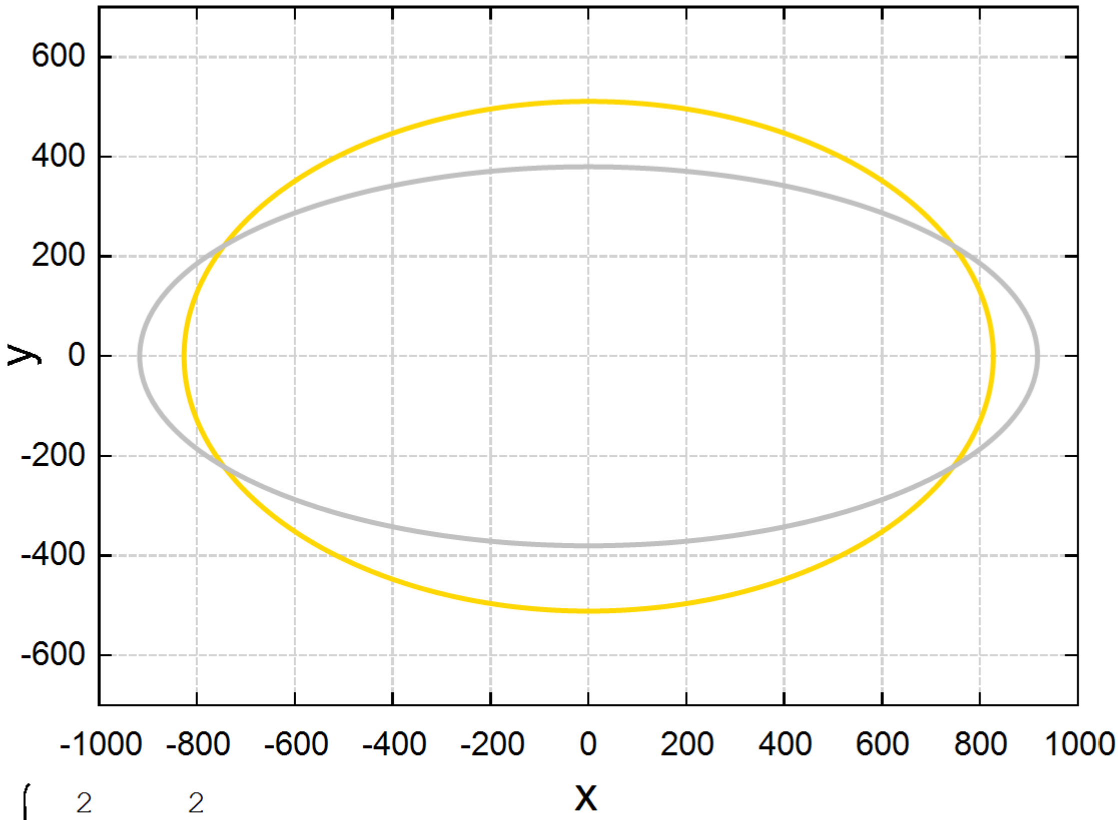
$$\begin{bmatrix} a_s \\ b_s \end{bmatrix} := \text{roots}\left(\begin{bmatrix} \dfrac{2 \cdot a+b}{a} = \dfrac{a}{b} \\ 4 \cdot \dfrac{\pi \cdot a \cdot b + (a-b)^2}{a+b} = L \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 917.4471 \\ 380.019 \end{bmatrix}$$

Рис. 3.7. Решение задачи об эллиптическом ипподроме Льва Толстого

Текстовые комментарии в овальной подсвеченной желтым рамке перед операторами решения систем уравнений вводятся через контекстное меню с позицией «Отображать описание», которое появляется при нажатии правой кнопки мыши на текущем операторе. Такие комментарии отличаются от обычных, вводимых командой меню «Вставка / Текстовая область» тем, что они будут появляться в созданном exe-файле. В текстовую же область допустимо вставлять и формулы, а также просто имена переменных с индексами соответствующей командой меню «Вставка».

Глядя на численные ответы, полученные в расчетах на рис. 3.7 (метры), трудно судить о форме эллипсов. Нужно их нарисовать – см. рис. 3.8, где показаны графики серебряного (узкого) и золотого (широгого) эллипсов.

Плоская графика, встроенная в ядро пакета SMath ("Двухмерный (2D)"), может рисовать графики функций только вида y(x)=… (см. рис. 10.3). Поэтому перед построением эллипсов нужно создать из канонического уравнения эллипса функции $y_g(x)$, $y_s(x)$ и $y_{sg}(x)$, используя оператор (кнопку) «Плюс/минус». Эллипсы у нас получились недостроенными по краям. Это является следствием несовершенной технологии построения графиков, встроенной в базовую версию SMath.



$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a_g^2} + \dfrac{y^2}{b_g^2} - 1 \\ \dfrac{x^2}{a_s^2} + \dfrac{y^2}{b_s^2} - 1 \end{cases}$$

Рис. 3.8. Графики серебряного и золотого эллипсов

Задания читателю:

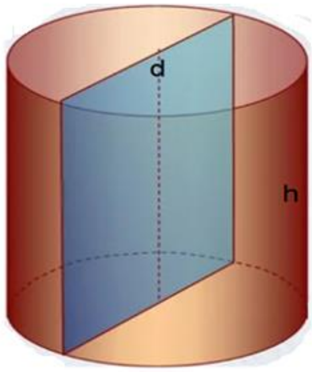
1. Определите размеры подводной лодки «Наутилус» при условии, что задан её объем (V = 1500), а площадь поверхности (S) должна быть минимальна. Нарисуйте профиль такой лодки.
2. Определите размеры подводной лодки «Наутилус» при условии, что задана площадь её поверхности (S=1000), а объем (V) должен быть максимальным. Нарисуйте профиль такой лодки.
3. Определите координаты вершин прямоугольника, в который вписана замкнутая кривая, показанная на рис. 3.5. Стороны прямоугольника необязательно должны быть параллельны и перпендикулярны осям графика, но начните решение с условием параллельности и перпендикулярности.
4. Постройте кривую на рис. 3.5 в полярных координатах.
5. Определите длину замкнутой кривой на рис. 3.5.

6. Определите площадь, охватываемую замкнутой кривой на рис. 3.5.
7. Удалите из кривой на рис. 3.5 участки, которые не подходят по соображениям разумности: матросы должны ходить подводной лодке не сгибаясь, нос и корма лодки не должны быть вдавлены в корпус ($h > 0$) и др.
8. Известно, что закрытую цилиндрическую емкость (цистерну) для хранения жидкостей разумно изготавливать так, чтобы диаметр основания цилиндра был равен его высоте. При такой пропорции площадь поверхности цистерны (площадь круглых дна и крышки плюс боковой поверхности) будет минимальна[2]. Следовательно, расход металла на изготовление такой емкости будет также минимален. На рисунке 3.9 показано аналитическое решения в среде SMath с вызовом двух функций Maple (`solve` и `simplify`) несколько усложнённой задачи: цилиндрическая ёмкость с дном и крышкой разделена на две равные части вертикальной прямоугольной перегородкой.

[2] Известно, что минимальную поверхность при заданном объеме имеет шар. Но сферическую ёмкость для хранения жидкостей изготавливать довольно сложно. Такие емкости изготавливают, как правило, только под хранение газов под давлением. Задача, кстати, может быть сформулирована и так: определите пропорции цилиндрической ёмкости, при которых её объем будет максимален при заданном значении площади наружной поверхности.
Кстати, самые распространённые металлические бочки согласно ГОСТ 13950-91 имеют такие размеры: 878 мм высота, 585 мм диаметр. Их можно увидеть на дачных участках и вспомнить поговорку «из огня в полымя». В таких бочках без верхней крышки либо хранят противопожарный запас воды, либо сжигают ветки и сухие листья. Казалось бы, что для экономии металла – для снижения цены у такой бочки диаметр должен быть равен высоте (бочка с верхней крышкой) или диаметр должен быть в два раза больше высоты (бочка без верхней крышки).

Объем цилиндра

$$h := \text{maple}\left(\text{solve}\left(V = \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot h,\ h\right)\right) \xrightarrow{} \frac{4 \cdot V}{\pi \cdot d^2} \quad (1)$$



Площадь наружной поверхности

$$S := \frac{\pi \cdot d^2}{4} + \pi \cdot d \cdot h + \frac{\pi \cdot d^2}{4} + d \cdot h \quad (2)$$

d/h - ? S = min

(3)

$$Roots := \text{maple}\left(\text{solve}\left(\frac{d}{d\,d} S,\ d\right)\right) \xrightarrow{} \begin{bmatrix} \dfrac{\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{1+\pi} \cdot \sqrt[3]{V}}{\sqrt[3]{\pi}^{\,2}} \\ \dfrac{2 \cdot \sqrt[3]{1+\pi} \cdot \sqrt[3]{V} \cdot \left(-1 + i \cdot \sqrt{3}\right)}{\sqrt[3]{4}^{\,2} \cdot \sqrt[3]{\pi}^{\,2}} \\ -\dfrac{2 \cdot \sqrt[3]{1+\pi} \cdot \sqrt[3]{V} \cdot \left(1 + i \cdot \sqrt{3}\right)}{\sqrt[3]{4}^{\,2} \cdot \sqrt[3]{\pi}^{\,2}} \end{bmatrix}$$

Выбираем первое решение из трех.

$$d_{opt} := Roots_1 \quad (4) \qquad h_{opt} := \frac{4 \cdot V}{\pi \cdot d_{opt}^{\,2}} = \frac{V \cdot \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{\pi}}{\sqrt[3]{1+\pi}^{\,2} \cdot \sqrt[3]{V}^{\,2}} \quad (5)$$

Имя этой функции не появляется в подсказке. Его нужно набирать вручную!

$$\text{maple}\left(simplify\left(\frac{d_{opt}}{h_{opt}}\right)\right) \xrightarrow{} \frac{1+\pi}{\pi} \quad (6) \qquad \frac{1+\pi}{\pi} = 1.3183 \quad (7)$$

Рис. 3.9. Аналитическое нахождение пропорций оптимального цилиндра

Над некоторыми операторами «=» решения на рис. 3.9 изображена стрелочка вправо. Это означает, что использован не оператор вывода численного значения, а оператор вывода аналитического выражения. В расчёт (рис. 3.9) введена формула (1) объема кругового цилиндра V с диаметром d и высотой h. Это уравнение сразу с помощью Maple-оператора `solve` решается аналитически по переменной h. Площадь поверхности цилиндра с учетом его круглых дна и крышки, боковой поверхности, а также прямоугольной перегородки – это формула (2) на рис. 3.9 (сумма четырех слагаемых). Эта площадь зависит от диаметра основания цилиндра при фиксированной объеме (см. формулу 1) и должна иметь минимум по d, который мы находим через поиск нулей производной (3). Нули – это значения переменной d, при которых анализируемая функция (производная функции) равна нулю. В этой точке, как известно, у гладкой непрерывной функции имеется либо минимум, либо максимум, либо точка перегиба. У нас это точка минимума, что легко проверить.

Первый корень из трех (формула 4) – это решение нашей задачи, оптимальное значение диаметра цилиндрической ёмкости. Два других корня в векторе решений мнимые. Оптимальное значение высоты цилиндрической ёмкости (5) определяется через формулу, полученную в (1). Выражения для d_{opt} и h_{opt} содержат переменную V, которая сократится при переходе к дроби d_{opt}/h_{opt}. Получено и абсолютно точное (6), и приближенное (7) решение нашей задачи. Высота цилиндра должна быть примерно на 32% выше его диаметра. Если в формуле (2) убрать четвертое слагаемое (площадь перегородки), то ответом будет единица. Если убрать и третье слагаемое (площадь круглой крышки ёмкости), то ответ станет равным ½.

Задание читателю.

Используя данный метод [4, 5] или какой-либо другой, найдите оптимальные параметры таких емкостей:

- цилиндр с полусферическим днищем и с плоской круглой крышкой[3];
- цилиндр с полусферическим днищем без верхней крышки;
- цилиндр, перегороженный наклонной эллиптической перегородкой так, чтобы вершины перегородки касались краев окружностей, образующих дно и крышку такой ёмкости;
- конус без крышки (с/без вертикальной перегородки в виде равностороннего треугольника);
- конус с крышкой (с/без вертикальной перегородки);
- конус, накрытый полусферой (с/без вертикальной перегородки);
- усеченный прямой круговой конус с диаметром малого основания вдвое меньшим, чем диаметр большого основания;
- усеченный прямой круговой конус с площадью малого основания вдвое меньшим, чем площадь большого основания;
- нижняя часть цилиндра, рассеченного плоскостью так, что она вверху проходит через край окружности, образующей крышку, а внизу – через диаметр окружности, образующей дно[4];

[3] Несложно сообразить, что если и крышка у такой емкости будет в виде полусферы, а не круга, то оптимизация такого сосуда превратит её в сферу.

[4] Здание новой необычной архитектуры может иметь форму некоего цилиндрического клина.

- верхняя часть рассеченного цилиндра, описанного выше;
- корыто, полученное следующим образом: цилиндрическую ёмкость с дном и крышкой рассекают плоскостью (рис. 3.7), на две неравные части, объемы которых находятся в пропорции один к двум (площади поверхности которых находятся в пропорции один к двум и т.д.).

Придумайте и другие подобные ёмкости с двумя параметрами для их оптимизации с ограничениями.

Задачу для начала можно упростить – свести её к плоской. Прямоугольник с минимальной длиной периметра и заданной площадью – это квадрат. А что будет, если не учитывать одну сторону квадрата (перевернутая буква П с площадью, ограниченной тремя сторонами)? А что будет, если у такой «плоской ёмкости» сделать перегородку и превратить её в букву Ш? А что будет, если… – см . выше.

Литература:

1. Верн, Жюль. Двадцать тысяч льё под водой / пер. с фр. Н. Яковлева, Е. Корш. — М.: Государственное издательство художественной литературы, 1956. — 478 с. (http://www.lib.ru/INOFANT/VERN/20000lje.txt)

2. В. Ф. Очков, Ю. С. Федоров, Ю. С. Воронова, А. Д. Моисеева. Подводная лодка «Наутилус», и новые образовательные технологии // Cloud of Science. Том 5 № 1.2018. С. 5-39 (http://www.twt.mpei.ac.ru/ochkov/Nautilus.pdf)

3. Ochkov, V., Vasileva, I., Nori, M., Orlov, K., Nikulchev, E. Symbolic computation to solving an irrational equation on based symmetric polynomials method // Computation. Volume 8, Issue 2, 1 June 2020, Article number 40 (https://www.mdpi.com/2079-3197/8/2/40)

4. В.Ф. Очков, Ю.В. Чудова, Н.А. Очкова. Академическая шапочка математика, или Гибрид символа, числа и графика в задаче оптимизации // Математика в школе. № 4. 2020 (http://www.twt.mpei.ac.ru/ochkov/Math-School-01-20.pdf)

5. Valery F. Ochkov & Yulia V. Chudova, "Academic Hats and Ice Cream: Two Optimization Problems," Journal of Humanistic Mathematics, Volume 12 Issue 2 (July 2022), pages 472-482. DOI: 10.5642/jhummath.DKUB1591. Available at: https://scholarship.claremont.edu/jhm/vol12/iss2/27