

Подводная лодка «Наутилус» и новые образовательные технологии

В.Очков

В романе Жюль Верна «20 000 лье под водой» [1] зашифровано много интересных физико-математических задач, решение которых, позволяет показать широкий спектр инструментов математических пакетов: символьная и численная математика, плоская и объемная графика, анимация, оптимизация, решение алгебраических и дифференциальных уравнений и их систем, программирование, работа с физическими величинами, ссылка на облачные функции и др. Сам же процесс решения задач романа хорошо ложится в русло (оказывается в тренде, как сейчас принято говорить) современной образовательной технологии под названием STEAM (Science, Technology, Education, Art и Mathematic), когда на одном занятии затрагиваются разные учебные дисциплины – литература, изобразительное искусство, история, математика, информатика, физика, инженерное дело, политология и др. Попутно «работа над романом» позволила выявить одну типичную ошибку символьной математики пакетов Mathcad, Maple и Mathematica.

1. Размеры подводной лодки

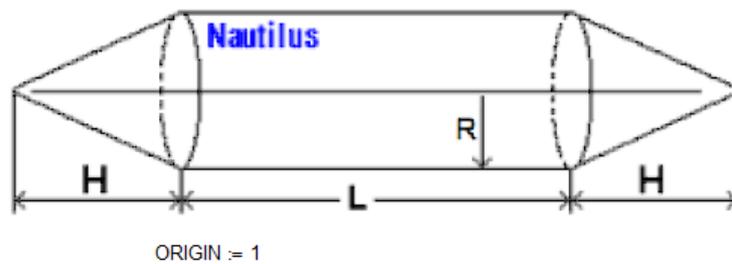
Вот цитата из оригинального французского текста романа¹: «Voici, monsieur Aronax, les diverses dimensions du bateau qui vous porte. C'est un cylindre très allongé, à bouts coniques. <...>. Ces deux dimensions vous permettent d'obtenir par un simple calcul la surface et le volume du Nautilus. Sa surface comprend mille onze mètres carrés et quarante-cinq centièmes; son volume, quinze cents mètres cubes et deux dixièmes – ce qui revient à dire qu'entièrement immergé il déplace ou pèse quinze cents mètres cubes ou tonneaux.»

Капитан Немо сообщает своему пленнику – профессору Аронаксу, что подводная лодка, на которой они находятся, имеет форму геометрического тела, составленного из двух одинаковых прямых круговых конусов (нос и корма лодки) и одного прямого кругового цилиндра (корпус лодки – см. рис. 1). Диаметры оснований конусов и цилиндра равны. Известны объем лодки V и площадь ее наружной поверхности S . Необходимо определить

¹ Мы не берем цитаты из переводов романа на русский и другие языки, опасаясь неточностей.

ее размеры – радиус основания двух конусов и цилиндра R , а также высоты конусов (длины носа и кормы) H и высоты цилиндра (длины корпуса) L .

Задача сводится к решению системы двух нелинейных алгебраических уравнений (уравнения объема $V = \dots$ и уравнения поверхности $S = \dots$) с тремя неизвестными R , H и L . Система *недоопределенная*, т.к. число уравнений меньше числа неизвестных.



Судно представляет собой сильно удлинённый цилиндр с коническими концами. Площадь его равняется одной тысяче одиннадцати и сорока пяти сотым квадратных метров, объем равен одной тысяче пятистам и двум десятым кубических метров; короче говоря, корабль, полностью погруженный в воду, вытесняет тысячу пятьсот и две десятых кубических метров, или тонн, воды.

$$LV(R, H, V) = V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot R^2 \cdot H + \pi \cdot R^2 \cdot L + \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot R^2 \cdot H \text{ solve, } L \rightarrow \frac{V - \frac{2 \cdot \pi \cdot H \cdot R^2}{3}}{\pi \cdot R^2}$$

$$LS(R, H, S) = S = \pi \cdot R \cdot \sqrt{R^2 + H^2} + 2\pi \cdot R \cdot L + \pi \cdot R \cdot \sqrt{R^2 + H^2} \text{ solve, } L \rightarrow \frac{S - 2 \cdot \pi \cdot R \cdot \sqrt{H^2 + R^2}}{2 \cdot \pi \cdot R}$$

$$H(R, V, S) = LV(R, H, V) = LS(R, H, S) \text{ solve, } H \rightarrow \left[\frac{3 \cdot (9 \cdot R \cdot S - 18 \cdot V + 2 \cdot \sqrt{9 \cdot R^2 \cdot S^2 - 20 \cdot \pi^2 \cdot R^6 - 36 \cdot R \cdot S \cdot V + 36 \cdot V^2})}{20 \cdot \pi \cdot R^2} + \frac{6 \cdot V - 3 \cdot R \cdot S}{4 \cdot \pi \cdot R^2} \right] - \frac{3 \cdot (18 \cdot V - 9 \cdot R \cdot S + 2 \cdot \sqrt{9 \cdot R^2 \cdot S^2 - 20 \cdot \pi^2 \cdot R^6 - 36 \cdot R \cdot S \cdot V + 36 \cdot V^2})}{20 \cdot \pi \cdot R^2}$$

$$V = 1500.2 \text{ m}^3 \quad S = 1011.45 \text{ m}^2 \quad R = 1 \text{ m}, 1.0001 \text{ m} \dots 13 \text{ m}$$

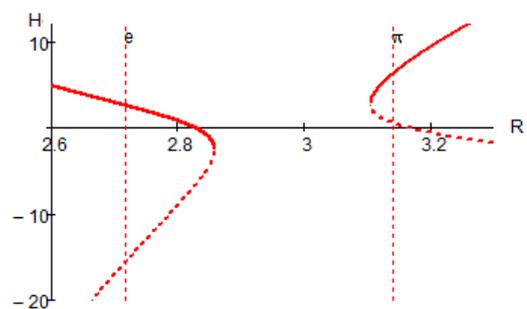
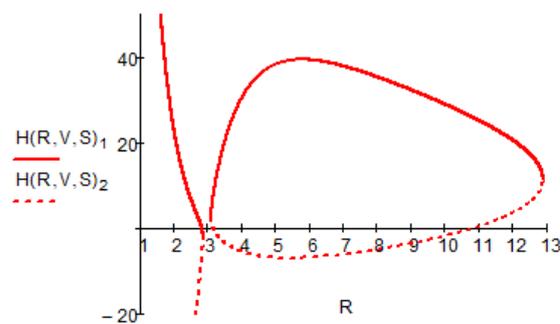


Рис. 1. Аналитическое и графическое решение задачи о размерах подводной лодки «Наутилус»

Примечание. На рисунке 1 масштабы длин для осей R и H не соблюдены. Эта недоработка будет исправлена ниже на рисунках рис. 3 и 4.

На рисунке 1 (Mathcad) можно увидеть, во-первых, схему задачи и ее описание. Далее в расчете инструментами символьной математики (оператором *solve*) генерируются две функции – одна с именем LV и с тремя аргументами R , H и V , а вторая с именем LS и с тремя аргументами R , H и S . Первая функция получается в результате аналитического

(символьного) решения² уравнения объема по переменной L , а вторая – решения уравнения поверхности по той же переменной L . Эти две функции тождественны (у подводной лодки одна длина корпуса) и образуют новое уравнение $LV(R, H, V) = LS(R, H, S)$, которое решается опять же аналитически³ относительно переменной H . В результате этого решения получились два выражения, которые формируют функцию-вектор с именем H и с тремя аргументами R, V и S . По этой функции строится график, вернее два графика (сплошная линия и пунктир) при фиксированных значениях переменных $V = 1500.2 \text{ m}^3$ и $S = 1011.45 \text{ m}^2$ (см. условие задачи) и при аргументе R , изменяющимся от 1 до 13 м с шагом 0.1 мм (левый график на рис. 1)⁴. Показана также увеличение области графиков функции-вектора $H(R, V, S)$ при изменении R от 2.6 до 3.3 м с тем же шагом (правый график на рис. 1), где проставлены вертикали для $R = 2.71$ и 3.14 м (число e и число π – «красивое» предположение: в размеры подводной лодки Наutilus могли быть заложены две главные математические константы).

Примечание. Жюль Верн по образованию был адвокатом, а не инженером. Этим можно объяснить излишнюю точность при задании объема и площади подводной лодки. Можно было бы спокойно задать $V = 1500 \text{ m}^3$ и $S = 1010 \text{ m}^2$ или даже $S = 1000 \text{ m}^2$. В научно-фантастических романах авторы нередко стараются вставить излишнюю точность, чтобы было побольше научности и поменьше фантастичности.

3. График неявной функции двух аргументов

Давайте построим графики, получающиеся при решении задачи о размерах подводной лодки, другим путем – не будем аналитически решать уравнение

$LV(R, H, V) = LS(R, H, S)$ и строить два отдельных графика по двум полученным

² Это уравнение несложно решить и в уме переносом отдельных слагаемых из правой части в левую и т.д. Но во избежание ошибок это лучше делать автоматически на компьютере. С другой стороны, всегда полезно для тренировки ума подобные аналитические выкладки делать сначала самому «вручную», а затем проверять ответ на компьютере. Это как при общении с современным телефоном, который хранит все номера в своей памяти. Но врачи рекомендуют пожилым людям держать номера и в своей голове и набирать их вручную.

³ Это уравнение уже в уме так просто не решить. Автор попросил это сделать одного преподавателя математики, который начал выполнять эту работу, исписал три листа бумаги, не довел дело до конца, но сделал вполне обоснованное предположение о причинах ошибки символьной математики, которую мы рассмотрим ниже.

⁴ Математические пакеты строят графики «явной» функции $y(x)$, табулируя значения аргумента и функции и соединяя полученные точки прямыми линиями или сглаживая их некой кривой. Если студент на занятиях по математическому анализу начнет так строить графики, то преподаватель выгонит такого студента с занятий, топая ногами и улюлюкая вслед студенту. Мы обычно строим подобные графики более интеллигентно, качественно, а не количественно: анализируем функцию [2], ищем у ней особые точки – нули, экстремумы, точки перегиба, асимптоты, точки разрыва и проч. Поэтому-то многие преподаватели математики в школе и в вузах вполне обосновано считают, что машинная аналитика и графика отупляет студентов, отучает их работать головой...

выражениям (см. сплошную и пунктирную линии на рис.1), а построим один график этой неявной функции для разных R и H и фиксированных V и S .

В среде Mathcad (см. рис. 1 и 2) нет встроенных средств для рисования графика функции двух аргументов, заданной в неявном виде. Но такие средства есть в среде Maple – см. рис. 3, где задействована встроенная функция *implicitplot* (неявный график), которая нарисовала только одну замкнутую кривую⁵. А куда девалась вторая (левая) кривая, показанная на рис. 1?

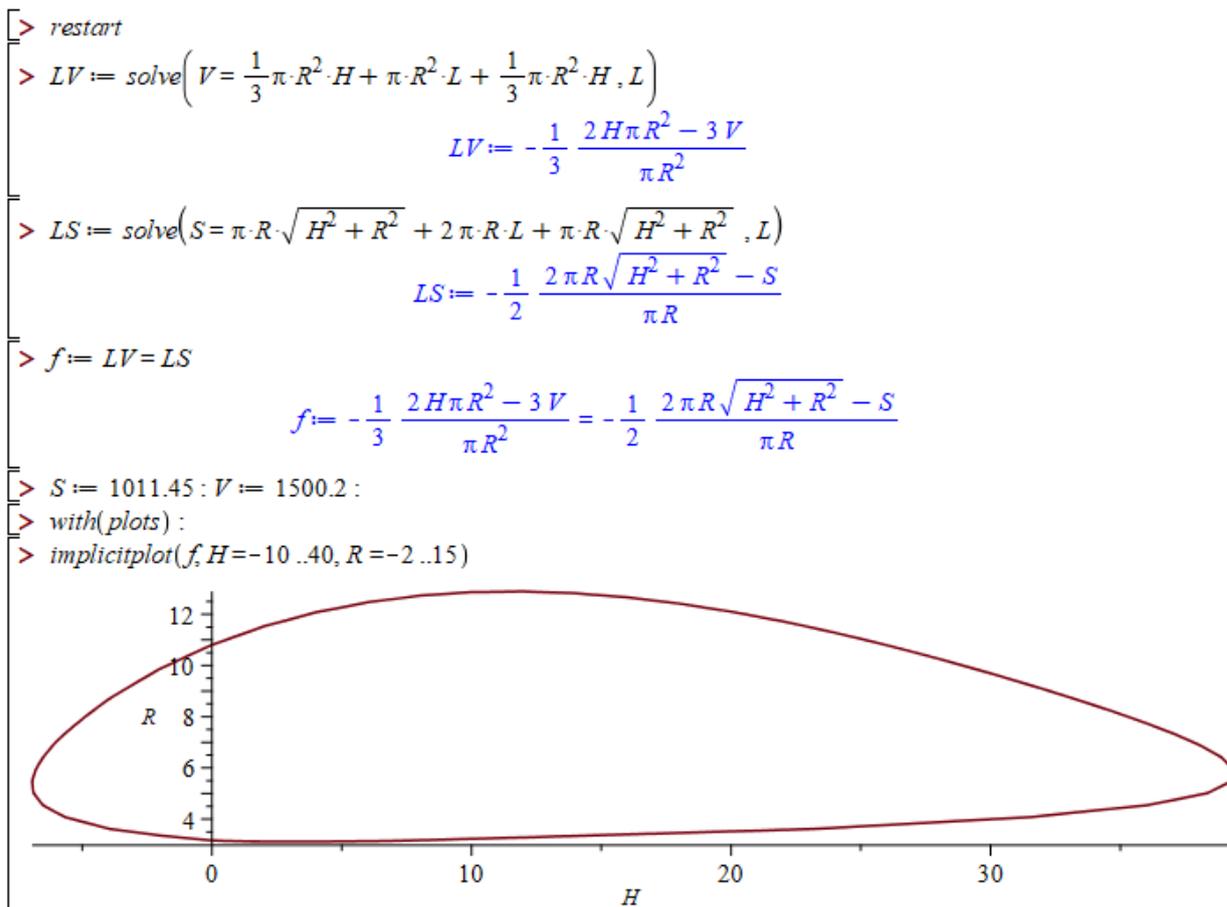


Рис. 3. Построение графика неявной функции двух аргументов в среде Maple

В советское время была радиопередача «Разучим песню». Ведущий там часто говорил: «А теперь давайте прослушаем мелодию песни на другом музыкальном инструменте!». Давайте и мы построим наш график с помощью другого «инструмента», другого математического пакета!

⁵ График неявной функции двух аргументов простым табулированием (см. сноску 4) уже не построишь. При построении таких кривых используются особые сложные численные алгоритмы, не использующие символьное решение уравнения.

$$\approx(a, b) := \left| \frac{a - b}{a + b} \right| < 0.0001$$

$$n := 7000 \quad R_1 := -1\text{m} \quad R_2 := 15\text{m} \quad \Delta R := \frac{R_2 - R_1}{n} \quad H_1 := -10\text{m} \quad H_2 := 60\text{m} \quad \Delta H := \frac{H_2 - H_1}{n}$$

```

(vR)
(vH) := | i ← ORIGIN
        | for R ∈ R1, R1 + ΔR.. R2
        |   for H ∈ H1, H1 + ΔH.. H2
        |     if LV(R, H, V) ≈ LS(R, H, S)
        |       | vRi ← R
        |       | vHi ← H
        |       | i ← i + 1
(vR)
(vH)

```

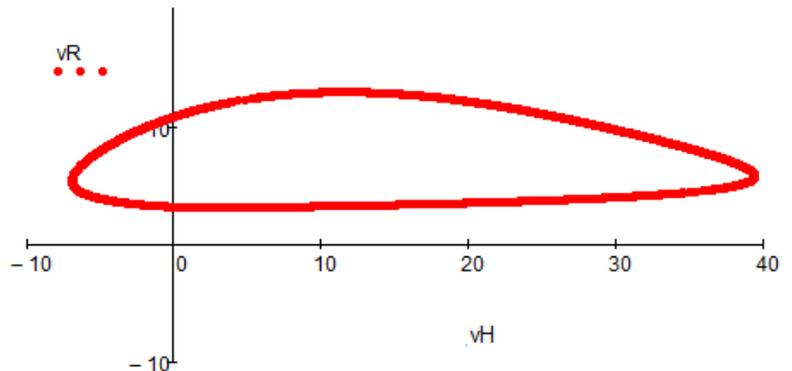


Рис. 4. Построение графика неявной функции в среде Mathcad

В среде Mathcad график неявной функции так просто построить, повторим, нельзя. Но если «нельзя, но очень хочется, то можно». На рисунке 4 показано построение такого графика сканированием прямоугольной области на декартовой плоскости. Если в очередной точке значение функции LV будет *примерно* равно значению функции LS , то координаты этой точки запоминаются (складируются) в векторах vR и vH , которые затем отображаются на декартовом графике. Так (рис. 3) или иначе (рис 4), но второй кривой, полученной в результате аналитического решения уравнения $LV(R, H, V) = LS(R, H, S)$, на графиках неявной функции не оказалось.

Кстати, такую же ошибку с «левой» кривой выдал и математический пакет Mathematica, вернее, ее сетевой вариант – сайт wolframalpha.com.

2. Ошибка символьной математики

Что это за ошибка символьной математики? Чистая ошибка или какая-то особенность этого компьютерного инструмента, заставляющая пользователей быть начеку и каждый раз проверять аналитические решения?

На рисунке 2 показан расчет размеров подводной лодки «Наутилус» (значений переменных H и L) при двух значениях ее радиуса R , зафиксированных на правом (увеличенном) графике. Ведется также проверка значений объема подводной лодки V и ее наружной поверхности S . При $R = 3.14$ m (число π) лодка имеет такие размеры: $H = 6.277$ или 0.525 m и $L = 44.248$ или 48.083 m, при которых оба уравнения – уравнение объема и уравнение поверхности лодки превращаются в тождества. Но при значении $R = 2.71$ m (число e)

выдается неверное решение – уравнение по площади сечения превращается в тождество, а уравнение по объему – нет (см. подсвеченный оператор на рис. 2)! В чем тут дело?

$$\begin{aligned}
 r &:= 3.14\text{m} & h &:= H(r, V, S) = \begin{pmatrix} 6.277 \\ 0.525 \end{pmatrix} \text{m} & l &:= LV(r, h, V) = \begin{pmatrix} 44.248 \\ 48.083 \end{pmatrix} \text{m} & l &:= LS(r, h, S) = \begin{pmatrix} 44.248 \\ 48.083 \end{pmatrix} \text{m} \\
 \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h + \pi \cdot r^2 l + \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h &= \begin{pmatrix} 1500.2 \\ 1500.2 \end{pmatrix} \cdot \text{m}^3 & \pi \cdot r \cdot \sqrt{r^2 + h^2} + 2\pi \cdot r l + \pi \cdot r \cdot \sqrt{r^2 + h^2} &= \begin{pmatrix} 1011.45 \\ 1011.45 \end{pmatrix} \text{m}^2 \\
 r &:= 2.71\text{m} & h &:= H(r, V, S) = \begin{pmatrix} 2.697 \\ -16.187 \end{pmatrix} \text{m} & l &:= LV(r, h, V) = \begin{pmatrix} 63.224 \\ 75.813 \end{pmatrix} \text{m} & l &:= LS(r, h, S) = \begin{pmatrix} 55.578 \\ 42.989 \end{pmatrix} \text{m} \\
 \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h + \pi \cdot r^2 l + \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h &= \begin{pmatrix} 1323.786 \\ 742.88 \end{pmatrix} \cdot \text{m}^3 & \pi \cdot r \cdot \sqrt{r^2 + h^2} + 2\pi \cdot r l + \pi \cdot r \cdot \sqrt{r^2 + h^2} &= \begin{pmatrix} 1011.45 \\ 1011.45 \end{pmatrix} \text{m}^2
 \end{aligned}$$

Рис. 2. Верификация решения, полученного аналитическим и численным способом (см. рис. 1)

Как предположил математик, упомянутый в сноске 3, эта ошибка, по-видимому, состоит в следующем. Движок символьной математики всех перечисленных математических пакетов подстановкой одного выражения вместо другого сводит решение сложного алгебраического уравнения к решению простого квадратного уравнения, у которого два корня, один из которых правильный, а второй ложный. Вернее, так. Два выражения, полученные в результате символьного решения уравнения $LV(R, H, V) = LS(R, H, S)$, при одних значениях R выдают правильные значения H , а при других неверные. Можно сказать, что левая кривая, показанная на рис. 1, оказалась «левой» не только по своему местоположению, но и по своей сути!

Считается, что символьная математика компьютерных пакетов выдает либо абсолютно точный ответ, либо не выдает ничего, вернее, выдает сообщение, что ответ не найден. Тут приходится прибегать к численной математике – к математике приближенных вычислений. Но, как показал вышеприведенный пример, символьная математика может выдавать и неверные ответы.

4. Оператор «Примерно равно»

В среде Mathcad и в других математических пакетах, а также в языках программирования нет очень востребованного оператора «примерно равно»⁶. Поэтому его пришлось создать

⁶ В среде Mathcad есть *шесть* традиционных инфиксных операторов сравнения: *равно*, *не равно*, *больше*, *меньше*, *больше или равно* и *меньше или равно*. Но «бог любит не только троицу», но и *семерку*. Вспомним семь цветов радуги, семь нот, семь чудес света, семь древних мудрецов и т.д. до семи дней в неделе. В аббревиатуру STEAM, которую мы расшифровали в самом начале статьи, не хватает буквы R – Religion. А

– см. первый оператор в расчете на рис. 4. В программе с двумя циклами, один из которых вложен в другой, этот пользовательский оператор вызывается в виде инфиксного оператора, что существенно помогает чтению и пониманию расчета человеком. А это один из «коньков» пакета Mathcad, во многом определивших его популярность.

5. Снова о размерах «Наутилуса»

В романе Жюль Верна, кстати, есть прямое указание на размеры «Наутилуса» – максимальный диаметр лодки равен восьми метрам и длина семидесяти метрам. Расчеты, показанные на рис. 5, с определенной точностью (полметра) подтверждают это.

$$\begin{aligned}
 r &:= 4\text{ m} & h &:= H(r, V, S)_1 = 30.411\text{ m} & l &:= LV(r, h, V) = 9.572\text{ m} & l &:= LS(r, h, S) = 9.572\text{ m} \\
 \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h + \pi \cdot r^2 \cdot l + \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h &= 1500.2 \cdot \text{m}^3 & \pi \cdot r \cdot \sqrt{r^2 + h^2} + 2\pi \cdot r \cdot l + \pi \cdot r \cdot \sqrt{r^2 + h^2} &= 1011.45 \text{ m}^2 \\
 h + l + h &= 70.393\text{ m}
 \end{aligned}$$

Рис. 5. Проверка расчетов размеров подводной лодки, приведенных в романе

Можно попытаться данные о лодке, приведенные в романе и принятые в расчете на рис. 5, проверить и другим путем – составить систему трех уравнений (объем лодки, ее поверхность и общая длина) и двумя неизвестными H (длина носа и кормы) и L (длина цилиндрической части лодки). Если наша начальная система уравнений (см. рис. 1) была *недоопределенной* (два уравнения с тремя неизвестными), то новая система уравнений (рис. 6) будет *переопределенной* (три уравнения с двумя неизвестными).

религия по-прежнему играет большую роль в нашей жизни. Конкретный пример. Если семь цветов радуги – это физика, то семь дней недели – это чистая религия.

Оператор «примерно рано» очень востребован в численной математике. Поэтому неплохо бы сделать его встроенным – седьмым. Правда, этот оператор зависит от нашего представления о том, что это такое «примерно равно». Кстати, в математическом анализе есть и понятия «намного больше >>», «намного меньше <<» и т.д., которые также контекстно зависимы.

$$\Sigma L := 70\text{m} \quad R := 4\text{m} \quad S := 1011.45\text{m}^2 \quad V := 1500.2\text{m}^3$$

Given

$$H := 10\text{m} \quad L := \Sigma L - H - H = 50\text{m}$$

$$\Sigma L = H + L + H$$

$$S = \pi \cdot R \cdot \sqrt{R^2 + H^2} + 2\pi \cdot R \cdot L + \pi \cdot R \cdot \sqrt{R^2 + H^2}$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot R^2 \cdot H + \pi \cdot R^2 \cdot L + \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot R^2 \cdot H$$

$$\begin{pmatrix} H \\ L \end{pmatrix} := \text{Find}(H, L) = \text{No solution}$$

Рис. 6. Попытка численного решения переопределенной системы уравнений

Попытка решить переопределенную систему уравнений (рис. 6) оказалась неудачной. Встроенная в Mathcad функция Find не нашла численных значений неизвестных H и L, превращающих три уравнения в три тождества. Вернее, почти в тождества, когда правые и левые части уравнений отличаются друг от друга на заданную малую величину, хранящуюся в системной переменной STOL (0.001 по умолчанию).

Уравнения и системы уравнений можно решать символьно (рис. 1), численно (рис. 8 ниже) и (бог любит троицу) графически. На рисунке 7 показано такое графическое решение с использованием уже описанного нами программного сканирования прямоугольной области. Если бы корень переопределенной системы трех уравнений с двумя неизвестными был бы найден, то три линии на графике пересеклись бы в одной точке. Почти в одной точке, если вспомнить о другом названии численной математики – математика приближенных вычислений.

$$\approx(a, b) := \left| \frac{a - b}{a + b} \right| < 0.00001 \quad \text{Or}(a) := \max(a)$$

$$n := 1000 \quad H_1 := 29\text{m} \quad H_2 := 31\text{m} \quad \Delta H := \frac{H_2 - H_1}{n}$$

$$L_1 := 9\text{m} \quad L_2 := 10.5\text{m} \quad \Delta L := \frac{L_2 - L_1}{n}$$

$$\begin{pmatrix} vL \\ vH \end{pmatrix} := \begin{array}{l} i \leftarrow \text{ORIGIN} \\ \text{for } L \in L_1, L_1 + \Delta L \dots L_2 \\ \quad \text{for } H \in H_1, H_1 + \Delta H \dots H_2 \\ \quad \quad \left[\begin{array}{l} \Sigma L \approx \left(H + \frac{S - 2 \cdot \pi \cdot R \cdot \sqrt{H^2 + R^2}}{2 \cdot \pi \cdot R} + H \right) \\ \text{if Or} \left[\begin{array}{l} V \approx \left(\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot R^2 \cdot H + \pi \cdot R^2 \cdot L + \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot R^2 \cdot H \right) \\ S \approx \left(\pi \cdot R \cdot \sqrt{R^2 + H^2} + 2\pi \cdot R \cdot L + \pi \cdot R \cdot \sqrt{R^2 + H^2} \right) \end{array} \right] \\ vL_i \leftarrow L \\ vH_i \leftarrow H \\ i \leftarrow i + 1 \end{array} \right. \end{array}$$

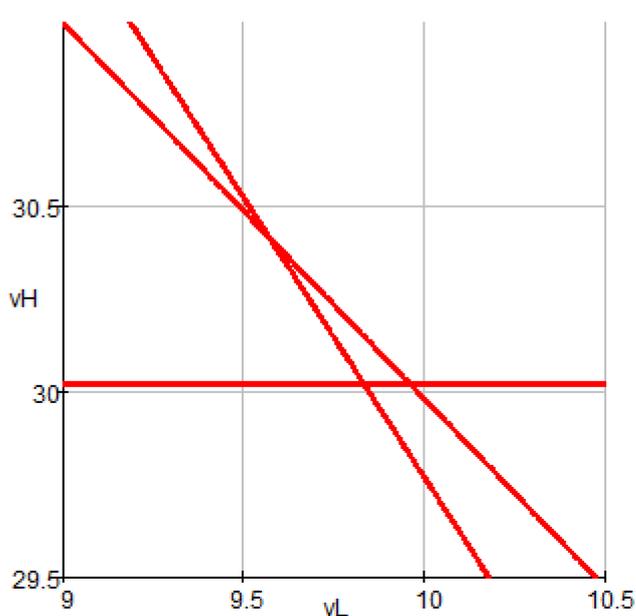


Рис. 7. Графическое решение переопределенной системы уравнений

Примечание. В расчет, показанный на рис. 7, вводится не только пользовательская функция «примерно равно» (см. выше), но и пользовательская функция Or (логическое сложение). В среде Mathcad есть такой встроенный инфиксный оператор, имеющий символ \vee , но у него только два аргумента. Кроме того, его нередко путают с символом \wedge (логическое умножение). Поэтому-то нами и была введена в обиход функция Or, у

которой может быть более двух аргументов. Более того, пользовательская функция Og в отличие от встроенного оператора \vee правильно работает с *нечеткой логикой*, когда аргументами могут быть не только целочисленные (четкие) значения 0 (ложь) или 1 (истина), но и нецелые («нечеткие») числа в диапазоне от 0 до 1.

6. Гибридная математика: число и символ

Для случая, отмеченного на рис. 6 и 7, в среде Mathcad предусмотрена встроенная функция с именем MinErr (Minimal Error – минимальная ошибка – см. рис. 8), которая при отсутствии решения возвращает не сообщение об ошибке (см. текст под функцией Find на рис. 6), а значения своих аргументов, при которых система уравнений будет наиболее близка к системе тождеств. Найденное решение после проверки (Verify) оказалось вполне приемлемым – отвечающим цифрам, приведенным в романе и попадающим в треугольник, показанный на рис. 7.

$$S = \pi \cdot R \cdot \sqrt{R^2 + H^2} + 2\pi \cdot R \cdot L + \pi \cdot R \cdot \sqrt{R^2 + H^2} \text{ solve , } L \rightarrow \frac{S - 2 \cdot \pi \cdot R \cdot \sqrt{H^2 + R^2}}{2 \cdot \pi \cdot R}$$

$$\Sigma L := 70\text{m} \quad R := 4\text{m} \quad S := 1011.45\text{m}^2 \quad V := 1500.2\text{m}^3$$

Given

$$H := 70\text{m}$$

$$\Sigma L = H + \frac{S - 2 \cdot \pi \cdot R \cdot \sqrt{H^2 + R^2}}{2 \cdot \pi \cdot R} + H$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot R^2 \cdot H + \pi \cdot R^2 \cdot \frac{S - 2 \cdot \pi \cdot R \cdot \sqrt{H^2 + R^2}}{2 \cdot \pi \cdot R} + \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot R^2 \cdot H$$

$$H := \text{MinErr}(H) = 30.41\text{m}$$

$$L := \frac{S - 2 \cdot \pi \cdot R \cdot \sqrt{H^2 + R^2}}{2 \cdot \pi \cdot R} = 9.572\text{m}$$

Verify

$$\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot R^2 \cdot H + \pi \cdot R^2 \cdot L + \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot R^2 \cdot H = 1500.202 \cdot \text{m}^3$$

$$\pi \cdot R \cdot \sqrt{R^2 + H^2} + 2\pi \cdot R \cdot L + \pi \cdot R \cdot \sqrt{R^2 + H^2} = 1011.45\text{m}^2$$

$$H + L + H = 70.393\text{m}$$

Рис. 8. Гибридное решения переопределенной системы уравнений

Примечание. В расчете на рисунке 8 *гибридно* используются аналитические (символьные) и численные методы решения задачи [3]. Сначала *символьно* решается уравнение площади поверхности лодки относительно переменной L , а затем полученное выражение подставляется в систему уравнений, которое решается *численно* с опорой на первое предположение. Этот прием позволяет уменьшить число уравнений с трех до двух, а число неизвестных с двух до одного. Это ускоряет расчет, но делает его более трудным для понимания в образовательном процессе. Поэтому можно оставить и три уравнения, с которыми все более-менее ясно.

7. Анимация

Пакет Mathcad имеет средства *анимации*. На рисунке 9 показан кадр анимации изменения контура подлодки «Наутилус» (два треугольника от конусов носа и кормы и один прямоугольник от цилиндра корпуса) при изменении радиуса ее цилиндрической части. В нижней части кадра анимации показан рисунок, «выуженный» из Интернета и отображающий попытку реального проектирования подводной лодки. Кстати, в том же Интернете есть много рисунков, иллюстрирующих роман Жюль Верна, но по которым довольно трудно судить о размерах «Наутилуса».

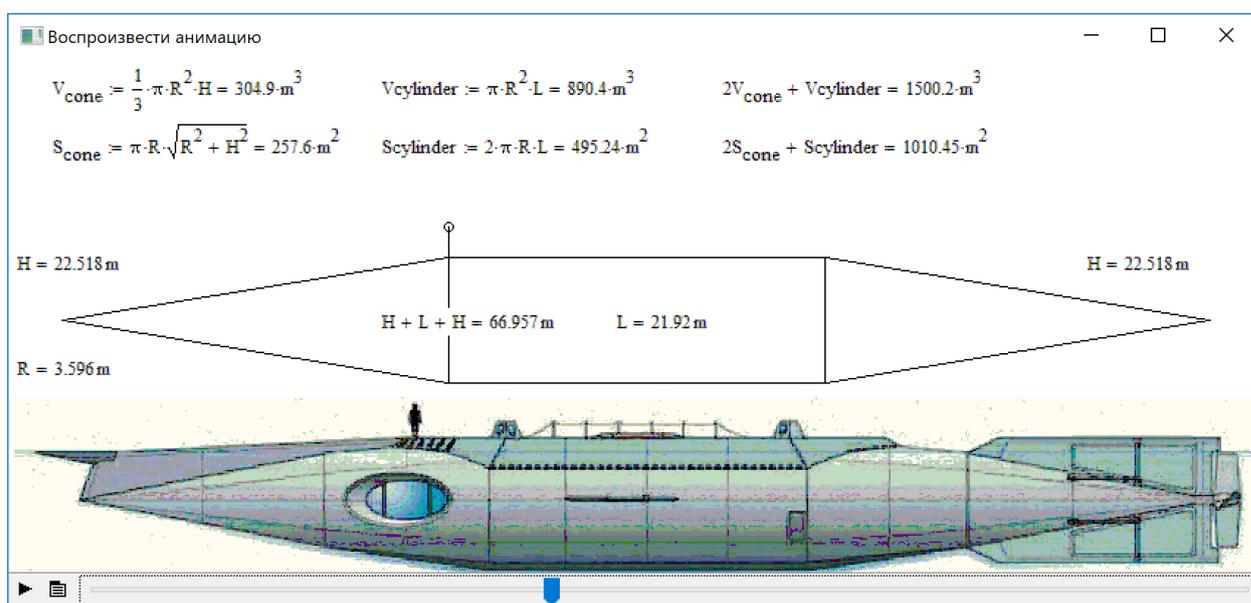


Рис. 9. Анимация изменения контуров подводной лодки в зависимости от радиуса ее цилиндрической части

Данную анимацию можно увидеть на сайте <https://community.ptc.com/t5/PTC-Mathcad-Questions/Symbol-math-error/td-p/487278>. Там же можно скачать соответствующие файлы.

8. Оптимизация

В пакет Mathcad вшиты средства *оптимизации*, которые также можно испытать на задаче о подводной лодке «Наутилус» – см. рис. 10 и 11.

На рисунке 10 показано, как можно найти размеры лодки, если задан ее объем $V = 1500.2 \text{ m}^3$, а площадь поверхности S должна быть минимальной. В расчете для решения задействована встроенная в Mathcad функция *Minimize*, которая минимизирует заданную целевую функцию S , изменяя значения аргументов R , H и L от точки начального предположения ($R = H = L = 10 \text{ m}$) и выполняя ограничения по объему.

$$V \equiv 1500.2 \text{ m}^3$$

$$S(R, H, L) := \pi \cdot R \cdot \sqrt{R^2 + H^2} + 2\pi \cdot RL + \pi \cdot R \cdot \sqrt{R^2 + H^2}$$

Given

$$\begin{pmatrix} R \\ H \\ L \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix} \text{ m}$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot R^2 \cdot H + \pi \cdot R^2 L + \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot R^2 \cdot H$$

$$\begin{pmatrix} R \\ H \\ L \end{pmatrix} := \text{Minimize}(S, R, H, L) = \begin{pmatrix} 6.842 \\ 6.126 \\ 6.117 \end{pmatrix} \text{ m}$$

Verify

$$\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot R^2 \cdot H + \pi \cdot R^2 L + \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot R^2 \cdot H = 1500.199 \cdot \text{m}^3$$

$$\pi \cdot R \cdot \sqrt{R^2 + H^2} + 2\pi \cdot RL + \pi \cdot R \cdot \sqrt{R^2 + H^2} = 657.762 \text{ m}^2$$

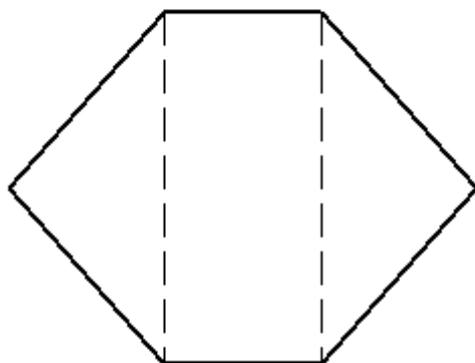


Рис. 10. Минимизация наружной поверхности подводной лодки

В нижней части рисунка 10 показан контур оптимизированной по площади наружной поверхности лодки, которая стала похожа на батискаф с внутренним объемом 1500.2 m^3 .

Известно, что наименьшую поверхность при заданном объеме имеет сфера. Поэтому-то контур подводного аппарата, показанный на рис. 10, приблизился к окружности – к сечению сферы. Сфера, кстати, говоря имеет и наилучшие прочностные свойства для погружных аппаратов, чьи обитаемые отсеки выполнены именно в виде сферы (батисферы).

На рисунке 11 решается задача о *максимизации* объема V подводной лодки с заданной площадью поверхности S . Тут также задействованы гибридные моменты (использование символьной и численной математики – см. 8), которые позволили снизить число оптимизирующих параметров с трех (рис. 10) до двух (рис. 11). Этот прием позволил также проверить правильность поиска максимума графически – линиями уровня функции двух аргументов с фиксацией найденного оптимального значения.

$$S = \pi \cdot R \cdot \sqrt{R^2 + H^2} + 2\pi \cdot R \cdot L + \pi \cdot R \cdot \sqrt{R^2 + H^2} \text{ solve, } L \rightarrow \frac{S - 2 \cdot \pi \cdot R \cdot \sqrt{H^2 + R^2}}{2 \cdot \pi \cdot R}$$

$$S := 1011.45 \text{ m}^2$$

$$V(R, H) := \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot R^2 \cdot H + \pi \cdot R^2 \cdot \frac{S - 2 \cdot \pi \cdot R \cdot \sqrt{H^2 + R^2}}{2 \cdot \pi \cdot R} + \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot R^2 \cdot H$$

Given

$$\begin{pmatrix} R \\ H \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \end{pmatrix} \text{ m}$$

$$S = \pi \cdot R \cdot \sqrt{R^2 + H^2} + 2\pi \cdot R \cdot \frac{S - 2 \cdot \pi \cdot R \cdot \sqrt{H^2 + R^2}}{2 \cdot \pi \cdot R} + \pi \cdot R \cdot \sqrt{R^2 + H^2}$$

$$\begin{pmatrix} R \\ H \end{pmatrix} := \text{Maximize}(V, R, H) = \begin{pmatrix} 8.485 \\ 7.589 \end{pmatrix} \text{ m}$$

$$L := \frac{S - 2 \cdot \pi \cdot R \cdot \sqrt{H^2 + R^2}}{2 \cdot \pi \cdot R} = 7.589 \text{ m}$$

Verify

$$\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot R^2 \cdot H + \pi \cdot R^2 \cdot L + \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot R^2 \cdot H = 2860.638 \cdot \text{m}^3$$

$$\pi \cdot R \cdot \sqrt{R^2 + H^2} + 2\pi \cdot R \cdot L + \pi \cdot R \cdot \sqrt{R^2 + H^2} = 1011.45 \text{ m}^2$$

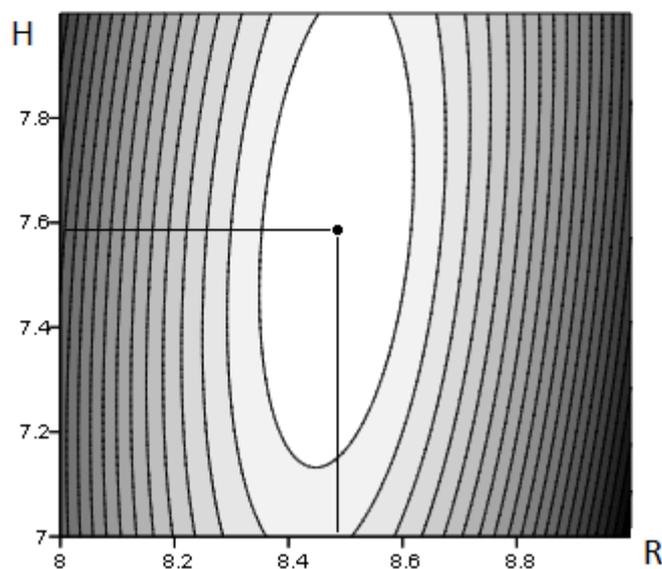


Рис. 11. Максимизация объема подводной лодки

9. Неявная функция трех аргументов

На рисунке 12 показана поверхность неявной функции уже трех аргументов, которую также можно связать с романом Жюль Верна. Если предположить, что длины конических

частей подводной лодки «Наутилус» (ее носа и кормы) разные (мы имеем не одну переменную H , а две переменные H_1 и H_2), то можно построить в среде Maple замкнутую поверхность (рис. 12), которая напоминает и некую футуристическую подводную лодку, и некий воздушный летательный аппарат в виде треугольного крыла. Одно из сечений этого воздухоплавательного аппарата показано на рисунка 3 (Maple) и 4 (Mathcad). Мы имеем и вправду крыло с подъемной силой, которую очень хочется подсчитать, опираясь на законы газодинамики. В этом контуре можно также узреть силуэт некоего биологического объекта – кита, например, – живого хозяина океанских глубин...

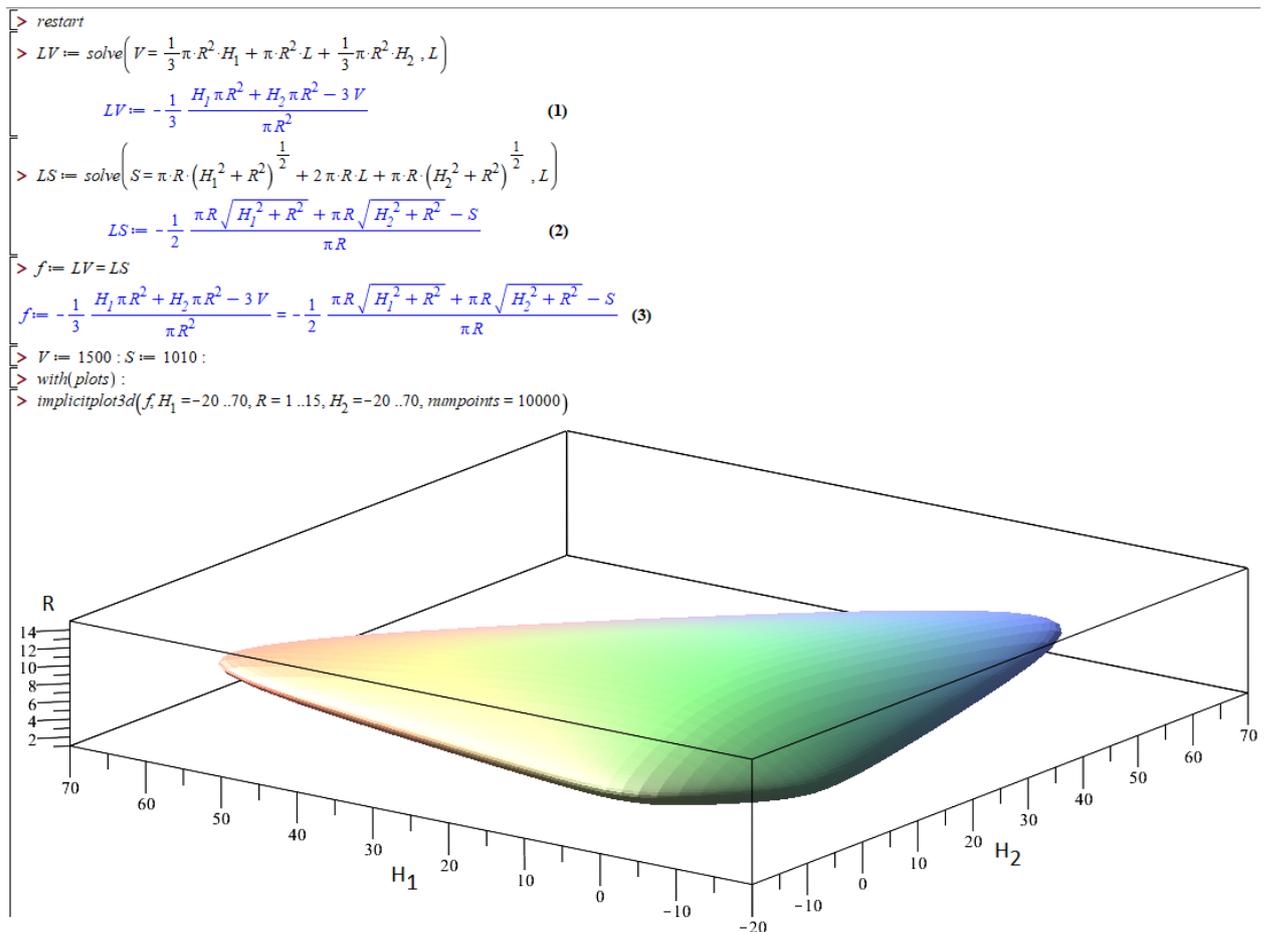


Рис. 12. Построение графика неявной функции трех аргументов в среде Maple

Примечание. На замкнутой поверхности, показанной на рис. 12, видны некие плоские треугольники и ромбы, из которых составлена поверхность и которые «выдают» суть этой численной графической операции. Эти плоские элементы будут четко просматриваться, если в опциях функции *implicitplot3d* изменить значение системной переменной *numpoints* с 10 000 до 1 000 или даже 100. Если же это значение увеличить до 1 000 000, например, то будет построена гладкая поверхность после... нескольких минут работы компьютера. Многие пользователи тут начинают думать, что компьютер «завис», и перегружают его. А

другие пользователи понимают суть дела и... переходят к работе на более мощном компьютере – на графической станции.

На сайте <https://community.ptc.com/t5/PTC-Mathcad-Questions/3D-body-plot/td-p/487467> можно увидеть попытки построения в среде Mathcad трехмерных моделей подводной лодки «Наутилус» по рассчитанным ранее его размерам с использованием простого сканирования или более сложных параметрических графических инструментов.

10. Погружение и всплытие

В диалогах капитана Немо и профессора Аронакса также затрагиваются технические вопросы погружения подводной лодки и ее всплытия. Вот отрывок из романа: «Двойная обшивка корабля изготовлена из листовой стали, удельный вес которой равен семи и восемь десятых. Толщина наружной обшивки не менее пяти сантиметров, вес триста девяносто четыре и девяносто шесть сотых тонны. Внутренняя обшивка, киль - в высоту пятьдесят сантиметров и в ширину двадцать пять сантиметров, весом шестьдесят две тонны, - машины, балласт и прочее оборудование, обстановка, внутренние переборки и пилерсы - все это вместе взятое весит девятьсот шестьдесят одну и шестьдесят две сотых тонны. Таким образом общий вес судна составляет одну тысячу триста пятьдесят шесть и сорок восемь сотых тонны... <...> ...находясь на поверхности океана, "Наутилус" при этих условиях выступает над поверхностью воды на одну десятую. Следовательно, желая полностью погрузить "Наутилус" в воду, необходимо располагать резервуарами, емкостью равными этой десятой доле его объема, иными словами, способными вмещать в себя сто пятьдесят и семьдесят две сотых тонны воды. В последнем случае вес судна составил бы одну тысячу пятьсот семь тонн, и оно совершенно ушло бы под воду. Так и есть в действительности, господин профессор! Такие резервуары имеются в трюме "Наутилуса". Стоит открыть краны, как они наполняются водой, и корабль погружается в море в уровень с поверхностью воды!»

Давайте смоделируем динамику погружение в воду и последующее всплытие на поверхность воды. А подводной лодке «Наутилус» приходилось это делать довольно часто. Автор романа не предусмотрел наличие на борту лодки систем регенерации воздуха – удаление из него углекислого газа и водяного пара, образуемых при дыхании человека, и обогащение воздуха кислородом⁷. Поэтому судну приходилось примерно каждые пять дней

⁷ Одна из проблем, с которой столкнулись инженеры и ученые, осуществившие стыковку советского «Союза» и американского «Аполлона», состояла в следующем. Обитаемый отсек нашего космического

всплывать на поверхность для вентиляции помещений. А там еще, судя по тексту романа, Немо и Аронакс еще и курили дорогие сигары, обсуждая между затяжками, особенности конструкции лодки и другие инженерные моменты...

Примечание. Тут можно на уроке в рамках образовательной технологии STEAM затронуть и химию. В частности, описать реакции и технологии генерации кислорода из воды и из углекислого газа в их термодинамике [4] и кинематике [5].

На рисунке 13 показан Mathcad-расчет такой гидростатической и динамической модели. С высоты 10 m в воду прыгает ныряльщик. Прыгает стилем «бомбочка»: модель ныряльщика – это сфера радиусом $r = 30$ cm и плотностью $\rho_{\text{man}} = 950$ kg/m³. По этим двум числам рассчитывается объем «ныряльщика» (volume), его масса (mass) и площадь сечения (area). Вводится функция–ступенька $\rho(h)$ – зависимость плотности среды от точки нахождения ныряльщика: $h > 0$ – воздух, $h \leq 0$ – вода. Точка начала координат находится у подножия десятиметровой вышки на уровне воды.

На «ныряльщика» действуют три силы: сила тяжести, сила сопротивления среды и архимедова сила. Сила трения раскладывается по горизонтали и вертикали, две другие силы действуют только по вертикали. Суммы этих сил по двум осям равны произведению массы на ускорение, вернее, на проекции ускорения по двум осям. В блоке решателя Mathcad – между ключевым словом **Given** и функцией **Odesolve** записаны также начальные условия (местоположение «ныряльщика» и его начальная скорость опять же в двух направлениях и то, что скорость – это первая производная пути во времени).

аппарата был заполнен воздухом (смесью азота и кислорода), а американского – чистым кислородом. Эти два технические решения имеют свои плюсы и минусы. В частности, работа с чистым кислородом более пожароопасна, но требует более простых и компактных установок регенерации.

$$r := 30\text{cm} \quad \rho_{\text{man}} := 950 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \quad \text{volume} := \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 = 0.113 \cdot \text{m}^3$$

$$\text{mass} := \text{volume} \cdot \rho_{\text{man}} = 107.442 \cdot \text{kg} \quad \text{area} := \pi \cdot r^2 = 0.283 \cdot \text{m}^2$$

$$h := 10\text{m} \quad y_0 := 0\text{m} \quad vx_0 := 3 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad vy_0 := 1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\rho(h) := \text{if} \left(h > 0, 1.225 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}, 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right) \quad k := 1 \quad t_{\text{end}} := 30\text{s}$$

Given

$$vx(t) = x'(t) \quad vy(t) = y'(t) \quad vx(0\text{s}) = vx_0 \quad vy(0\text{s}) = vy_0$$

$$x(0\text{s}) = 0 \quad y(0\text{s}) = h$$

$$\text{mass} \cdot vx'(t) = -k \cdot \rho(y(t)) \cdot \text{area} \cdot vx(t)^2 \cdot \text{sign}(vx(t))$$

$$\text{mass} \cdot vy'(t) = g \cdot \text{volume} \cdot \rho(y(t)) - k \cdot \rho(y(t)) \cdot \text{area} \cdot vy(t)^2 \cdot \text{sign}(vy(t)) - g \cdot \text{mass}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ vx \\ y \\ vy \end{pmatrix} := \text{Odesolve} \left[\begin{pmatrix} x \\ vx \\ y \\ vy \end{pmatrix}, t, t_{\text{end}} \right] \quad t := 0\text{s}, \frac{t_{\text{end}}}{10000} .. t_{\text{end}}$$

Рис. 13. Численное решение системы дифференциальных уравнений погружения в воду и всплытия на поверхность

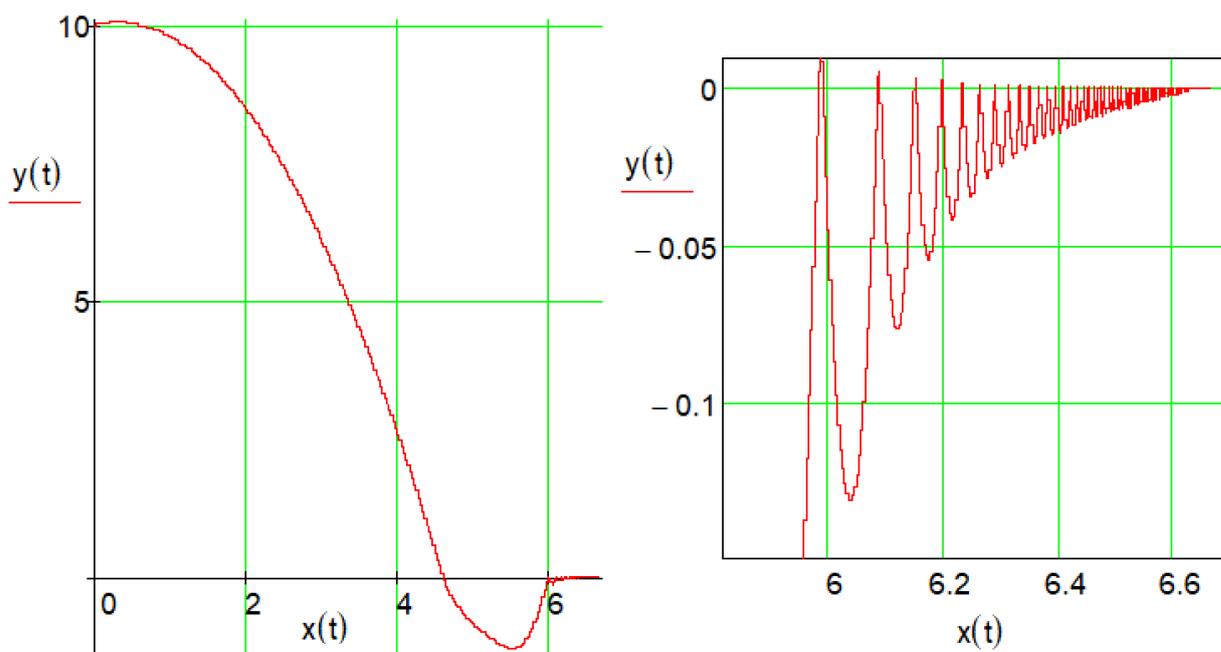


Рис. 14. Траектория ныряльщика над и под водой

На рисунках 14 и 15 показано графическое отображение численного решения задачи о нырянии в воду. Интересен (по форме и содержанию) правый график на рис. 14 и его альтернативный показ на рис. 15 в виде некоего *аттрактора* – компактного множества фазового пространства: спиральной траектории, стремящейся к точке, когда время стремится к бесконечности. Анимация по рисункам 14 и 15 находится здесь <https://community.ptc.com/t5/PTC-Mathcad-Blog/Diver/ba-p/488389>.

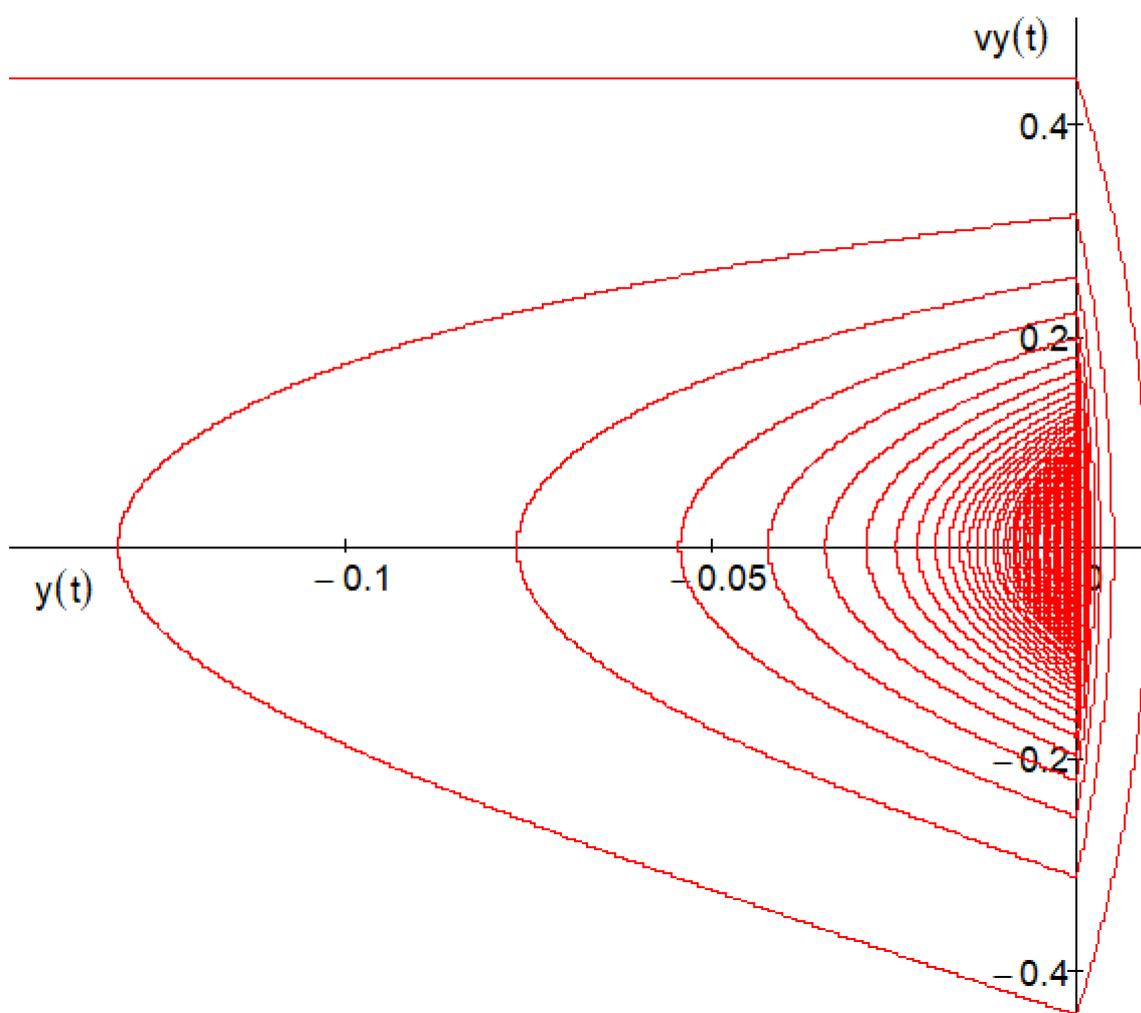


Рис. 15. Аттрактор ныряльщика

11. Плотность морской воды

В романе Жюль Верна есть диалоги с рассуждениями об изменении плотности воды с повышением давления на глубине, о сжимаемости воды. Автор (не романа, а этой статьи) работает в Международной ассоциации по свойствам воды и водяного пара (www.iapws.org), которая помимо прочего разработала формуляцию (набор формул и текстов, их поясняющих) для оценки свойств и морской воды, на основе которой был создан расчетный сайт, отображенный на рис. 16 [6]. Посетителю сайта достаточно ввести значения солёности воды, её температуры и давления, чтобы получить не только числа, но и графические зависимости. Подробное описание этой формуляции можно найти здесь: <http://iapws.org/relguide/Seawater.html>.

Thermodynamic Properties of Seawater (IAPWS [formulation](#))

S [g/kg] :=
 T [°C] :=
 p [MPa] :=

$$T_0 := 273.15 \text{ K} \quad T^* := 40 \text{ K} \quad \tau := (T - T_0) / T^* = 0.425$$

$$p_0 := 101325 \text{ Pa} \quad p^* := 100 \text{ MPa} \quad \pi := (p - p_0) / p^* = 8.986749999999999 \times 10^{-3}$$

$$S_n := 35.16504 \text{ g/kg} \quad S^* := S_n \cdot (40 / 35) = 40.18861714285715 \text{ g/kg}$$

$$\xi := \sqrt{S / S^*} = 0.5687483435228617$$

Specific Gibbs energy water part (IAPWS-IF97)

$$gw(T, p) := \text{wspHPT}(p, T) - T \cdot \text{wspSPT}(p, T) \quad gw(T, p) = -1.176 \text{ kJ/kg}$$

Specific Gibbs energy saline part (IAPWS 2008)

$$\begin{aligned}
 gs(S, T, p) := & \left\{ \begin{array}{l} \text{return } 0 \text{ J/kg if } S = 0 \\ \pi \leftarrow (p - p_0) / p^* \\ \tau \leftarrow (T - T_0) / T^* \\ \zeta \leftarrow \sqrt{S / S^*} \\ \frac{\text{J}}{\text{kg}} \cdot \sum_{k=0}^5 \left[\pi^k \cdot \sum_{j=0}^6 \left[(g1)_{j,k} \cdot \zeta^2 \cdot \ln \zeta + \sum_{i=2}^7 \left[(gi)_{j,k} \zeta^i \right] \cdot \tau^j \right] \right] \right\}
 \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

See $g_{i,j,k} >>>$

$$gs(S, T, p) = -0.9180517 \text{ kJ/kg}$$

Specific Gibbs energy saline water

$$g(S, T, p) := gw(T, p) + gs(S, T, p)$$

$$g(S, T, p) = -2.0943151602481898 \text{ kJ/kg}$$

Density

$$\rho := \left(\frac{\partial g(S, T, p)}{\partial p} \right)^{-1} = 1009.0649201841026 \text{ kg/m}^3$$

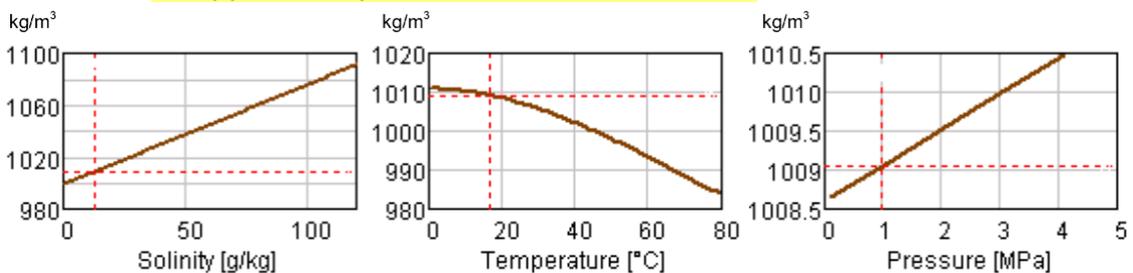


Рис. 16. Сайт по расчету плотности морской воды в зависимости от солёности, температуры и давления

На плотность морской воды сильно влияют ее солёность и температура, но почти не влияет ее давление.

12. Лъё, верста, километр, метр

Еще одна динамическая модель и ее компьютерная реализация поможет нам заглянуть в... само название романа с единицей длины⁸. В старых русских переводах романа, кстати, встречается название «80 000 километров (верст) под водой». Но более «громким» было бы такое название «80 миллионов метров под водой»! Но когда говорят о метрах, то обычно имеют в виду не расстояние, пройденное в подводном положении, а глубину погружения.

Как и морская миля, лье, точнее, лъё привязано к длине земного меридиана. Морское лъё — это 5555.5 м (длина дуги 1/20 градуса земного меридиана; 3 морские мили). А были еще сухопутные, почтовые прочие лъё — разные в разных провинциях Франции! Такую информацию выдает Википедия. А какое лъё имел в виду Жюль Верн, давая название романа!? Всю эту путаницу и решили ликвидировать, вводя СИ.

А откуда взялся метр как основная единица длины в СИ? Обычно метр связывают либо с эталоном, хранящимся в Парижской палате мер и весов⁹, либо с длиной земного меридиана, либо с длиной световой волны... Но мало кто помнит, что метр пошел от... маятника напольных часов. Отсюда и общий корень у таких слов как метр, метроном, метрология, изометрия и т.д. Маятник длиной один метр будет делать каждый взмах примерно за одну секунду. Эти взмахи через шестеренки и другие механические приспособления переводятся в движение стрелок часов. Можно предположить, что рейка маятника от часов кому-то когда-то приглянулась как эталон длины вместо шагов, расстояний от разных точек человеческого тела и т.д. Также мало кто помнит, откуда пошло понятие математического маятника с длиной в один метр и периодом колебания в две секунды. Рисунки 17 и 18 поясняют это.

⁸ А вот еще один знаменитый научно-фантастический роман, где в названии есть единицы измерения: «451 градус по Фаренгейту». При переводах его на русский также были попытки дать название романа по стандарту СИ: «233 градус по Цельсию» или даже «506 кельвинов».

⁹ Старый «физический» анекдот. — Что такое лошадиная сила? — Это сила, какую развивает лошадь ростом в один метр и весом в один килограмм. — Да где вы такую лошадь видели!? — А ее так просто не увидишь! Она храниться в Парижской палате мер и весов!

$$ode := m \frac{d^2}{dt^2} \alpha(t) = -m \cdot g \cdot \frac{\sin(\alpha(t))}{L}$$

$$m \left(\frac{d^2}{dt^2} \alpha(t) \right) = -\frac{m g \sin(\alpha(t))}{L} \quad (1)$$

$$ics := \alpha(0) = \alpha_0, D(\alpha)(0) = 0$$

$$\alpha(0) = \alpha_0, D(\alpha)(0) = 0 \quad (2)$$

dsolve({ode, ics})

$$\alpha(t) = \text{RootOf} \left(\int_{-Z}^{\alpha_0} \frac{L}{\sqrt{-2 L \cos(\alpha_0) g + 2 L \cos(_a) g}} d_a + t \right), \alpha(t) \quad (3)$$

$$= \text{RootOf} \left(\int_{\alpha_0}^{-Z} \frac{L}{\sqrt{-2 L \cos(\alpha_0) g + 2 L \cos(_a) g}} d_a + t \right)$$

Рис. 17. Решение уравнения физического маятника

$$ode := m \frac{d^2}{dt^2} \alpha(t) = -m \cdot g \cdot \frac{\alpha(t)}{L}$$

$$m \left(\frac{d^2}{dt^2} \alpha(t) \right) = -\frac{m g \alpha(t)}{L} \quad (1)$$

$$ics := \alpha(0) = \alpha_0, D(\alpha)(0) = 0$$

$$\alpha(0) = \alpha_0, D(\alpha)(0) = 0 \quad (2)$$

dsolve({ode, ics})

$$\alpha(t) = \alpha_0 \cos \left(\frac{\sqrt{g} t}{\sqrt{L}} \right) \quad (3)$$

Рис. 18. Решение уравнения математического маятника

Математический маятник – это тот же физический маятник, но отклоняющийся от вертикали не более, чем на 7 угловых градусов (еще одна «мистическая» семерка – см. сноску 6). В модели физического маятника – в уравнении баланса действующих сил присутствует синус угла. Это приводит к довольно сложному аналитическому решению соответствующего дифференциального уравнения – см. рис. 17 (абсолютно точный и абсолютно бесполезный ответ – см. дивергент статьи). Если же синус угла заменить на сам угол (а это можно сделать только при малых углах¹⁰), то решение сразу упростится и в нем «всплывет» известная «школьная» формула периода колебания маятника – см. рис.

¹⁰ Этот прием часто используют и в геометрической оптике [7].

18. Если в эту формулу, вернее, в формулу для периода колебания маятника подставить $L = 1 \text{ m}$, то она вернет эти самые две секунды, лежащие в основе всех напольных часов с маятником. Но в этой формуле присутствует и величина g – ускорение свободного падения, значение которой как минимум зависит от географической широты местности и от высоты над уровнем моря. Поэтому-то со временем и отказались от маятника для определения эталона длины: метр сначала связали с длиной экватора Земли, а потом со световой волной определенной частоты...

13. Немного политики

В Википедии в комментариях к роману Жюль Верна можно прочесть следующее.

Жюль Верн в ходе работы над романом оставался под впечатлением от польского восстания 1863 года. Изначально капитан Немо был польским аристократом, сражающимся против российских угнетателей, погубивших всю его семью. Но под давлением своего издателя Этцеля, исходившего не только из политической конъюнктуры, но из здравого расчета, что у польского аристократа просто не хватит средств построить такое подводное судно, Верн «лишил» Немо национальности, которая так и осталась неизвестна Аронаксу и его спутникам. О «польском следе» в его истории напоминает только портрет революционера Тадеуша Костюшко, находящийся среди прочих в каюте капитана. Позже, в романе «Таинственный остров», Верн раскроет инкогнито капитана Немо и представит его как беглого индийского принца Нана Сагиба, бежавшего в море после провала восстания сипаев и мстящего Англии, поработившей его родину.

Политическая же конъюнктура состояла в том, что Франция в преддверии франко-прусской войны активно искала поддержки России. Но Россия была сильно обижена на Францию после поражения в Крымской войне. Это во многом определило поражение Франции в войне с Пруссией и потерю Эльзаса и Лотарингии.

Подобные приливы и отливы в отношениях России и Запада продолжаются и в XXI веке. В связи с этим к нашему рассказу в стиле STEAM можно добавить... историю и политологию. Многие люди вполне обоснованно считают эти разделы знаний не науками, а некими синтезами науки, искусства и даже религии. Так что будем говорить тут не о стиле STEAM, а о стиле STREAM (см. сноску б).

Так или иначе, заканчивая наш разговор о романе в рамках STEAM или STREAM рассмотрим еще одну «динамическую» задачу, связанную с фразой, которую бросил русский царь, правивший во времена Жюль Верна: «У России есть только два союзника – армия и флот!».

$$m_0 := 12800\text{kg} \quad F := 27000\text{kgf} \quad m_f := 8500\text{kg} \quad q := 125 \frac{\text{kg}}{\text{s}} \quad t_{\text{end}} := \frac{m_f}{q} = 68\text{s}$$

$$k_f := 1.5 \cdot \frac{\text{kgf}}{\text{kgf}} \quad S := \frac{(1\text{m})^2}{4} \cdot \pi = 0.785 \cdot \text{m}^2 \quad \Delta t := 100\text{s}$$

Reference: <http://twt.mpei.ru/tthb/g-h-psi.xmcdz>

Reference: <http://twt.mpei.ru/tthb/Ro-air.xmcdz>

$$g(h) := g(h, 55\text{deg})$$

$$\rho_{\text{air}}(10\text{km}) = 0.374 \cdot \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

Given

$$h(0\text{s}) = -1000\text{m} \quad v(0\text{s}) = 0 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad v(t) = \frac{d}{dt} h(t)$$

$$(m_0 - \text{if}(t < t_{\text{end}}, q \cdot t, m_f)) \cdot \frac{d}{dt} v(t) \dots = \text{if}(t < t_{\text{end}}, F, 0)$$

$$+ (m_0 - \text{if}(t < t_{\text{end}}, q \cdot t, m_f)) \cdot g(h(t)) \dots$$

$$+ k_f \cdot S \cdot \frac{v(t)^2 \cdot \text{sign}(v(t))}{2} \cdot \text{if}\left(h(t) < 0, 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}, \rho_{\text{air}}(h(t))\right)$$

$$\begin{pmatrix} h \\ v \end{pmatrix} := \text{Odesolve}\left[\begin{pmatrix} h \\ v \end{pmatrix}, t, t_{\text{end}} + \Delta t\right]$$

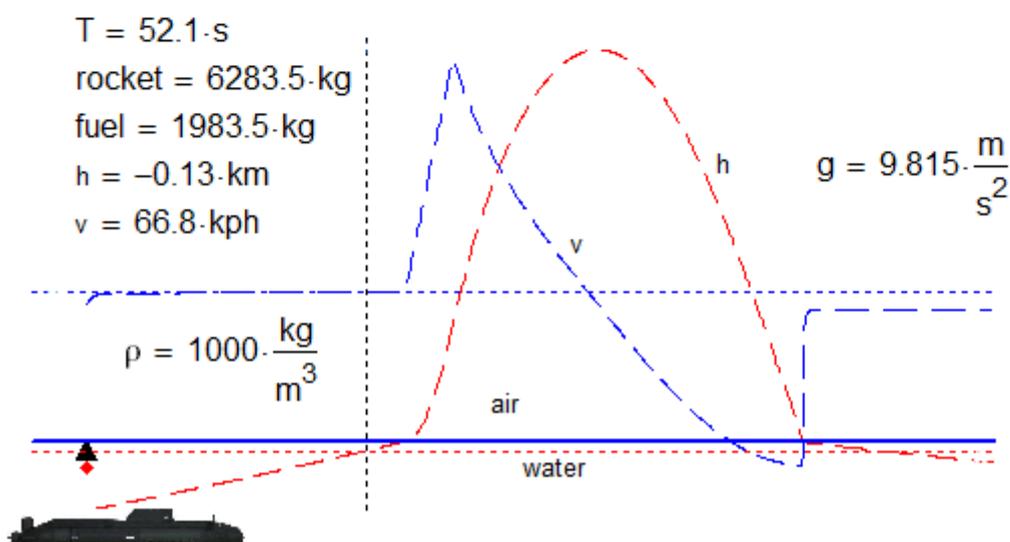


Рис. 19. Модель полета ракеты, стартующей из подводной лодки

Поговорим о флоте. В настоящее время подводные лодки – это, как правило, военные суда, некоторые из которых, несут на своем борту ракеты с ядерными и неядерными боеголовками. А ядерные военные силы – это основной инструмент в современных

политических играх¹¹! На рисунке 15 показана модель полета ракеты из ракетноносца, находящегося на глубине 1000 м. Масса ракеты равна 12 800 kg (переменная m_0). Тяга двигателя топлива 27 000 кг-силы (F). Топливо расходуется со скоростью 125 kg/s (q). Коэффициент сопротивления среды 1.5 (K_f), площади поперечного сечения ракеты 0.785 m² (S). На графике на рисунке 19 можно видеть кривые, отображающие высоту подъема ракеты и ее скорость.

14. «Облачная» плотность воздуха

В расчете, показанном на рис. 19, принимается во внимание изменение плотности воздуха по высоте над уровнем моря. Эта функциональная зависимость берется из Интернета, но не в виде текстовой формулы, а в виде *облачной функции*. Что это такое, пояснено задачей, показанной на рис. 20, где моделируется полет парашютиста с высоты 30 km, когда парашют раскрывается на высоте 1 km. Если в расчете сделать ссылку на Mathcad-документ, хранящийся в облаке (например, по адресу <http://twt.mpei.ac.ru/tthb/Gas.xmcd>), то функция с именем ρ_{Air} станет видима и будет возвращать плотность атмосферного воздуха в зависимости от высоты над уровнем моря. В начале рисунка 20 показана работа этой функции с использованием единиц длины и плотности. Но пакет Mathcad 15 не может работать с единицами измерения при решении дифференциальных уравнений. Эта недоработка была исправлена только в пакете Mathcad Prime. В расчете на рисунке 15 мы, признаемся, имитировали единицы измерения. Как? Смотри рисунок 20.

В расчете на рис 20 используются элементы гибридности – в верхней части расчета единицы измерения используются, а в нижней – нет: там введены эрзац-метр, эрзац-килограмм и эрзац-секунда. Иначе невозможно было бы решить дифференциальные уравнения...

¹¹ Правда, некоторые военные аналитики считают, что в скором времени ядерное оружие ждет судьба... кавалерии, которую свели на нет пулеметы. Противоракетные системы могут сильно снизить эффективность ракетно-ядерного оружия.

Skydiver

☞ Reference: <http://tw.t.mpei.ac.ru/tthb/Gas.xmcd>

$$\rho_{\text{Air}}(0\text{m}) = 1.225 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \quad \rho_{\text{Air}}(10\text{km}) = 0.413 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

With units

$$\rho_{\text{Air}}(h) := \frac{\rho_{\text{Air}}(h \cdot \text{m})}{\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}}$$

Without units

$m := 1$	$\text{kg} := 1$	$s := 1$			
$\text{km} := 1000\text{m}$	$\text{cm} := \frac{\text{m}}{100}$	$\text{min} := 60\text{s}$	$\text{kph} := \frac{\text{km}}{60\text{min}}$	$g := 9.2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$	

$$\rho_{\text{Air}}(0) = 1.225 \quad \rho_{\text{Air}}(10000) = 0.413$$

$$\rho_{\text{Air}}(0\text{m}) = 1.225 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \quad \rho_{\text{Air}}(10\text{km}) = 0.413 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

$$h_0 := 30\text{km} \quad h_1 := 1\text{km} \quad k := 1.2 \quad \rho_{\text{Sd}} := 1050 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \quad t_{\text{end}} := 40\text{min}$$

$$d_{\text{Sd}}(h) := \text{if}(h > h_1, 30\text{cm}, 7\text{m})$$

$$\text{volume} := \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot d_{\text{Sd}}(h_0)^3 = 0.113 \cdot \text{m}^3 \quad \text{mass} := \text{volume} \cdot \rho_{\text{Sd}} = 118.752 \cdot \text{kg}$$

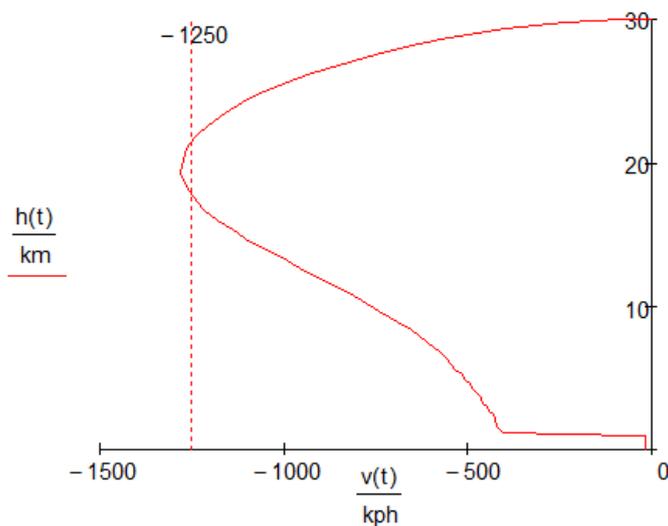
$$s_{\text{Sd}}(h) := \pi \cdot \frac{d_{\text{Sd}}(h)^2}{4} \quad s_{\text{Sd}}(20\text{km}) = 0.071 \cdot \text{m}^2 \quad s_{\text{Sd}}(20\text{m}) = 38.485 \cdot \text{m}^2$$

Given

$$h(0\text{s}) = h_0 \quad v(0\text{s}) = 0 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad v(t) = h'(t)$$

$$\text{mass} \cdot v'(t) = k \cdot \rho_{\text{Air}}(h(t)) \cdot s_{\text{Sd}}(h(t)) \cdot v(t)^2 - g \cdot \text{mass}$$

$$\begin{pmatrix} h \\ v \end{pmatrix} := \text{Odesolve} \left[\begin{pmatrix} h \\ v \end{pmatrix}, t, t_{\text{end}} \right] \quad t := 0\text{s}, \frac{t_{\text{end}}}{1000} \dots t_{\text{end}}$$



Выводы.

Описанные в статье задачи были положены в основу семинаров по Mathcad (14.11.2017 – см. <http://events.softline.ru/event/11229>) и Maple (15.11.2017 – см.

<https://www.maplesoft.com/company/events/index.aspx>), где помимо прочего,

рассматривались перспективы использования математических пакетов в раздельном или совместном преподавании информатики, математики, физики, гидрогазодинамики, сопромата, литературы, основ мировых религий, политологии и других учебных дисциплин [7] с опорой на технологию STEAM (или STREAM – см. сноску 6).

Литература:

1. Верн, Жюль. Двадцать тысяч льё под водой / пер. с фр. Н. Яковлева, Е. Корш. — М.: Государственное издательство художественной литературы, 1956. — 478 с. (<http://www.lib.ru/INOFANT/VERN/20000lje.txt>)
2. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления М.: Физматлит, 2008 г. (http://www.newlibrary.ru/author/fihtengolc_g_m_.html)
3. Очков В.Ф., Бобряков А.В., Хорьков С.Н. Гибридное решение задач на компьютере // Cloud of Science. Том 4 № 2. 2017. С. 5-26 (<http://twt.mpei.ac.ru/ochkov/hybrid.pdf>)
4. Нарышкин Д.Г. Химическая термодинамика с Mathcad. Расчетные задачи. М.: Инфра-М, РИОР, 2016. — 199 с.
5. Коробов В.И., Очков В.Ф. Химическая кинетика: введение с Mathcad/Maple/MCS М.: Горячая линия-Телеком, 2009 (2015 - второе издание), - 384 с. (<http://twt.mpei.ac.ru/ТТНВ/New-Chem-Kin/En-Ru-book.html>)
6. Александров А.А. ТЕПЛОФИЗИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА РАБОЧИХ ВЕЩЕСТВ ТЕПЛОЭНЕРГЕТИКИ / А.А. Александров, К.А. Орлов, В.Ф Очков. - 2-е изд., перераб. и допол. - М.: Издательский дом МЭИ. 2017. - 226 [8] с.: ил. (<http://twt.mpei.ac.ru/rbtp>)
7. Очков В.Ф., Богомолова Е.П., Иванов Д.А. Физико-математические этюды с Mathcad и Интернет. Издательство Лань. 2016