



ЦЕПНАЯ ЛИНИЯ

В.Ф. Очков,

Национальный исследовательский университет «МЭИ»; ochkov@tw.tpei.ac.ru

К. Попова,

ГБОУ Лицей 1502 при МЭИ, Москва

М. Камалов,

ГБОУ Лицей 1502 при МЭИ, Москва



В статье описана лабораторная работа в русле междисциплинарных связей на стыке информатики, математики и физики: исследование провисания цепи – свободной и нагруженной, а также моделирование канатной подвесной дороги

В [1] было сказано, что если взять в руки за два конца металлическую цепь, растянуть ее, показать провисание цепи школьникам или студентам и спросить их, на что это похоже с точки зрения математики, то большинство ребят скажут, что это *парабола*. И в этом нет ничего удивительного – даже Галилей так считал. И только полвека спустя, в конце XVII века, три великих математика – швейцарец Иоганн Бернулли (1667-1748), немец Готфрид Лейбниц (1646-1716) и голландец Христиан Гюйгенс (1629-1695) – почти одновременно и независимо друг от друга доказали, что это не так. Давайте и мы попытаемся это доказать, проведя несложные физические эксперименты с реальной провисающей цепью и с последующей компьютерной обработкой результатов опытов!

1. Как провисает цепь?

Два школьника прижали к доске металлическую цепь за два ее конца так, чтобы она свободно провисала, но не качивалась.

Сделаем фото цепи. Центральную часть изображения скопируем и перенесем в

среду Paint, где оцифруем ее следующим образом. К элементу цепи подведем курсор мышки, координаты которого (в пикселях) показаны в левом нижнем углу этого графического редактора (рис. 1).

Из рисунка 1 видно, что курсор мышки находится на левом конце цепи – на 238-м пикселе от левого края картинки и на



Рис. 1. Изображение провисающей цепи в среде графического редактора Paint

252-м пикселе от ее верхнего края. Эти два числа запишем как первые элементы векторов X и Y в среде математического пакета Mathcad 15 (рис. 2). (Оператор ORIGIN := 1 предписывает вести нумерацию элементов вектора от единицы, а не от нуля, как это имеет место по умолчанию.)

$$\text{ORIGIN} := 1 \quad X := \begin{pmatrix} 238 \\ 386 \\ 833 \\ 1297 \\ 1477 \end{pmatrix} \quad Y := 1149 - \begin{pmatrix} 252 \\ 680 \\ 1107 \\ 735 \\ 252 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 897 \\ 469 \\ 42 \\ 414 \\ 897 \end{pmatrix}$$

Рис. 2. Два вектора с координатами провисающей цепи

Затем курсор мышки (рис. 1) переместим на другую точку изображения провисающей цепи, и новую пару чисел (386 и 680) занесем в векторы X и Y . Подобным образом снимем координаты и других точек вплоть до последней (1477 и 252 – точка крепления цепи в правом ее конце). Мы «оцифровали» только пять точек. Их число можно увеличить, но это не сильно скажется на результатах нашего физико-математического компьютерного эксперимента. Можно определить длину между пикселями (рис. 1) и оперировать уже не их безразмерными координатами, а реальными расстояниями в миллиметрах, сантиметрах или метрах. Но это также не меняет суть нашего расчета. Далее будем обмеривать изображение цепи на фоне миллиметровой бумаги и работать далее уже не с пикселями, а непосредственно с единицами длины – с сантиметрами.

Следует упомянуть, что есть специальные программы, автоматизирующие процесс «оцифровки» таких изображений: пользователь последовательно щелкает мышкой по кривой линии и автоматически получает два вектора с координатами точек. Но у нас, повторяем, всего лишь пять точек, поэтому такую работу мы сде-

лали вручную, воспользовавшись самым распространенным графическим инструментом – графическим редактором Paint.

На рисунке 2 показано, что значения элементов вектора Y вычитаются из величины 1149 (высота в пикселях картинки на рис. 1). Это сделано для того, чтобы «перевернуть» ось Y : точка с нулевыми координатами на рисунке 1 находится в *верхнем* левом углу, а на наших последующих графиках она будет находиться в *нижнем* левом углу (точка начала координат в прямоугольной системе).

Известно, что упомянутую нами параболу можно провести через три точки. Каноническое уравнение параболы в прямоугольной системе координат имеет вид $x^2 = 2p \cdot y$, где p – это фокальный параметр, который равен расстоянию от фокуса до директрисы параболы [1]. Есть и более привычная («школьная») квадратичная формула для этой кривой: $y = ax^2 + bx + c$. Но мы будем использовать еще одну – менее известную, но более подходящую для нашей задачи формулу (см. первый оператор на рис. 3). У функции с именем y_p один аргумент x и три параметра: a , x_h и h . Конечно, с позиций математики и информатики у этой функции просто четыре аргумента: x , a , x_h и h . Деление аргументов на собственно аргумент и параметры мы сделали с позиций физики задачи. Параметр a отвечает за форму и «крутизну» кривой: при $a > 0$ мы имеем «провисающую» параболу, а при $a < 0$ – параболу в виде арки. При значении a , стремящемся к нулю, парабола будет «снизу или сверху» стремиться к прямой, параллельной оси X . Параметры x_h и h фиксируют координаты вершины параболы: минимум провисающей кривой или максимум кривой в виде арки. На рисунке 3 показано, как были найдены значения параметров a , x_h и h , при которых парабола проходит через первую (левый край цепи), третью (ниж-

ний край) и пятую (правый край) точки, координаты которых хранятся в векторах X и Y . Для этого была составлена система из трех алгебраических уравнений, которые решаются численно в среде пакета *Mathcad 15* с использованием встроенной функции *Find* и ключевого слова *Given*. Функция *Find* меняет значения своих аргументов, начиная от первого предположения, заданного пользователем ($a := 1 \quad x_h := 800 \quad h := 50$), так, чтобы три уравнения превратились в три тождества. Вернее, почти в тождества: правые и левые части уравнений должны отличаться друг от друга не более, чем на заданную малую величину. По умолчанию (а мы его не меняли) эта величина равна 0.001. Первые предположения для параметров x_h и h взяты, исходя из предполагаемых координат минимума искомой параболы: 800 и 50. Для параметра a – первое предположение (единица) взято слегка «наобум». Главное, чтобы оно было больше нуля («провисающая» парабола, а не арка). Если бы мы использовали привычную квадратичную формулу для параболы $y = ax^2 + bx + c$, то задавать первые предположения для коэффициентов a , b и c было сложнее. Этим и объясняется применение нами несколько необычной формы записи параболы на рисунке 3. Полученное решение системы уравнений

$$y_p(x, a, x_h, h) := a \cdot (x - x_h)^2 + h$$

$$a := 1 \quad x_h := 800 \quad h := 50$$

Given

$$Y_1 = y_p(X_1, a, x_h, h) \quad Y_5 = y_p(X_5, a, x_h, h)$$

$$Y_3 = y_p(X_3, a, x_h, h)$$

$$\begin{pmatrix} a \\ x_h \\ h \end{pmatrix} := \text{Find}(a, x_h, h) = \begin{pmatrix} 2.231 \times 10^{-3} \\ 857.5 \\ 40.661 \end{pmatrix}$$

Рис. 3. Решение системы трех уравнений с тремя неизвестными

можно перенести на место первого предположения и убедиться, что решение не изменится.

На рисунке 4 можно видеть, как наша парабола проходит через точки, «снятые» с фотографии цепи: три точки она «пронизывает» (они обведены двойными кружочками), а около двух точек кривая проходит рядом. Это следует и из графика, и из значений, показанных правее графика: вторая точка отстает от параболы по вертикали на 68 пикселей, а четвертая – на 58 пикселей. Отсюда вывод: цепь провисает не по параболе, а по какой-то другой кривой, достаточно близкой к параболе (см. начало статьи).

Рисунок 4 отображает процесс *интерполяции*: кривая проходит через три точки. А рисунок 5 иллюстрирует процесс *аппроксимации* (приближения): кривая проходит не через три избранные точки, а *вблизи* всех пяти точек.

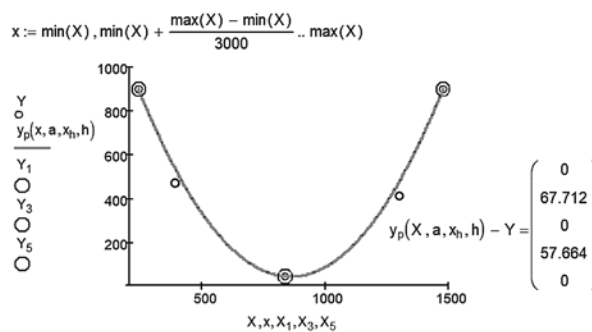


Рис. 4. Парабола проходит через три точки

На рисунке 5 решается *переопределенная* система – система пяти¹ алгебраических уравнений с тремя неизвестными a , x_h и h . Функцию *Find* здесь уже нельзя

¹ В решении на рис. 5 записано одно уравнение $Y = y_p(X, a, x_h, h)$. Но переменные X и Y – это не скаляры (как на рис. 4: X_1, Y_1, X_3, Y_3, X_5 и Y_5), а векторы с пятью элементами. Пакет *Mathcad* может так интерпретировать уравнение с векторами.

использовать – она вернет не решение задачи (корень системы – вектор с тремя численными значениями – см. рис. 3), а сообщение об ошибке: «Решение не найдено». Для таких случаев в пакете *Mathcad* предусмотрена функция *MinErr* (минимальная ошибка). Ее также можно применить для решения систем уравнений, но в случае отсутствия решения (а это наш случай на рис. 5) функция *MinErr* возвращает не сообщение об ошибке, а значения своих аргументов, которые наиболее близки к решению – дают минимальную ошибку, минимальное отклонение левых и правых частей уравнений (неувязка системы уравнений).

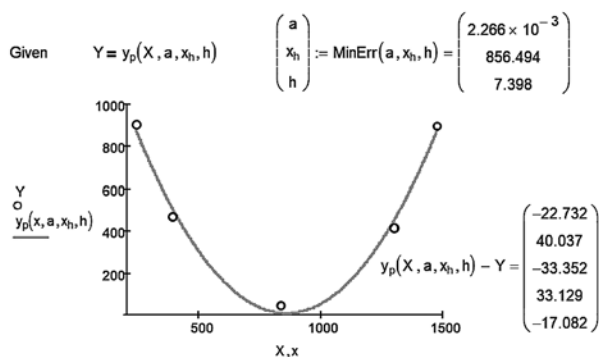


Рис. 5 Парабола проходит вблизи пяти точек

Но опять же наша новая парабола, параметры которой ненамного отличаются от параметров первой параболы, прошла не через точки, а вблизи них, что заметно и на графике, и по числам, показанным правее него.

Через точки, расположенные на цепи, нужно проводить не параболу, а линию, которая так и называется – *цепная линия*, которую открыли три вышеупомянутые великие математики. Ее каноническая формула имеет один аргумент x и один параметр a : $a \cdot \cosh(x/a)$. В этой формуле задействован гиперболический косинус \cosh . Что это за функция? Есть такое ред-

кое животное *овцебык*. С овцой его роднит густая шерсть, а с быком – размеры. Гиперболический косинус перенял от отдельной ветви гиперболы свою «провисающую» форму или форму арки. Но не от традиционной «школьной» гиперболы $y = 1/x$, а от «школьной» гиперболы, повернутой на 90° . Косинусом же функция \cosh называется потому, что она подобно обычному косинусу имеет первую производную, равную синусу, гиперболическому синусу \sinh [2], но без смены знака. В свою очередь производная гиперболического синуса равна гиперболическому косинусу. Гиперболический косинус – это $(e^x + e^{-x})/2$, где e – это основание натурального логарифма. Гиперболический же синус – это $(e^x - e^{-x})/2$. Правда, гиперболические функции, в отличие от своих тригонометрических «тезок», периода не имеют. «Период» имеет цепь, подвешенная на ряд столбиков – на ограду памятника, например.

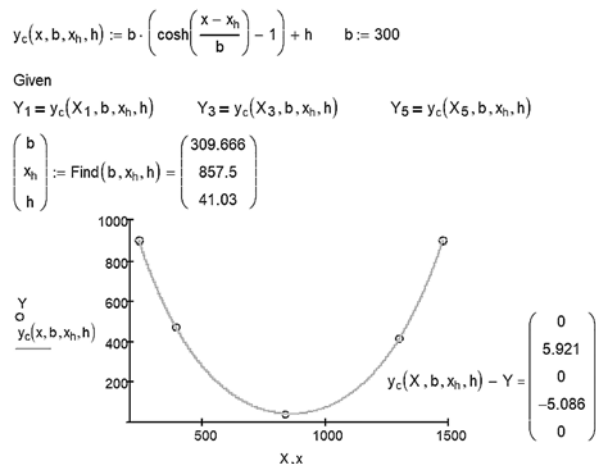


Рис. 6 Цепная линия проходит точно через пять точек

В решении на рисунке 6 мы задействовали не каноническое уравнение цепной линии, а уравнение, где присутствуют параметры b , x_h и h , фиксирующие минимум цепной функции, когда она отображает провисающую цепь ($b > 0$), или максимум

© Любое распространение материалов журнала, в т.ч. архивных номеров, возможно только с письменного согласия редакции.

цепной функции, когда она отображает арку в виде цепи ($b < 0$). Имя параметра a заменено на b , чтобы не было путаницы с параболой.

Из рисунка 6 видно, что если в нашей задаче параболу заменить на цепную линию, то кривая *точно* пройдет через все пять точек провисающей цепи! Вернее, почти точно: тут нужно учитывать погрешности, связанные с не совсем точным ручным определением координат цепи (рис. 1) и с возможными искажениями при ее фотографировании.

Само же уравнение цепной линии получается в результате решения дифференциального уравнения, описывающего баланс сил, действующих на элементарный участок цепи: силы, растягивающие (провисающая цепь) или сжимающие его (арка в виде цепи), уравниваются весом самого этого участка. Вывод уравнения цепной линии можно найти здесь [3].

Векторы X и Y можно дополнить новыми элементами, значения которых снимаются так, как показано на рисунке 1. Все эти новые точки должны точно лечь на кривую цепной функции, показанную на рисунке 6. Вернее, почти точно – с учетом вышеописанных погрешностей.

2. Цепные весы.

На рисунке 7 показано изображение провисающей цепи, снятой на фоне миллиметровой бумаги. К цепи подвешена гирька массой 10 г. Требуется определить (оценить) длину цепи и ее массу, сняв и обработав ее дискретные координаты. *Примечание.* Фотография цепи выглядит не совсем горизонтальной из-за не совсем горизонтального положения фотоаппарата (смартфона) при съемке. Но линии на миллиметровке вполне горизонтальные и вертикальные, что очень важно для нашего эксперимента. Положение бумаги проверялось уровнем, который встроено в смартфон.



Рис. 7. Фотография цепи с грузом на фоне миллиметровой бумаги

На рисунке 8 показан *Mathcad*-документ с расчетом параметров двух отрезков цепной линии справа и слева от грузика. Координаты отдельных точек цепи хранятся в четырех векторах $X_1 - Y_1$ и $X_2 - Y_2$. Здесь индексы 1 и 2 не фиксируют номера элементов в векторе, как это показано на рисунке 3, а являются просто текстовыми индексами – частью имени переменной, сдвинутой вниз. Векторы $X_1 - Y_1$ и $X_2 - Y_2$ хранят величины не в пикселах, а в единицах длины – в сантиметрах, снятых непосредственно с миллиметровки. Вследствие этого найденные параметры двух участков цепной линии $b_1, xh_1, h_1, b_2, xh_1$ и h_2 стали также размерными.

Функция *MinErr* в паре с ключевым словом *Given* помогла нам определить параметры $b_1, xh_1, h_1, b_2, xh_1$ и h_2 для цепной функции и построить соответствующие линии, проходящие через точки на рисунке 8.

На рисунке 9 показан расчет линейной массы цепи, к которой подвешена десятиграммовая гирька. Задача сводится к решению системы четырех алгебраических уравнений, описывающих следующие моменты.

Сумма вертикальных проекций сил, удерживающих цепь с гирькой в точках

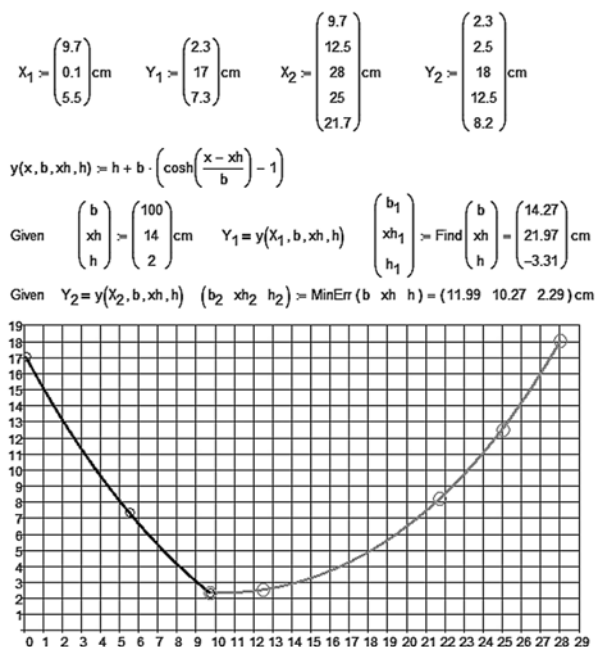


Рис. 8. Геометрия провисающей цепи с грузиком

крепления (F_{y1} и F_{y2}), равна весу цепи и весу гирьки. Масса цепи – это произведение искомой линейной массы цепи g_c на ее длину S . Длина цепи определяется по известной формуле с интегралом, где фигурирует первая производная цепной линии y' , вид которой задан первым оператором на рисунке 9. В этой формуле фигурирует уже упоминавшийся нами гиперболический синус \sinh . Горизонтальные проекции сил, удерживающих цепь с гирькой в точках крепления (F_x), равны друг другу.

В левой точке подвеса цепи отношение силы F_{y1} к силе F_x равно косинусу угла, с которым цепь крепится к опоре, т.е. значению производной цепной функции в этой точке.

Вышеупомянутое равенство относится и к правой точке опоры цепи.

В точке крепления гирьки ее вес (gG – произведение ускорения свободного падения на массу гирьки) уравновешивается двумя силами, направленными по

касательной к двум частям цепи в этой точке.

Функция *Find* в паре с ключевым словом *Given* на рисунке 9 находит значения четырех неизвестных g_c , F_x , F_{y1} и F_{y2} , превращающих четыре вышеописанные уравнения в тождества.

Расчет, показанный на рисунке 9, выдал ответ – линейная масса цепи, к которой подвешена гирька массой 10 г, равна 69.5 граммов на метр. На рисунках 10 и 11 показано, как эта величина проверена с помощью взвешивания цепи, снятой с миллиметровки, и измерения ее длины. Ответ: 110.02 г / 156.9 см = 70.12 г/см. Сравнение этих двух чисел (69.5 и 70.12) говорит о хорошей сходимости результата нашего эксперимента на стыке физики, математики и информатики.

Задачу на рисунке 9 можно слегка видоизменить – задать линейную массу цепи и определить массу груза, к ней подвешенного. Так мы смоделируем некие *цепные весы*, озаглавившие данную часть статьи.

3. Канатная дорога.

Выкладки, приведенные выше, позволяют нам сделать расчет и анимацию канатной подвесной дороги.

Задача. Берется абсолютно гибкий и нерастяжимый трос длиной 46.6 см и с линейной массой 70 г/см, концы которого подвешиваются на высотах 17 и 18 см. Расстояние между точками подвеса троса по горизонтали 28 см. На тросе на расстоянии x_0 от левой опоры подвешивается груз массой 10 г (рис. 7 и 8). Спрашивается, как провиснет трос (какова будет его форма) и какие силы будут растягивать трос в точках его крепления при изменении расстояния x_0 от нуля до 28 см. Примерно такую задачу (но не с сантиметрами и граммами, а с метрами и тоннами) решают инженеры при про-

$$y(x, b, xh) = \sinh\left(\frac{x - xh}{b}\right)$$

$$x_0 = \max(X_1) \quad L = \max(X_2) - \min(X_1) = 27.9 \text{ cm} \quad g_c = 100 \frac{\text{gm}}{\text{m}}$$

$$S = \int_{\min(X_1)}^{x_0} \sqrt{1 + (y'(x, b_1, xh_1))^2} dx + \int_{x_0}^L \sqrt{1 + (y'(x, b_2, xh_2))^2} dx = 43.031 \text{ cm}$$

Given

$$G = 10\text{gm} \quad F_x = 50\text{gmf} \quad F_{y1} = \frac{g \cdot (G + g_c \cdot S)}{2} = 26.516\text{-gmf} \quad F_{y2} = F_{y1}$$

$$F_{y1} + F_{y2} = g \cdot (G + g_c \cdot S)$$

$$F_{y1} = -y'(0\text{m}, b_1, xh_1) \cdot F_x \quad \text{Левая точка}$$

$$G - g = F_x (y'(x_0, b_2, xh_2) - y'(x_0, b_1, xh_1)) \quad \text{Середина}$$

$$F_{y2} = y'(L, b_2, xh_2) \cdot F_x \quad \text{Правая точка}$$

$$\begin{pmatrix} G \\ F_x \\ F_{y1} \\ F_{y2} \end{pmatrix} = \text{Find}(G, F_x, F_{y1}, F_{y2}) \quad G = 10.935 \text{ gm}$$

Рис. 9. Расчет линейной массы цепи, к которой подвешен грузик

ектировании подвесной канатной дороги. Решая эту задачу в среде *Mathcad*, можно и нужно сделать анимацию: перемещать груз вдоль цепи, наблюдая, как меняется ее форма.

Ядро решения задачи показано на рисунке 12.

Задачу о подвесной канатной дороге с двумя отрезками цепной линии и грузом



Рис. 10. Определение массы цепи



Рис. 11. Определение длины цепи

можно свести к решению системы девяти нелинейных уравнений, четыре из которых учитывают геометрию (1–4), а пять – баланс сил и моментов сил (5–9). Вот эти уравнения.

1. Левая ветвь троса крепится у левого столба и заканчивается в точке подвеса груза.

2. Правая ветвь троса начинается в точке подвеса груза и крепится у правого столба.

3. Две ветви троса пересекаются в точке подвеса груза.

4. Сумма длин двух ветвей (частей) троса остается постоянной и равна заданному значению S .

5. Сумма вертикальных составляющих реакции опор ($F_{y1} + F_{y2}$) равна сумме веса цепи и веса подвешенного груза. Сразу отметим, что две горизонтальные составляющие реакции цепи у опор равны ($F_{x1} = F_{x2} = F_x$), так как других горизонтальных сил в системе нет.

6 и 7. Если $F_{x1} = F_{x2} = F_x$ и известны значения производных двух цепных функций в точках опоры, то можно рассчитать значения F_{y1} и F_{y2} , принимая во внимание, что значение производной — это тангенс угла наклона касательной в данной точке.

8. В точке пересечения двух ветвей

$$\begin{aligned}
 &H_1 = y(0m, b_1, xh_1, h_1) \quad \text{Левая точка - геометрия цепи} \\
 &y(x_0, b_1, xh_1, h_1) = y(x_0, b_2, xh_2, h_2) \quad \text{Середина - геометрия цепи} \\
 &H_2 = y(L, b_2, xh_2, h_2) \quad \text{Правая точка - геометрия цепи} \\
 &S = \int_{0m}^{x_0} \sqrt{1 + (y'(x, b_1, xh_1))^2} dx + \int_{x_0}^L \sqrt{1 + (y'(x, b_2, xh_2))^2} dx \quad \text{Длина цепи остается постоянной} \\
 &F_{y1} + F_{y2} = g \cdot (G + g_c \cdot S) \quad \text{Баланс вертикальных проекций сил} \quad + \\
 &F_{y1} = -y'(0m, b_1, xh_1) \cdot F_x \quad \text{Левая точка - баланс сил} \\
 &Gg = F_x(y'(x_0, b_2, xh_2) - y'(x_0, b_1, xh_1)) \quad \text{Середина - баланс сил} \\
 &F_{y2} = y'(L, b_2, xh_2) \cdot F_x \quad \text{Правая точка - баланс сил} \\
 &F_{y1}x_0 + F_x(H_2 - y(x_0, b_1, xh_1, h_1)) + \begin{matrix} M \leftarrow 0 \\ n \leftarrow 1000 \\ \Delta L \leftarrow \frac{L - x_0}{n} \\ \text{for } i \in 1..n \\ | \leftarrow \frac{\Delta Li + \Delta L(i-1)}{2} \\ \Delta m \leftarrow g_c \Delta L \sqrt{1 + (y'(x_0 + 1, b_2, xh_2))^2} \\ M \leftarrow M + g \Delta m \\ M \end{matrix} = F_{y2}(L - x_0) + F_x(H_1 - y(x_0, b_1, xh_1, h_1)) + \begin{matrix} M \leftarrow 0 \\ n \leftarrow 1000 \\ \Delta L \leftarrow \frac{x_0}{n} \\ \text{for } i \in 1..n \\ | \leftarrow \frac{\Delta Li + \Delta L(i-1)}{2} \\ \Delta m \leftarrow g_c \Delta L \sqrt{1 + (y'(x_0 - 1, b_1, xh_1))^2} \\ M \leftarrow M + g \Delta m \\ M \end{matrix} \quad \text{Баланс моментов сил}
 \end{aligned}$$

Рис. 12. Математическая модель подвешенного троса с грузом

троса вес груза уравнивается двумя вертикальными силами от левой и правой ветвей цепи. В этом уравнении тоже участвуют значения производных, с помощью которых вертикальные составляющие сил выражаются через горизонтальные составляющие.

9. Равенство моментов сил, действующих на систему в точке пересечения ветвей цепи: три силы (F_{y1} , F_x у правой опоры и вес правой ветви цепи) разворачивают систему по часовой стрелке, а три другие силы (F_x у левой опоры, F_{y2} и вес левой ветви цепи) разворачивают систему против часовой стрелки. Тут используется программирование: трос разбивается на отдельные маленькие элементы, моменты сил которых суммируются.

На рисунке 13 показаны три кадра анимации, полученные в результате решения задачи о тросе с подвешенным грузом. Сам файл с решением можно скачать с вышеотмеченных сайтов.

Физический и компьютерный экспери-

мент с цепью (тросом) можно усложнить, если к цепи подвесить несколько грузиков в разных точках цепи. Эту провисающую конструкцию нужно будет также сфотографировать, оцифровать на компьютере, обсчитать и сравнить результаты расчета с фотографией цепи. При этом концы провисающей цепи можно крепить посредством ручных динамометров (безмена), который продается в хозяйственных магазинах. Эти устройства раньше были пружинными, а сейчас стали электронными, что существенно повысило их точность. В нашем эксперименте динамометры покажут, какие силы действуют на цепь в местах ее крепления.

Эту лабораторную работу можно усложнить в таких направлениях.

1. Скачать *Mathcad*-файл с решением задачи, показанной на рисунке 7, и усложнить ее, подвесив к цепи не один груз, а несколько, приблизившись тем самым к решению задачи о цепном висячем (вантовом) мосте.

© Любое распространение материалов журнала, в т.ч. архивных номеров, возможно только с письменного согласия редакции.

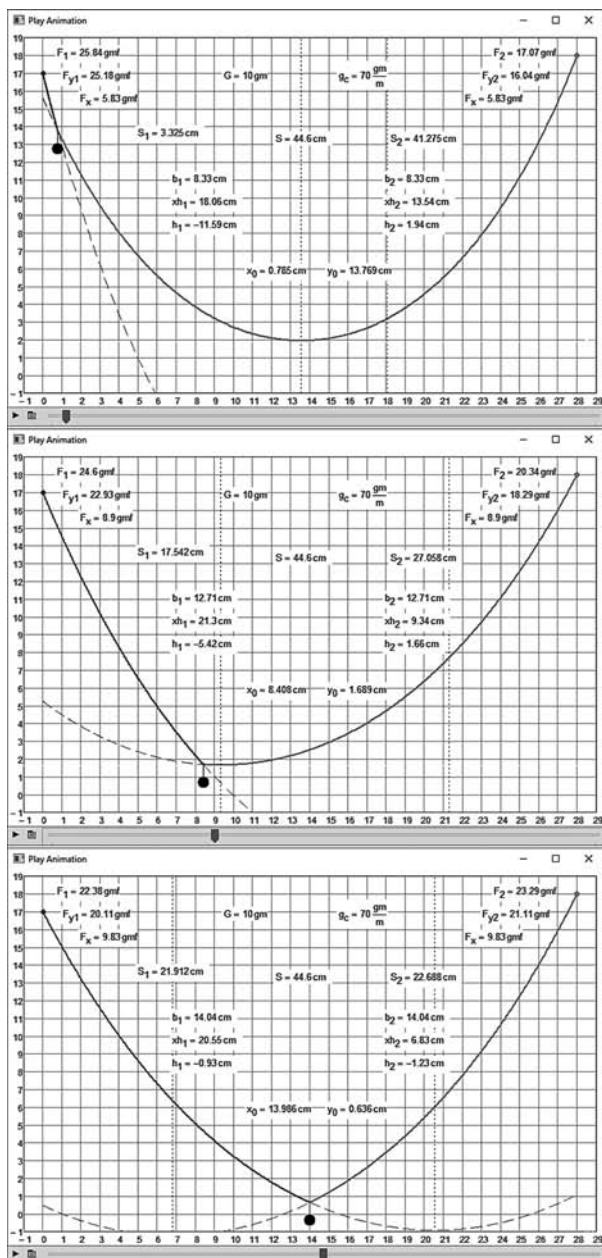


Рис. 13. Кадры анимации провисающего троса цепи с грузом. Второй (центральный) кадр фиксирует положение цепи и гири, показанные на рис. 7 и 8

2. Оттянуть груз, показанный на рисунке 7, влево или вправо и смоделировать качание такого маятника. Тут при-

дется решать не только алгебраические, но и дифференциальные уравнения.

3. Смоделировать движение грузов на цепи (материальных точек) при обрыве цепи. Тут получится классический одиночный или множественный маятник.

Подход к решению этих задач дан в [5]. Такие эксперименты можно проводить не только на компьютере, но и реально, раскачивая подвешенную цепь и фиксируя ее движение видеосъемкой.

Литература

1. *Очков В.Ф., Цуриков Г.Н., Чудова Ю.В.* Осторожно: цепная функция // Информатика в школе. 2017. № 4. С. 58-62. (<http://twi.mpei.ac.ru/ochkov/Chain.pdf>)
2. *Янпольский А.Р.* Гиперболические функции. Избранные главы высшей математики для инженеров и студентов вузов. М.: Физматлит, 1960. <https://books.google.ru/books?isbn=545825953X>
3. *Меркин Д.Е.* Введение в механику гибкой нити. М.: Физматлитиздат, 1980. http://know.alnam.ru/book_gth.php?id=10
4. *Очков В.Ф., Богомолова Е.П., Иванов Д.А.* Физико-математические этюды с Mathcad и Интернет. М.: Лань, 2016 (этюды 7 «Цепная функция или пятый элемент»).
5. *Очков В.Ф., Ленер Ф., Чудова Ю.В., Капитонен В.К., Тараканова Д.Ю.* Физика vs информатика: веревочный многоугольник с гирьками в статике, кинематике и динамике Или Ньютон vs Лагранж // Cloud of Science. 2017. Т. 4. № 2. С. 147-180 (<http://twi.mpei.ac.ru/ochkov/Polygon.pdf>)

Сайты статьи с «исходниками» и анимациями:

1. <https://community.ptc.com/t5/PTC-Mathcad-Questions/Catenary-Physic-Math-IT/m-p/494899>
2. <https://community.ptc.com/t5/PTC-Mathcad-Questions/Find-and-an-array-as-an-argument/m-p/497397>