Решатели
или
Великолепная семерка Mathcad

Богомолова Е.П., Очков В.Ф.

Многие задачи по математике, физике, химии и другим школьным и вузовским дисциплинам сводятся к решению уравнений и систем уравнений. Поэтому полезно будет узнать, какие инструменты для решения такого рода задач есть у пакета Mathcad, очень популярного у школьников, студентов инженеров и ученых. Эти инструменты объединены в группу «Решение уравнений» встроенных функций Mathcad, которые используют различные *численные методы*. В среде Mathcad 15 название этих методов можно узнать, если на имени некоторых функции, их реализующих, нажать правую кнопку мыши. В группе «Решение уравнений» традиционно находятся *семь* функций (см. второе название статьи). Есть еще в среде Mathcad и оператор **solve** для символьного (аналитического) решения задач. Описание этих инструментов будет сделано на несложных школьных "водных" примерах.

<u>Задача 1</u>. Моторная лодка прошла по реке в одну сторону (**L** = 10 km), а потом вернулась в исходную точку, затратив на этот «круиз» 1 час 45 минут (**t**). Спрашивается, какова скорость течения воды в реке (неизвестная **x**), если собственная скорость лодки (**v** – скорость в стоячей воде) равна 12 км/ч (kph).

Раньше подобные «школьные» задачи решались в несколько действий[1]. Сейчас принято составлять, а затем решать *уравнения*, выбирая его подходящие корни. Пойдем и мы по этому пути, но, составив уравнение, попробуем решить его не на бумаге, а на компьютере в среде математической программы Mathcad. В нашей задаче о моторной лодке время в пути **t** – это суммарное время, затраченное на поездку в одну сторону **L / (v + x)** (условно будем считать, что это движение по течению реки), и в обратную сторону (против течения) **L/ (v – x)**. Поэтому наше уравнение будет иметь вид:

$$(L / (v + x)) + (L / (v - x)) = t.$$

[1]Первое действие: как долго лодка была бы в пути, если б вода в реке была неподвижна –
2*10 км / 12 км/ч = 1 час 40 минут; второе действие… Читатель, докончи это решение сам и сравни полученное решение с теми, которые приведены ниже. Мы такие задачи по действиям решали когда-то в 5 классе школы. Но не всякая задача может быть решена по действиям. Поэтому люди и придумали алгебру. Эту задачу тоже сходу нельзя решить пошагово. В древние времена, пока не было формулы корней квадратного уравнения, не всякое квадратное уравнение могли решить, причем решения были очень хитроумными.

0. solve

Начнем с решения полученного уравнения средствами *символьной математики* Mathcad. Формальное, более длинное название символьной математики – *компьютерные аналитические преобразования*, но у нас прижилась калька с английского – *symbolic math*. Это название мы и будем использовать далее.

Если *численная математика* (которая, повторяем, тоже есть в среде Mathcad и составляет его основу) оперирует числами, хранящимися в переменных, то *символьная математика* – самими переменными-символами.

На рисунке 1 показано решение уравнения движения моторной лодки по реке с помощью команды **solve** *символьной математики* Mathcad (на этом и некоторых других рисунках будут показаны позиции меню и панели инструментов Mathcad Prime и Mathcad 15 для решения описываемых задач).

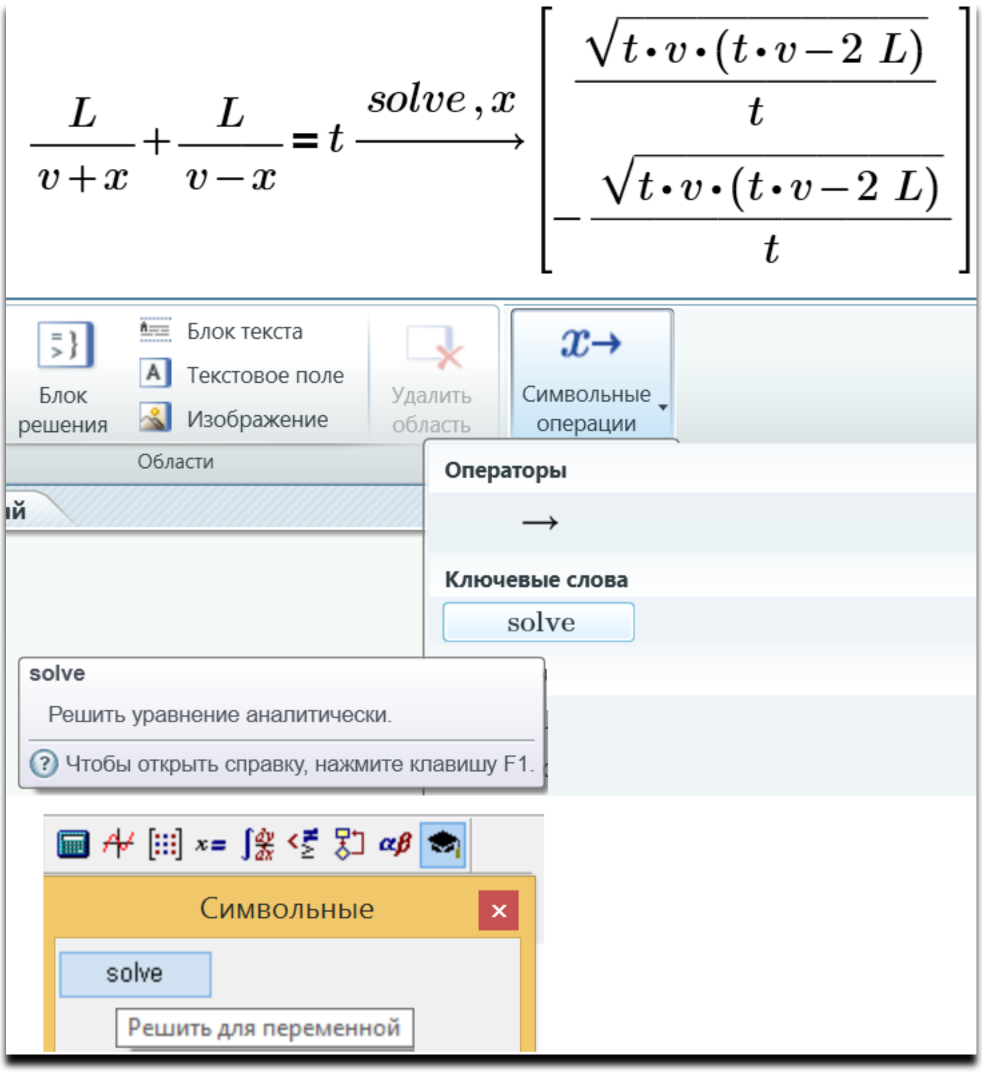


Рис. 1.Аналитическое решение задачи о движении моторной лодки

Из полученного общего аналитического решения (из вектора с двумя элементами-формулами – см. рис. 1) можно скопировать один элемент, подставить в него исходные значения переменных **L**, **t** и **v** (см. рис. 2) и получить численный ответ – скорость течения воды в реке. Ответ будет выдан в метрах, деленных на секунду (Mathcad по умолчанию ориентирован на СИ), и подправлен на более привычные километры в час (**kph**). Mathcad – это не просто математический, а физико-математический пакет: переменные Mathcad хранят не просто числа, а физические величины (длину, время, силу, массу и т.д.), что очень полезно при расчетах задач с физическим смыслом [1]. Это существенно ускоряет и упрощает расчеты, позволяет избежать ошибок в них.

$$L := 10\ km \qquad t := 1\ hr + 45\ min \qquad v := 12\ kph$$

$$\frac{\sqrt{t \cdot v \cdot (t \cdot v - 2\ L)}}{t} = 2.619\ kph$$

Рис. 2. Решение задачи о моторной лодке по найденной на рис. 1 формуле

Спрашивается, для чего же тогда в пакете Mathcad есть и численная математика, если задачу можно просто и красиво решить с помощью символьной математики? Дело в том, что символьная математика, нацеленная на выдачу всех решений в виде формул (абсолютная точность!), часто не справляется с более-менее сложной задачей, и это показано на рис. 3 и 4.

$$\boxed{\frac{L}{v+x} + \frac{L}{v-x^2} = t} \xrightarrow{solve\,,\,x} ?$$

Полученный результат этой символьной операции слишком длинный для отображения, но он может использоваться в последующих расчетах, если будет присвоен функции или переменной.

Рис. 3. Поиск корня уравнения: очень объемный ответ

На рисунке 3 в уравнении движения моторной лодки один из иксов был возведен в квадрат. Физический смысл уравнения пропал (складывается скорость с квадратом скорости!)[2], но сейчас не это главное. Важно то, что пакет Mathcad, решив это чуть усложненное уравнение, не смог вывести на дисплей ответ – настолько он оказался громоздким. Но это еще полбеды. Настоящая «беда» показана на рис. 4 для еще более усложненного уравнения. Если, например,

[2] А такими «нефизическими» формулами заполнены все учебники и задачники по математике. И это очень плохо. Хорошо тогда, когда за формулой скрывается какая-нибудь физическая реальность ("натуральная" математика).

один икс возвести в квадрат, а другой в куб (рис. 4), то символьная математика Mathcad «поднимет руки вверх и скажет: «Сдаюсь!».

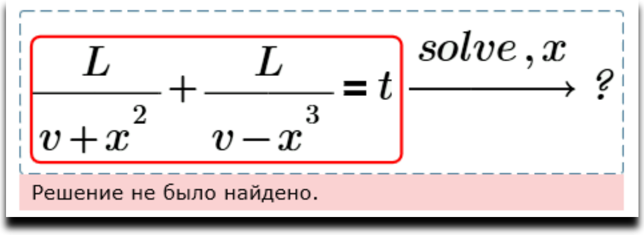


Рис. 4. Поиск корня уравнения: решение не найдено

Но если в константы этого «нефизического» уравнения подставить безразмерные численные значения, то хотя бы один действительный корень у этого уравнения найти удастся – см. рис. 5, где данная задача решена графически.

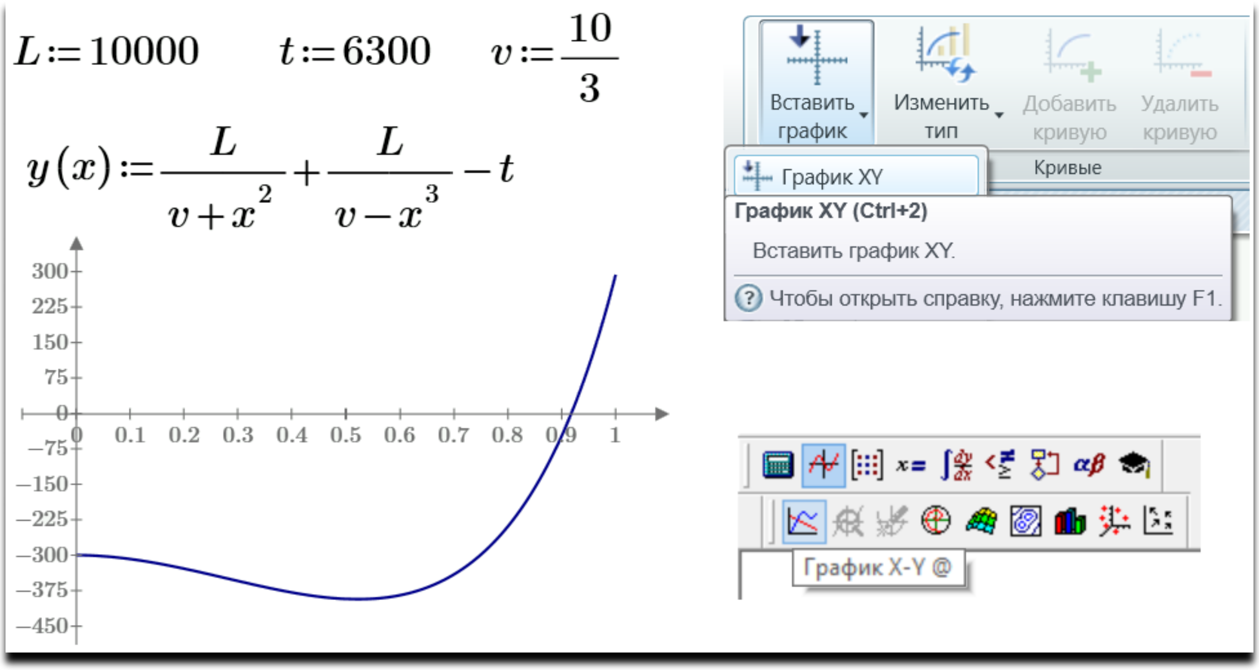


Рис. 5. Графический поиск нуля функции

1. root + root

Из рисунка 5 видно, что у нашего уравнения, превращенного в функцию пользователя переносом переменной t в левую часть уравнения, есть как минимум один действительный корень в районе 0.9. Уточнить численное значение этого корня поможет встроенная в Mathcad функция **root** – см. рис. 6 и 7.

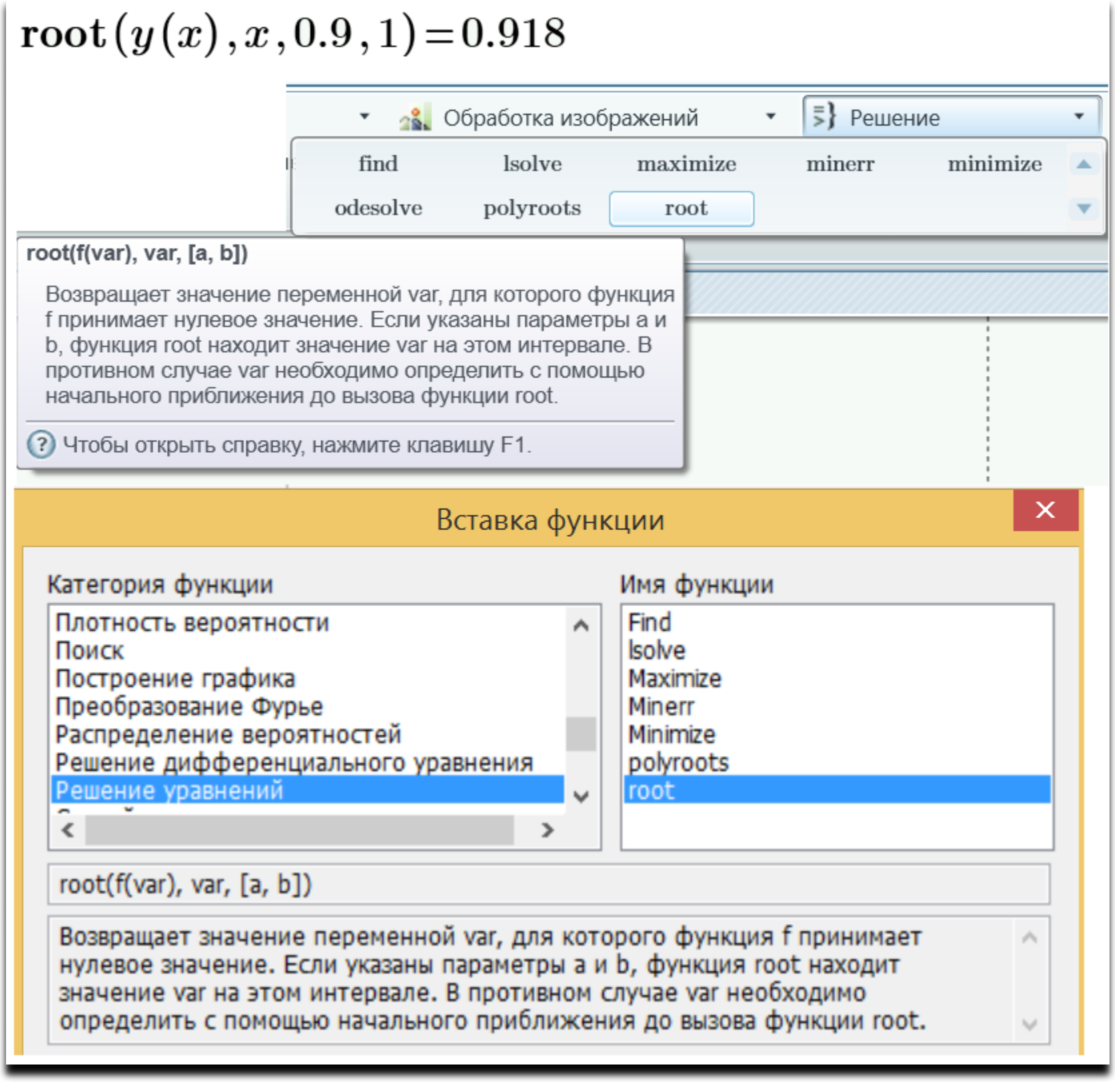


Рис. 6. Работа в среде Mathcad встроенной функции root с четырьмя аргументами

На рисунке 6 показан вызов функции **root** с четырьмя аргументами, а на рис. 7 с двумя. В обеих случаях ответ выведен с точностью в три знака после десятичной точки. Но можно вывести и большее число знаков – до 15. В первом случае нуль функции **y(x)** ищется методом деления пополам на интервале, заданном третьим и четвертым аргументами функции **root** (см. авторскую анимацию этого метода на сайте http://communities.ptc.com/videos/1468). Во втором случае (рис. 7) нуль функции рассчитывается методом секущих с опорой на первое приближение $x := 1$ (http://communities.ptc.com/videos/1466). В среде Mathcad для вычисления нуля функции пользователя фактически есть две одинаковые по имени, но разные по своей сути встроенные функции **root**.

$$x := 1 \quad \mathrm{root}(y(x), x) = 0.918$$

Рис. 7. Работа в среде Mathcad встроенной функции root с двумя аргументами

На рисунке 8 показана работа функции **root** на довольно простом примере – с функцией пользователя **sin(x)/x**, у которой бесконечное число нулей с периодом π. На интервале 2-7 функция **y(x)** имеет два нуля (π и 2π), но четырехаргументная функция **root** ответ не дала, так как функция **y(x)** имеет одинаковый знак на концах этого отрезка. На отрезке 1-17 нулей уже пять, один из которых (9.425) найден четырехаргументной функцией **root**. На концах отрезка 1-17 функция **y(x)** имеет разные знаки. При первом приближении, равном 0.01 двухаргументная функция **root** выдала не ближайший нуль (3.14), а «очень-очень дальний»: 298.451. Понять эти особенности применения функции **root** можно только после детального изучения численных методов, заложенных в эту функцию.

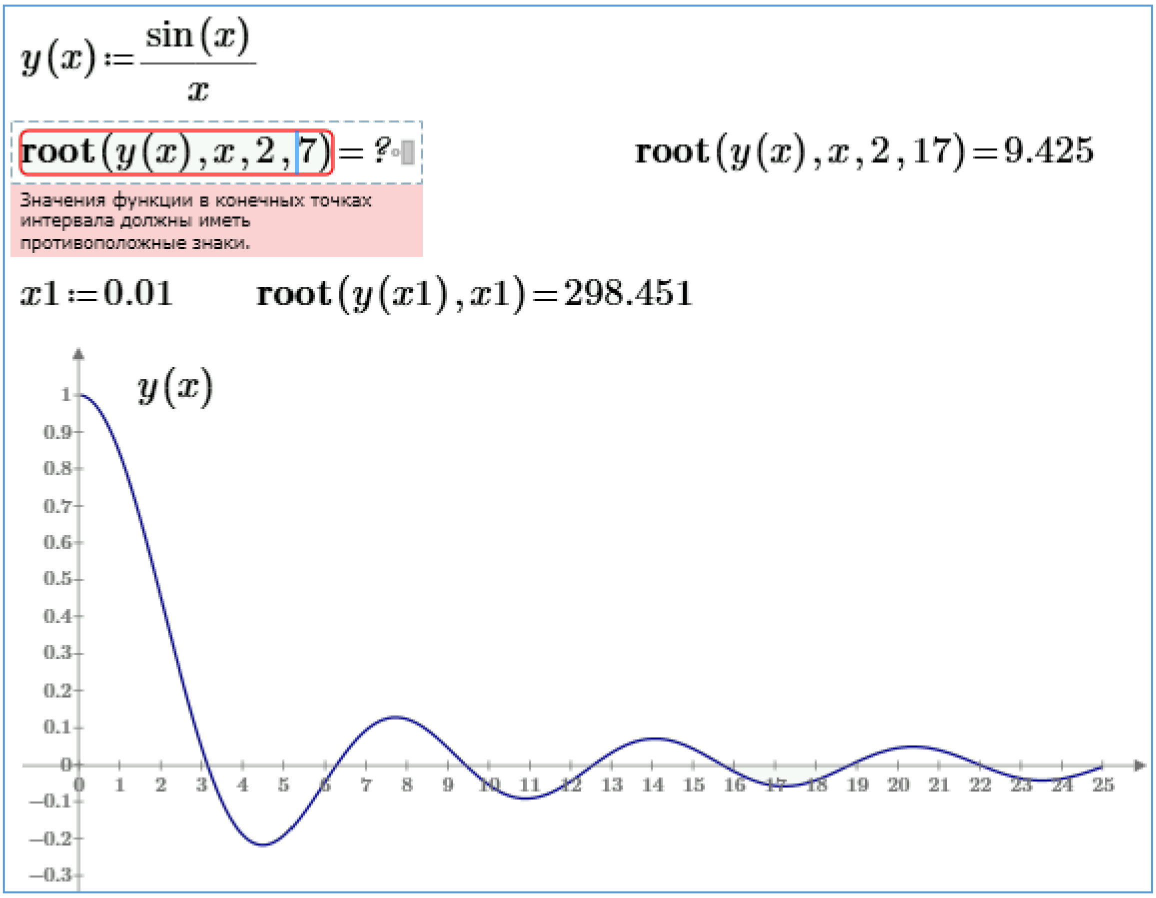


Рис. 8. Особенности работы функции **root**

Ранее мы отметили, что символьная математика Mathcad оперирует не числами, а символами – самими переменными, хранящими или не хранящими числа. Но это не совсем так.

Если какая-либо переменная выражения хранит численное значение, то символьная математика будет работать не с самой переменной (с символом), а с числом, хранящимся в этой переменной. На рисунке 3 была показана осечка символьной математики Mathcad при решении довольно простого уравнения. Но если переменным этого уравнения кроме переменной **x** задать численные значения, то символьный оператор **solve** успешно справится с задачей – см. рис. 9.

$$\frac{L}{v+x^{2}}+\frac{L}{v-x^{3}}=t\xrightarrow{solve,x}\begin{bmatrix}0.91753907432064754652\\-0.10072745491075931273-0.504473077723681i\\-0.10072745491075931273+0.50447307772368065275i\\-0.35804208224956446053-1.43206766221807i\\-0.35804208224956446053+1.4320676622180746717i\end{bmatrix}$$

Рис. 9. Численный ответ символьного оператора

На рисунке 9 показано, что «символьный» оператор **solve** в отличие от «численной» функции root выдал все четыре корни уравнения (один действительный и три комплексных) без установки интервала или первого приближения. Кроме того, если численная математика при выводе ответа «на печать» по умолчанию, как мы уже отметили, ограничивается тремя знаками после десятичной точки, то символьный оператор **solve** в этом случае выдал численные решения с двадцатью знаками после запятой. При «численном» ответе количество значащих цифр можно увеличить до 15, а при символьном до 250.

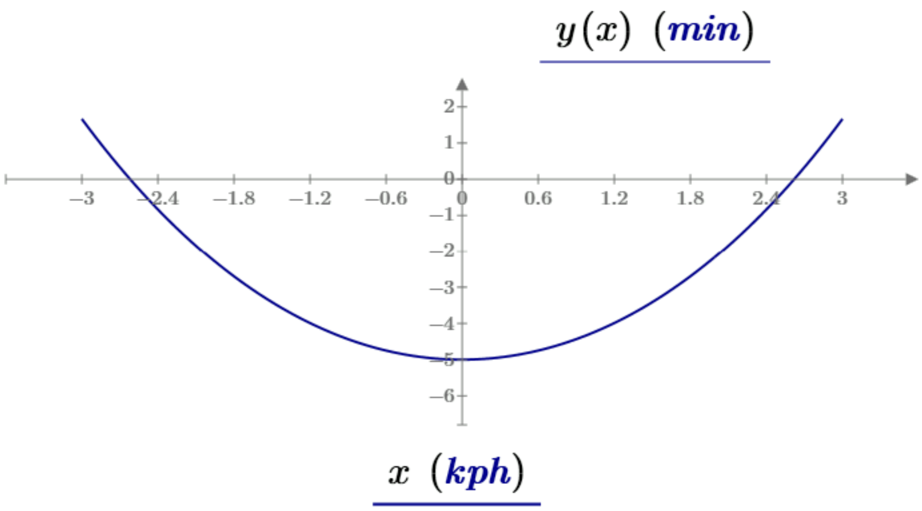
Примечание. Лишить переменную ее численного значения для последующих аналитических преобразования можно операторами: $clear_{sym}(a)$ (Mathcad Prime) и a:=a (Mathcad 15).

Но если наше уравнение с численными константами (см. рис. 9) и дальше усложнять, то на каком-то этапе оператор **solve** не сможет найти корни. Функция же **root** по-прежнему будет выдавать корень, правда, лишь один из многих и с опорой на заданный интервал поиска (рис. 6) или на первое приближение (рис. 7). При этом задавать интервал поиска придется, исходя из уверенности, что корень на этом интервале имеется, а метод секущих при неправильном первом приближении вообще не выдаст нужного результата. Это такой своеобразный компромисс. Отсюда общее правило: поставленную математическую задачу нужно стараться сначала решить аналитически в общем виде, не придавая переменным конкретных численных значений (рис.1) или придавая отдельным или всем переменным численные значения (рис. 9). Если же это не получается, то придется переходить к поиску частных решений численными методами.

На рисунке 10 показано использование графика и функции **root** в двух ее вариантах для решения нашей задачи о моторной лодке. Интересный факт. Двухаргументная функция **root** при первом приближении, равном нулю, выдала не ожидаемый положительный, а отрицательный корень. Этот нюанс можно понять если опять же учесть особенности метода секущих при поиске нулей функции и после построения графика не на отрезке от -3 до 3 kpm, а на отрезке -13 до 13 kpm, охватывающем точки разрыва, что мы сделаем ниже.

$$t := 1\ \mathbf{hr} + 45\ \mathbf{min} \qquad v := 12\ \mathbf{kph} \qquad L := 10\ \mathbf{km}$$

$$y(x) := \frac{L}{v+x} + \frac{L}{v-x} - t \qquad x := -3\ \mathbf{kph}, -2.99\ \mathbf{kph} .. 3\ \mathbf{kph}$$



$$\mathrm{root}(y(x), x, 0\ \mathbf{kph}, 10\ \mathbf{kph}) = 2.619\ \mathbf{kph}$$

$$\mathrm{root}(y(x), x, 0\ \mathbf{kph}, -10\ \mathbf{kph}) = -2.619\ \mathbf{kph}$$

$$x := 0\ \mathbf{kph} \qquad \mathrm{root}(y(x), x) = -2.619\ \mathbf{kph}$$

Рис. 10. Графическое и численное (функция **root**) решение задачи о моторной лодке

Уравнение движения моторной лодки, показанное на рис. 1, можно преобразовать в квадратное. К такому приему часто прибегают в школах, т.к. школьники, как правило, могут аналитически решать только квадратные уравнения. Как такое преобразование можно сделать в среде Mathcad, показано на рис. 11.

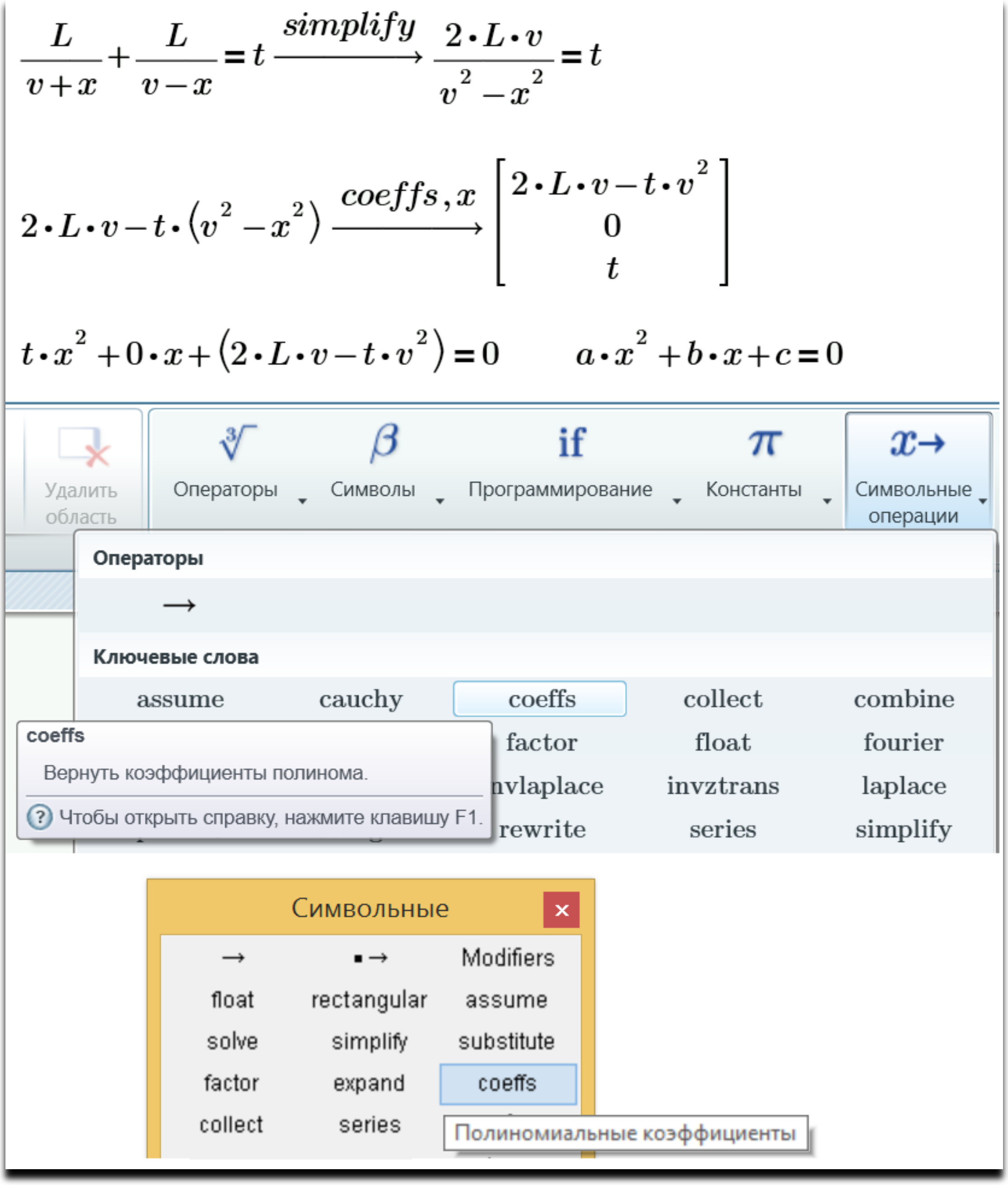


Рис. 11. Определение коэффициентов полинома

Оператор символьной математики **simplify** (упростить) приводит левую часть исходного выражения к общему знаменателю, умножает обе части уравнения на полученный знаменатель и переносит все слагаемые в левую часть уравнения (рис. 11). Таким способом выделяется функция, которая приравнена к нулю. Оператор **coeffs** находит коэффициенты этой функции-полинома (в данном случае квадратного). Это квадратное уравнение можно решить оператором **solve**, но… см. ниже.

Примечание. Квадратное уравнение, полученное после преобразования исходного уравнения движения моторной лодки, не эквивалентно исходному, а только имеет с ним два одинаковые корня. В этом можно убедиться, взглянув на графики, показанные на рис. 12.

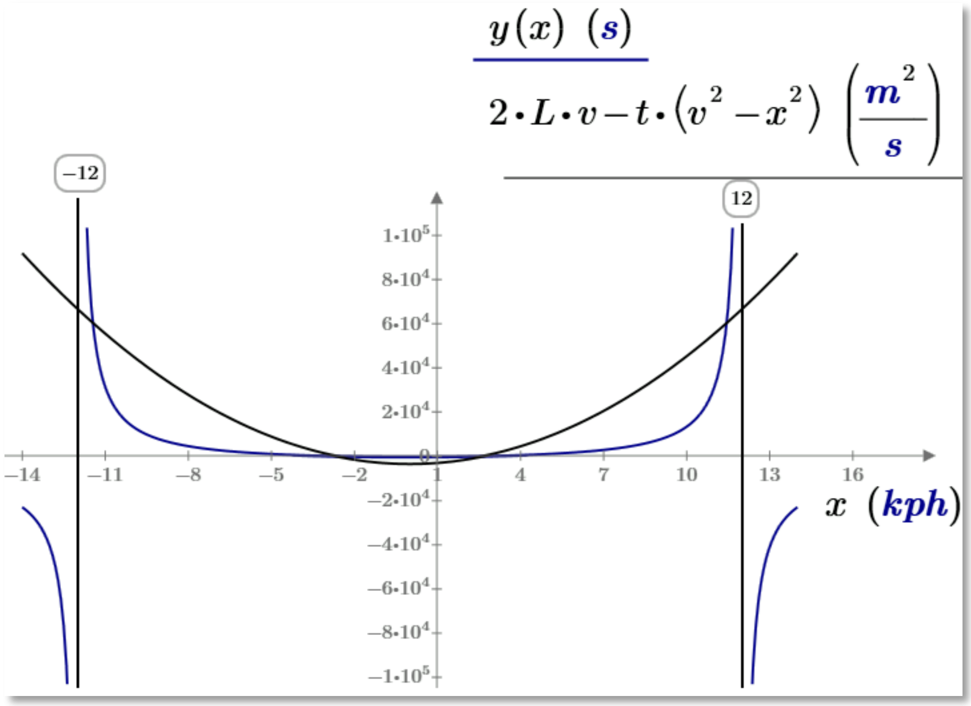


Рис. 12. Исходное и квадратное уравнение движения моторной лодки

2. polyroots

Если выражение представляет собой полином (квадратный, например, см. выше), то можно найти все его нули, использовав еще одну функцию из «великолепной семерки Mathcad» – функцию **polyroots**, имеющую в качестве аргумента вектор коэффициентов полинома и возвращающую его нули (вектор, который на один элемент короче вектора-аргумента – см. рис. 13), т.е. решение нашей задачи.

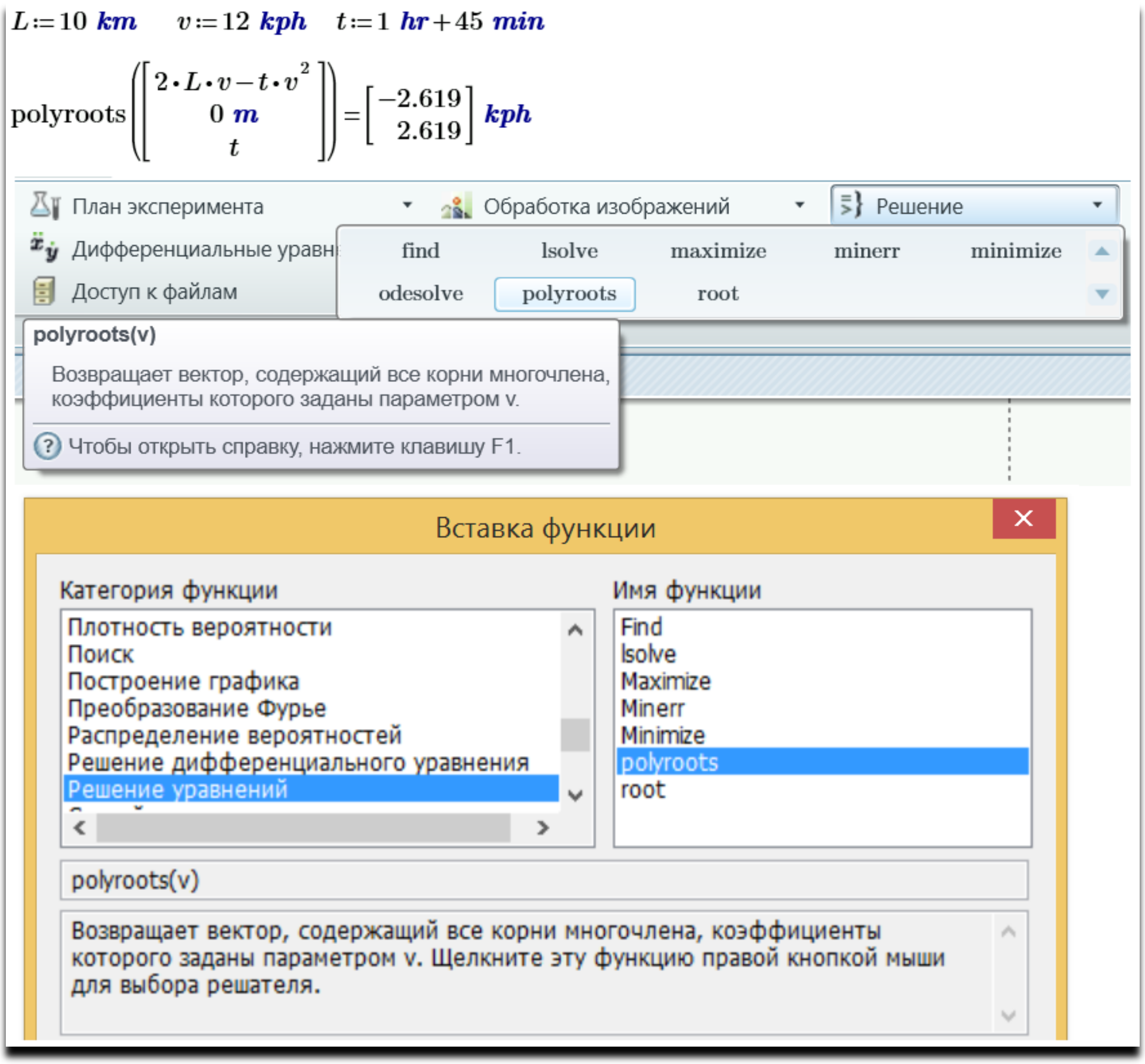


Рис. 13. Поиск нулей полинома в среде Mathcad

В нашей задаче о движении моторной лодки полином оказался квадратным и его, повторяем, можно было решить через оператор символьной математики **solve** (см. рис. 1). Но в случае полиномов высокой степени оператор **solve** не сработает. Тут и пригодится численная встроенная функция **polyroots**.

3. Find

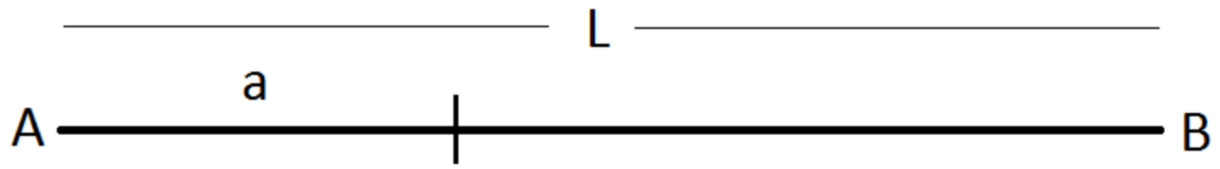
Показать работу еще одной функции из «великолепной семерки Mathcad» – функции **Find** – поможет нам еще одна дополнительная моторная лодка.

Задача 2. От двух пристаней на реке навстречу друг другу[3] одновременно отходят две моторные лодки и встречаются в точке, делящей этот участок реки в золотом соотношении[4].

[3] Задача. Навстречу друг другу по одноколейной дороге одновременно вышли два поезда. И не столкнулись. Почему? Ответ: не судьба! ☺

Найти скорость второй лодки v_2 и скорость течения воды в реке **v**, если известна скорость первой лодки $\mathbf{v_1}$, расстояние между пристанями **L** и время **t** движения лодок до встречи.

Золотое сечение в эту задачу вставлено неслучайно. Можно поискать в своей памяти или в справочниках (бумажных или интернетовских) формулу золотого сечения. Но можно поступить иначе [2]: в среде Mathcad написать само уравнение золотого сечения применительно к нашей задаче о моторных лодках и решить его аналитически, получив нужную формулу – см. рис. 14.



$$\frac{a}{L-a}=\frac{L-a}{L}\xrightarrow{solve,a}\begin{bmatrix}\frac{L\cdot\left(\sqrt{5}+3\right)}{2}\\ -\frac{L\cdot\left(\sqrt{5}-3\right)}{2}\end{bmatrix}\qquad L:=10\ km\qquad \begin{bmatrix}\frac{L\cdot\left(\sqrt{5}+3\right)}{2}\\ \frac{L\cdot\left(3-\sqrt{5}\right)}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}26.18\\ 3.82\end{bmatrix}km$$

Рис. 14. Решение уравнения золотого сечения в среде Mathcad

На рисунке 14 оператор **solve** выдал два решения, из которых нам подходит только второе – 3.82 km. Первое же решение (26.18 km) лежит вне рассматриваемого отрезка. Символьная математика, повторяем, выдает все ответы с абсолютной точностью, из которых нужно еще уметь выбрать подходящее.

На рисунке 15 показано решение в среде Mathcad Prime и Mathcad 15 задачи о двух моторных лодках, сводящееся к решению системы двух уравнений с двумя неизвестными. Решение найдено с помощью функции **Find**, требующей начального приближения к решению.

---

[4] Мы имеем в виду знаменитое «Золотое сечение», т.е. такое деление отрезка на две неравные части, при котором длина меньшей части отрезка так относится к длине большей части, как длина большей части относится к длине всего отрезка (см. рис. 14). На сайте http://communities.ptc.com/videos/1521 показана авторская анимация метода золотого сечения при численном поиске на заданном отрезке максимума функции одного аргумента.

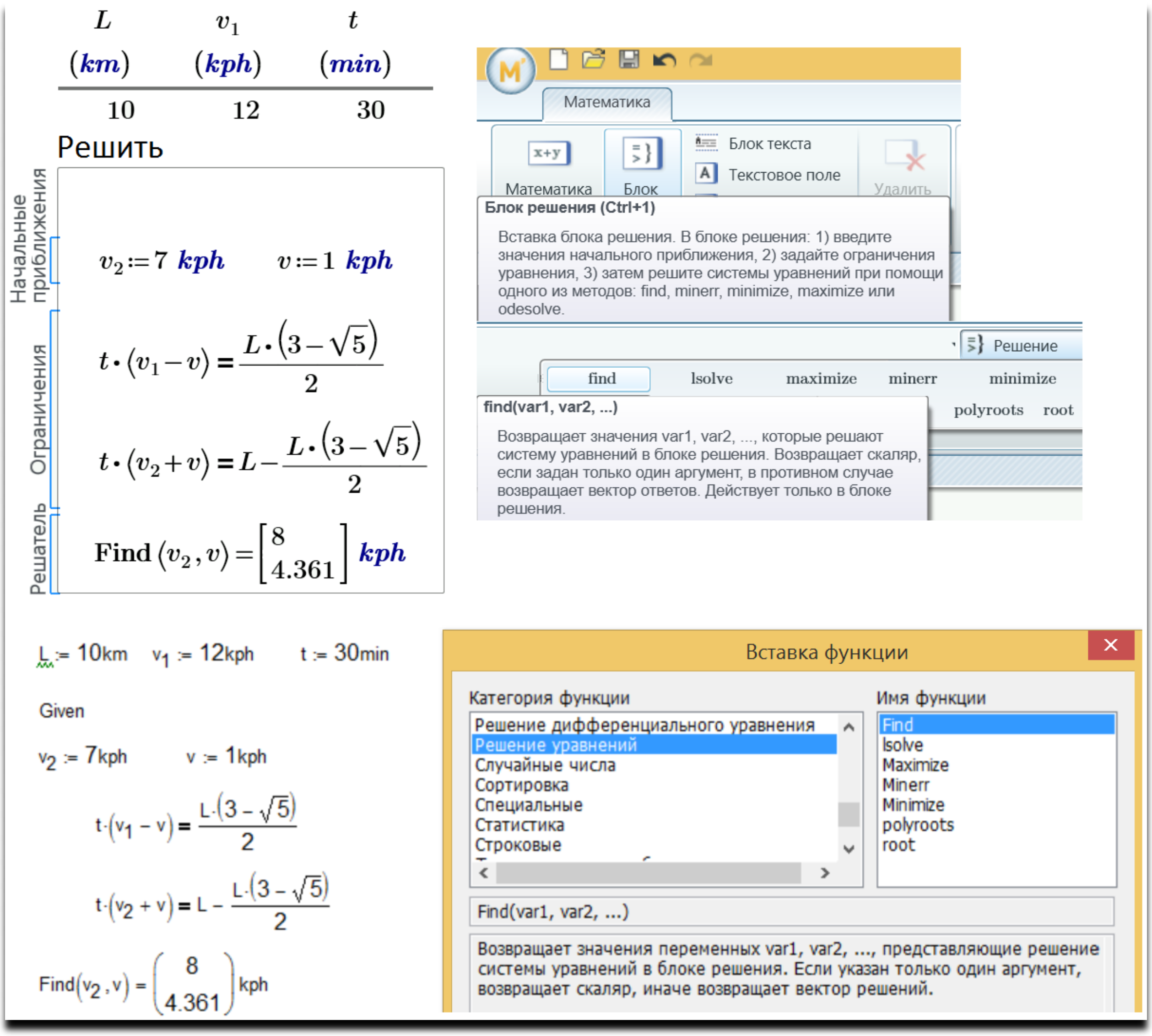


Рис. 15. Решение систем алгебраических уравнений с помощью функции **Find**

Встроенная функция **Find** меняет значение своих аргументов, начиная от начального приближения так, чтобы уравнения системы превратились в тождества. Вернее, почти в тождества. Дело в том, что и обе функции **root** (рис. 7 и 9) и функция **Find** (рис. 7) возвращают значения, отличающиеся от точных решений на величину, не превышающую по модулю значения, хранящегося в системной переменной **CTOL**. Ведь что такое корень уравнения?! Корень – это значение переменной, при котором уравнение превращается в тождество. Но при численном (приближенном!) решении найти точный корень не всегда удается. Подстановка приближенного значения корня в уравнение приводит к тому, что правые и левые части уравнения отличаются друг от друга на значение, хранимое в переменной **CTOL**, которое по умолчанию равно 0.001. Это значение можно менять, решая конкретную задачу. На сайте с авторской анимацией http://communities.ptc.com/videos/1472 можно видеть особенности поиска четырех корней системы двух нелинейных уравнений: уравнения эллипса и уравнения лемнискаты Бернулли. На сайте http://communities.ptc.com/videos/2418 можно увидеть анимацию, как выбор первого приближения влияет на найденный корень. Более подробно о методах решения, заложенных в функцию **Find**, можно почитать здесь [3]. На сайте http://communities.ptc.com/videos/1472 помещена авторская анимация последовательного численного поиска корней двух нелинейных у равнений методом Ньютона.

4. lsolve

Можно понять, что система двух алгебраических уравнений движения двух моторных лодок навстречу друг другу, показанная на рис. 15, *линейна*, и применить к ней еще одну функцию из «великолепной семерки Mathcad» – функцию **lsolve**, предназначенную для решения (solve) именно систем линейных (l) алгебраических уравнений (СЛАУ) – см. рис. 16.

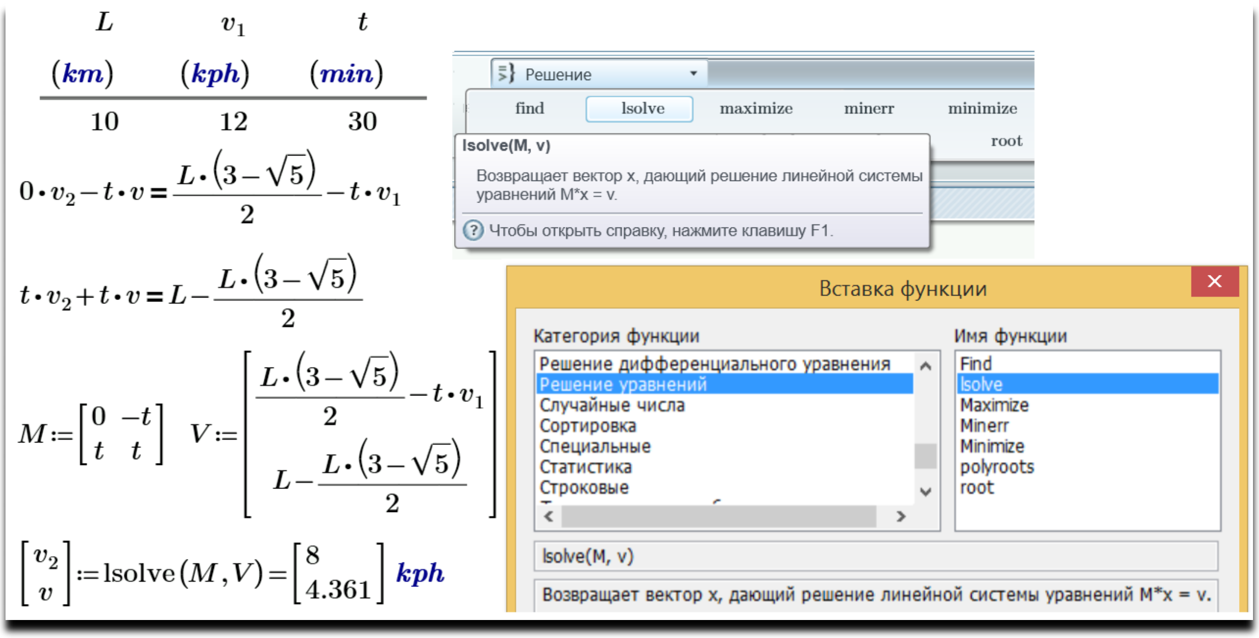


Рис. 16. Решение СЛАУ в среде Mathcad

На рисунке 16 система уравнений, показанная на рис. 15, преобразована к виду классической линейной системы: слева неизвестные $\mathbf{v_2}$ и $\mathbf{v}$ со своими коэффициентами, справа свободные члены. Функция **lsolve** имеет два аргумента: матрицу коэффициентов при неизвестных СЛАУ (у нас это **M**) и вектор свободных членов **V**. Возвращает функция **lsolve** вектор найденных значений неизвестных. При решении СЛАУ с помощью функции **lsolve** (рис. 16) начальные предположения (см. рис. 15) вводить не надо.

5 и 6. Minimize & Maximize

Об очередной функции «великолепной семерки» — о функции **Minimize**, будет рассказано на примере *задачи оптимизации*, связанной также с «водным транспортом».

Задача 3. Определить крейсерскую скорость судна – скорость при которой затраты на его эксплуатацию будут минимальны.

Задача предельно упрощена – затраты на эксплуатацию судна состоят из двух частей: почасовой зарплаты экипажа, пропорциональной времени движения судна (обратно-пропорциональной скорости судна), и затрат на горючее, пропорциональных квадрату скорости судна (коэффициенты пропорциональности – **a** и **b**). Увеличивая скорость судна, мы экономим на зарплате экипажу, но при этом приходится больше тратить денег на горючее. Попробуем найти тут оптимальное решение!

На рисунке 17 показано решение этой типичной задачи оптимизации с помощью встроенной функции **Minimize** с графической иллюстрацией решения.

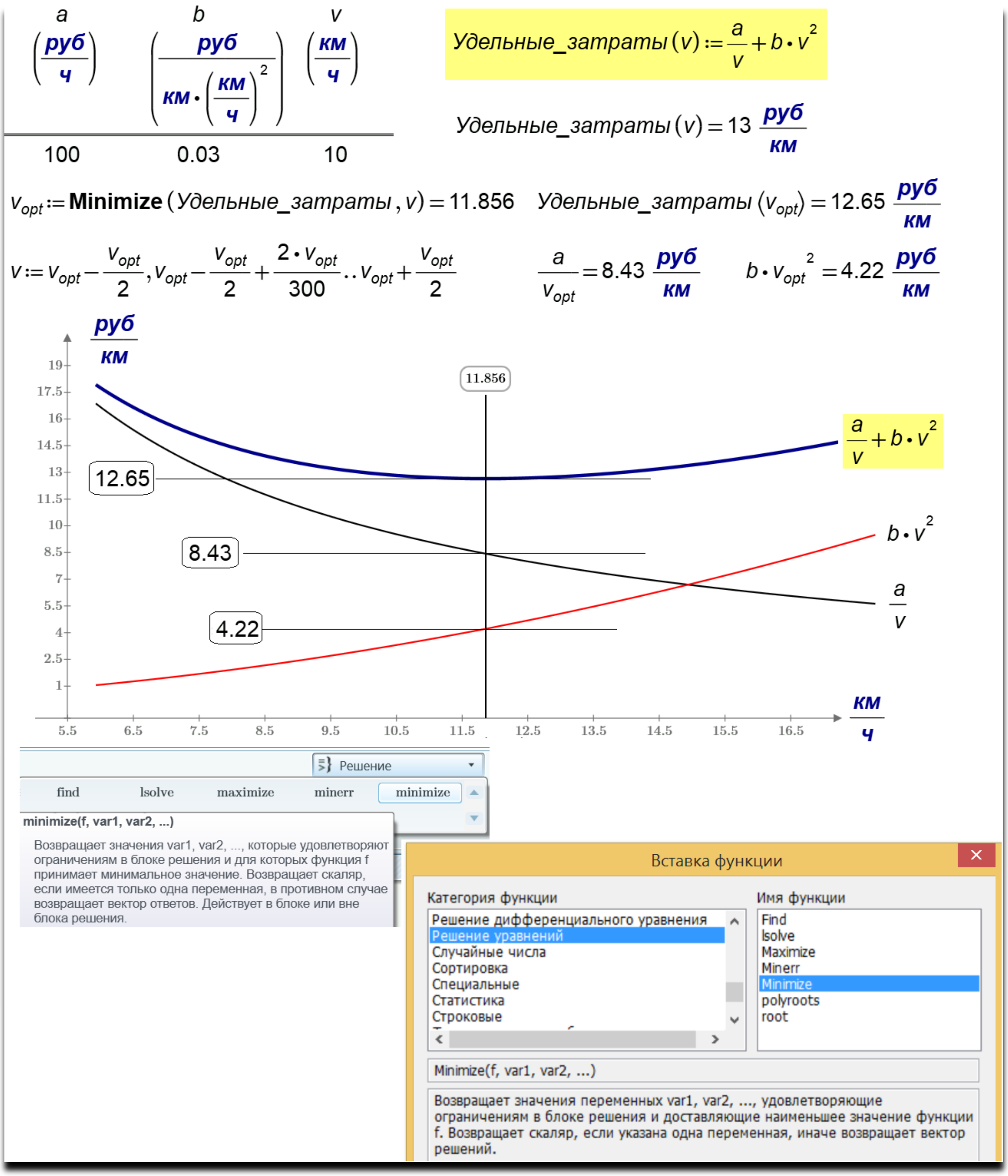


Рис. 17. Нахождение крейсерской скорости судна численной математикой Mathcad

Функция **Minimize** меняет значение своего второго аргумента, начиная от заданного предполагаемого значения (у нас это 10 км/ч) так, чтобы значение первого аргумента (целевой функции **Удельные_затраты**) приняло минимальное значение. Если бы мы не минимизировали затраты, а максимизировали, например, прибыль владельца судна, то нужно было бы при решении такой задачи функцию **Minimize** заменить на функцию **Maximize**. В оптимизационных задачах часто присутствуют ограничения – скорость судна, например, не может превышать максимально допустимую. В этом случае функции **Minimize или Maximize** нужно будет поместить в область Ограничения блока **Решить**, показанного на рис. 15.

Найти минимум нашей целевой функции **Удельные_затраты** можно и средствами символьной математики Mathcad, что показано на рис. 18.

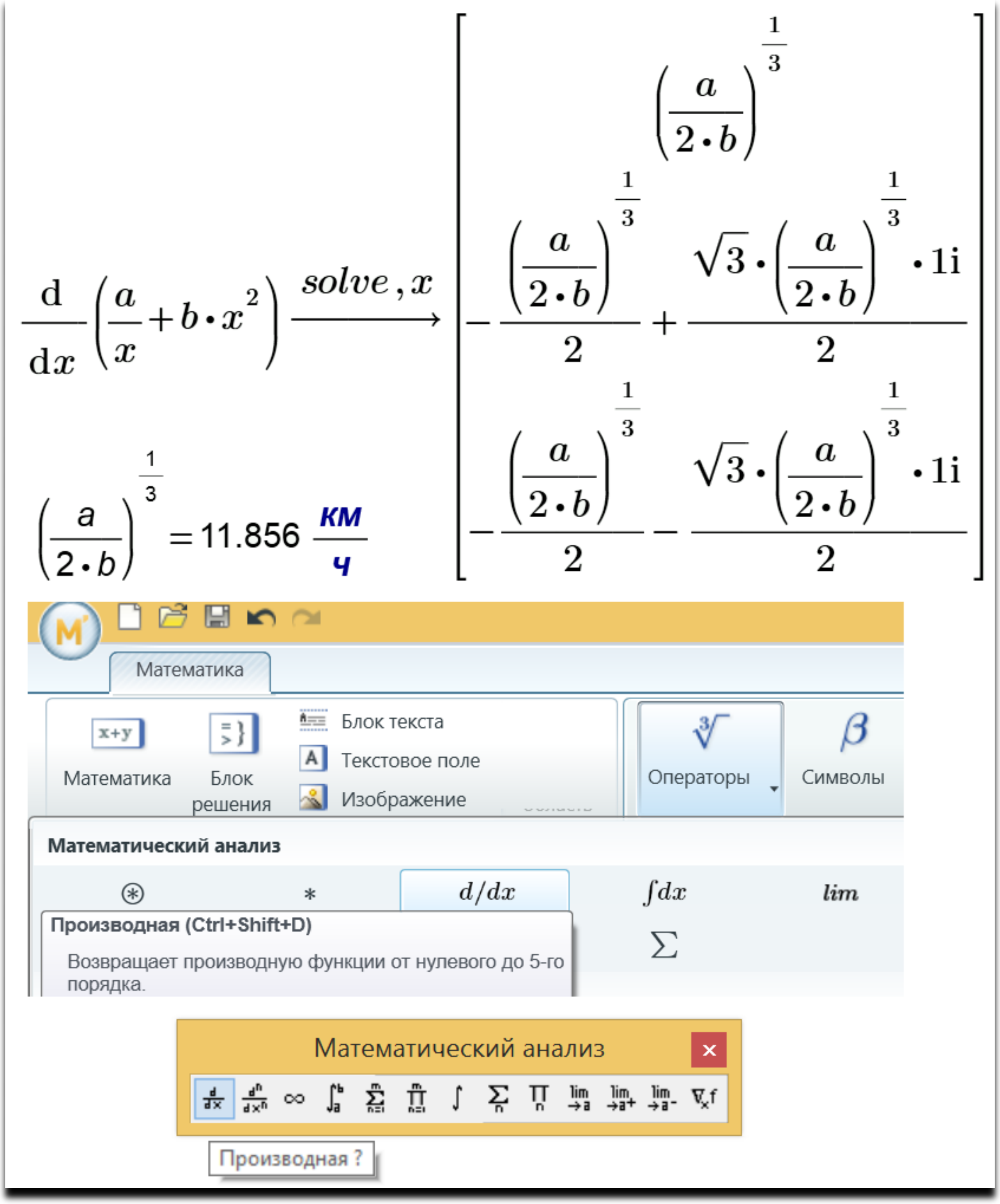


Рис. 18. Нахождение крейсерской скорости судна символьной математикой Mathcad

На рисунке 18 ведется поиск нулей первой производной функции по удельным затратам на километр пути судна. Но если затраты на топливо будут зависеть от скорости судна, взятой не во второй степени, а в степени n, то символьная математика уже не справится с такой усложненной задачей (рис. 19), и придется вернуться к численным методам решения задач (рис. 17).

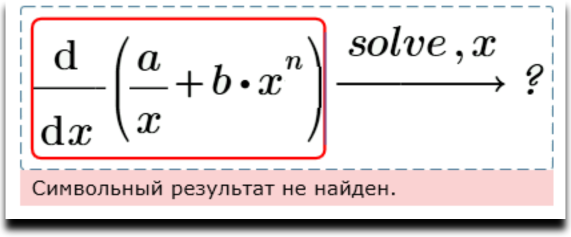


Рис. 19. Осечка при работе с символьной математикой Mathcad

7. Minerr

Последняя функция «великолепной семерки» Mathcad – это функция **Minerr (**Minimal Error – минимальная ошибка). Если функция **Find** (см. рис. 15) не находит решения системы уравнений, то она возвращает сообщение об ошибке. Функция же **Minerr** в такой ситуации возвратит не сообщение об ошибке, а значения своих аргументов (невязку системы), при которых система уравнений будет максимально приближена к системе тождеств – точку последнего приближения к решению. В старых версиях Mathcad не было функций **Minimize** и **Maximize**, и задачи оптимизации приходилось решать именно через функцию **Minerr**. На рисунке 20 показано, как эта функция решает задачу определения крейсерской скорости судна: при оптимальном движении затраты на эксплуатацию судна будут максимально приближены к нулю рублей на километр пути.

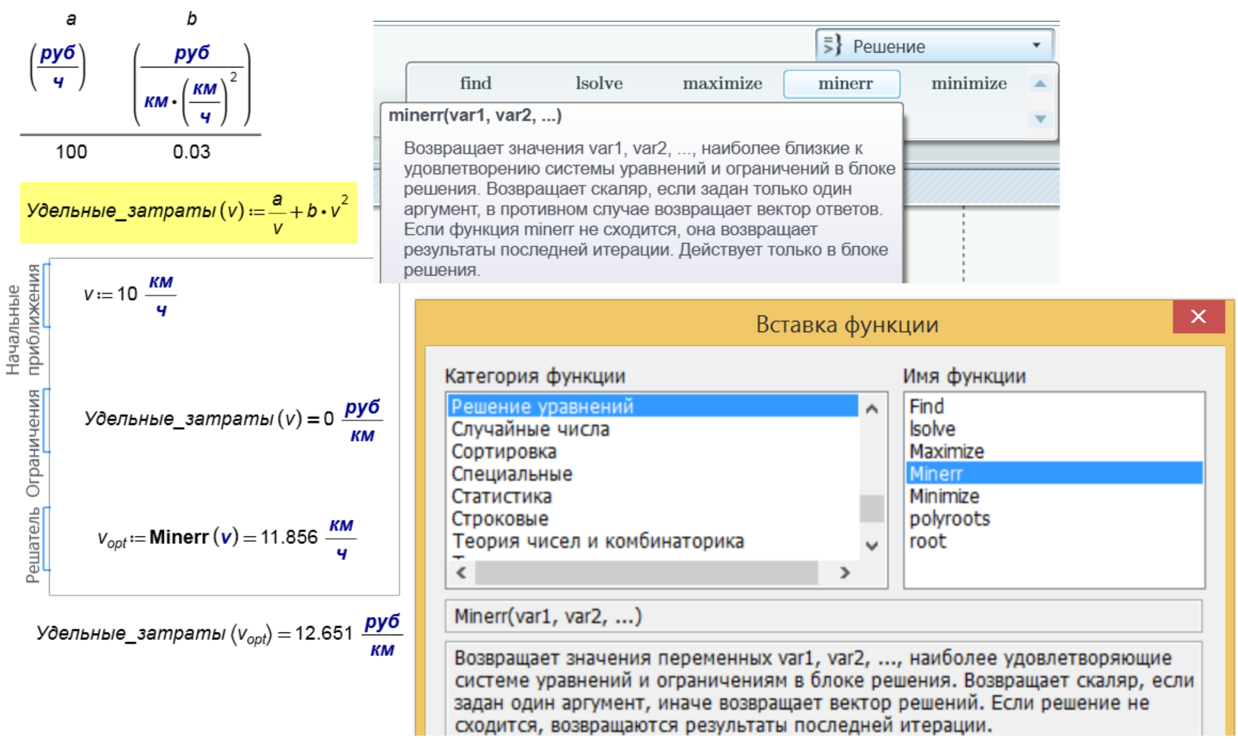


Рис. 20. Решение задачи оптимизации с помощью функции **Minerr**

Функцию **Minerr** можно считать ***главной*** в «великолепной семерке Mathcad», т.к. ею можно заменить и функцию **Find**, и функцию **root** (в двух ее вариантах), и функцию **polyroots**, и функцию **lsolve**, и в ряде случаев функции **Minimize** и **Maximize**. При использовании функции **Minerr** надо обязательно предусматривать проверку решений. Нередки случаи, когда решения могут оказаться ошибочными, чаще всего из-за того, что из нескольких корней находится нереальный (или не представляющий интереса) корень. Дело в том, что функция **Minerr** пытается найти максимальное приближение к искомому числу путем минимизации среднеквадратической погрешности решения. Следует заранее убедиться в том, что решение существует, и как можно точнее указать начальное приближение к решению.

Типы уравнений

Для того чтобы без проблем и правильно решать уравнения и системы уравнений, нужно знать не только специфику численных методов (см. выше), но и свойства самих уравнений. Математики, нацеленные на аналитические решения, уравнения с одним неизвестным относят к одному из четырех типов: алгебраические, рациональные, иррациональные и трансцендентные. Метод аналитического решения определяется типом решаемого уравнения.

Если полином $\boldsymbol{n}$-й степени приравнять нулю, то мы получим алгебраическое уравнение. Основная теорема алгебры говорит о том, что такое уравнение имеет ровно n корней. Но во-первых, не все корни будут действительными и, возможно, вообще не существует ни одного действительного корня. А во-вторых, корни могут совпадать, т.е. быть кратными. Доказано, что не существует формул для корней алгебраического уравнения выше пятой степени. Но и формулы для $\boldsymbol{n} = 5$ настолько громоздки, что их использование лишено какой-либо практической пользы. Mathcad может решать алгебраические уравнения вплоть до четвертой степени (даже символьно).

Если уравнение более высокой степени допускает частичное разложение на множители, то оно тоже может быть символьно разрешимо. Тут уместно вспомнить школьный метод подбора целого корня и теорему Безу. Если алгебраическое уравнение имеет целые коэффициенты, и делители свободного члена известны, то можно подобрать целый корень x_0 (если такой имеется) «вручную», либо использовав Mathcad. Поделив полиномиальную функцию на двучлен ($x - x_0$), получим алгебраическое уравнение степени на единицу меньше. Если целый корень не подбирается, то такое уравнение теряет свои преимущества и становится в один ряд с другими типами уравнений.

Рассмотрим теперь рациональные уравнения. Такие уравнения содержат исключительно дроби, в числителях и в знаменателях которых находятся только многочлены. С помощью Mathcad эти уравнения легко формально преобразовать в алгебраические. Правда, при таких преобразованиях может измениться область допустимых значений преобразуемого уравнения, т.к. знаменатель какой-то дроби может оказаться в числителе. Это порождает проблему посторонних корней, а поэтому решение рационального уравнения требует обязательной проверки (подстановки полученных чисел в **исходное** уравнение). Если все дроби в рациональном уравнении «одноэтажные», то проверку можно заменить предварительным поиском области определения рациональной функции, приравняв нулю все знаменатели. Если дроби «многоэтажные», то такая процедура потребует априорных упрощений. Если хоть в одном из знаменателей находится многочлен третьей или более высокой степени, то поиск допустимых значений оборачивается поиском корней нового алгебраического уравнения. В таком случае проверка – более экономный способ отсечения посторонних корней.

Иррациональными называют такие уравнения, которые помимо рациональных функций содержат радикалы (корни целых степеней – квадратные, кубические и т.п.), а все подкоренные выражения являются рациональными функциями. Известно, что радикалы четных степеней определены не везде в действительной области. Это обстоятельство приводит к необходимости находить область определения прежде, чем решать само уравнение. Фактически само уравнение следует сопроводить неравенствами, которые Mathcad тоже будет решать. Если этого не слелать, то уравнение по умолчанию будет решаться на области комплексных чисел, которые для большинства пользователей, исследующих реальные физические и другие задачи, попросту бесполезны.

Вторая проблема, возникающая при решении уравнений с радикалами четных степеней – появление посторонних корней. Ведь основным методом решения иррационального уравнения является метод возведения обеих частей уравнения в нужную степень, а при возведении в четную степень как числа $\boldsymbol{x}$, так и числа $\boldsymbol{-x}$, мы получим один и тот же результат. Следует помнить, что лишние корни вполне могут принадлежать области определения функции, приравниваемой нулю. В итоге получается новое уравнение, строго говоря, не равносильное исходному. Заметим, что есть аналитические способы решения и уравнений с кубическими (и другими нечетными) радикалами, которые тоже приводят к посторонним корням. Но тут снова можно прибегнуть к проверке, т.е. подстановке полученных числовых величин в исходное уравнение.

Класс трансцендентных уравнений очень обширен. В него входят показательные, логарифмические, тригонометрические уравнения, а также уравнения, содержащие различные (а не только степенные) элементарные функции и композиции элементарных функций. Помимо проблем, связанных с областью определения, в таких уравнениях при наличии тригонометрических функций могут возникнуть проблемы с периодичностью решений.

В зависимости от того, сколько неизвестных входят в систему уравнений, можно выделить два типа систем: системы с одним неизвестным и системы с несколькими неизвестными.

Классификация всех систем – занятие бессмысленное, поскольку специальные эффективные (матричные) методы решения разработаны только для систем линейных алгебраических уравнений с несколькими неизвестными. Их еще называют линейными алгебраическими системами. Все другие системы решаются с помощью одних и тех же численных методов.

Системы с одним неизвестным можно решить так: найти по отдельности решение каждого уравнения системы, а потом выбрать одинаковые для всех уравнений числа. Часто можно поступить проще: сначала решить то уравнение, которое имеет наименьшее число корней, а потом все эти корни подставить в каждое из оставшихся уравнений системы.

Нелинейные системы с несколькими неизвестными решаются численными итерационными методами, требующими задания начального приближенного значения искомых неизвестных.

Выбор метода

Посмотрим, чем же стоит руководствоваться при выборе метода решения каждого конкретного уравнения.

Для вычисления всех корней алгебраического уравнения не выше пятой степени рекомендуется использовать символьные вычисления а также функцию polyroots, поскольку она не требует проведения процедуры локализации корней. Во всех остальных случаях придется либо локализовать корень на конкретном отрезке, либо использовать итерационные методы, имея достаточно хорошее начальное приближение и выбрав подходящую точность вычислений.

Прежде чем начать поиск корней уравнения, нужно на нескольких различных интервалах построить график функции, приравниваемой к нулю. Поведение графика даст ответ на несколько вопросов. Имеет ли функция действительный корень? Где он расположен? Сколько всего действительных корней? Отделены ли корни друг от друга или имеют некоторую точку скопления? Можно ли считать, что корни периодически повторяются, и чему равен период? Есть ли у функции точки разрыва, и насколько далеко от них лежат действительные корни? Следует ли уменьшить значение системной переменной **CTOL**, чтобы различить два близко расположеных корня?

Если ответы на все вопросы получены, то можно определиться с методом и точностью вычислений.

Заметим, что если проигнорировать этап построения графика функции, то, например, функция **root** может сработать некорректно. Этого можно избежать, построив предварительно график функции. Правда, по графику нельзя определить, попадет ли в процессе решения в точку локального минимума невязки последовательность приближений. Если причина ошибки в этом, то нужно задать другое начальное приближение. Чем точнее выбрано начальное приближение корня, тем быстрее итерационный процесс будет сходиться.

Результатом решения системы будет численное или символьное значение вектора неизвестных величин. При символьном решении не надо вводить начальные значения, а при численном – надо. Если в системе всего два неизвестных и, то построение трехмерных графиков функций, входящих в систему, позволит удачно подобрать начальное приближение для решения системы. В случае неудачного начального приближения появится сообщение об отсутствии сходимости последовательности итераций. Тогда придется начать все сначала, задав другое первое приближение.

Широкое использование компьютеров для поиска корней уравнений приводит к тому, что многие пользователи перестали чувствовать разницу между алгебраическими, рациональными, иррациональными и трансцендентными уравнениями. Более того, все эти уравнения стали называться просто алгебраическими. Так в документации Mathcad сказано, что этот пакет может численно решать и системы алгебро-диффренциальных уравнений – системы, где присутствуют и алгебраические и дифференциальные (см. ниже) уравнения. Хотя там могут быть и другие типы уравнений – рациональные, иррациональные и трансцендентные.

7+1. Odesolve

Наша самая первая задача о движении моторной лодки туда и обратно (см. рис. 1 и 2) имела существенное допущение: скорость лодки была постоянной. Но это условие выполнить практически невозможно, т.к. лодка по прибытии в один конец пути должна сбросить скорость, развернуться и пуститься в обратный путь. Можно, конечно, переформулировать задачу так: лодка достигает конечной точки и в этот момент эстафету принимает другая моторная лодка, движущаяся с такой же скоростью, но в обратном направлении. Приблизить задачу об одной лодке к реальным условиям нам поможет еще одна встроенная функция Mathcad – функция **Odesolve**, предназначенная для решения (solve) обыкновенных (o - ordinary) дифференциальных (d) уравнений (e – equation) и их систем. Если при численном решении алгебраических уравнений мы получаем числа, подстановка которых в уравнения превращает их в тождества, то при решении дифференциальных уравнений и их систем мы получаем уже не числа, а *функции*, подстановка которых превращает исходные дифференциальные уравнения в тождества. Заметим, что функция **Odesolve** в группе «Решение уравнений» стала восьмой (7 + 1 – см. выше) только в среде Mathcad Prime. В Mathcad 15 в группе «Решение уравнений» ее нет.

Итак, задача 4. На моторной лодке, движущейся со скоростью **v**, заглушили мотор. Спрашивается, как будут меняться во времени пройденный ею путь? Задача предельно упрощена – на лодку действует сила трения воды и воздуха, пропорциональная квадрату скорости лодки (см.

рис. 17, 18, 19 и 20, где этот квадрат фигурировал). На рисунке 21 показано решение и графическое отображение этой задачи с помощью функции **Odesolve**.

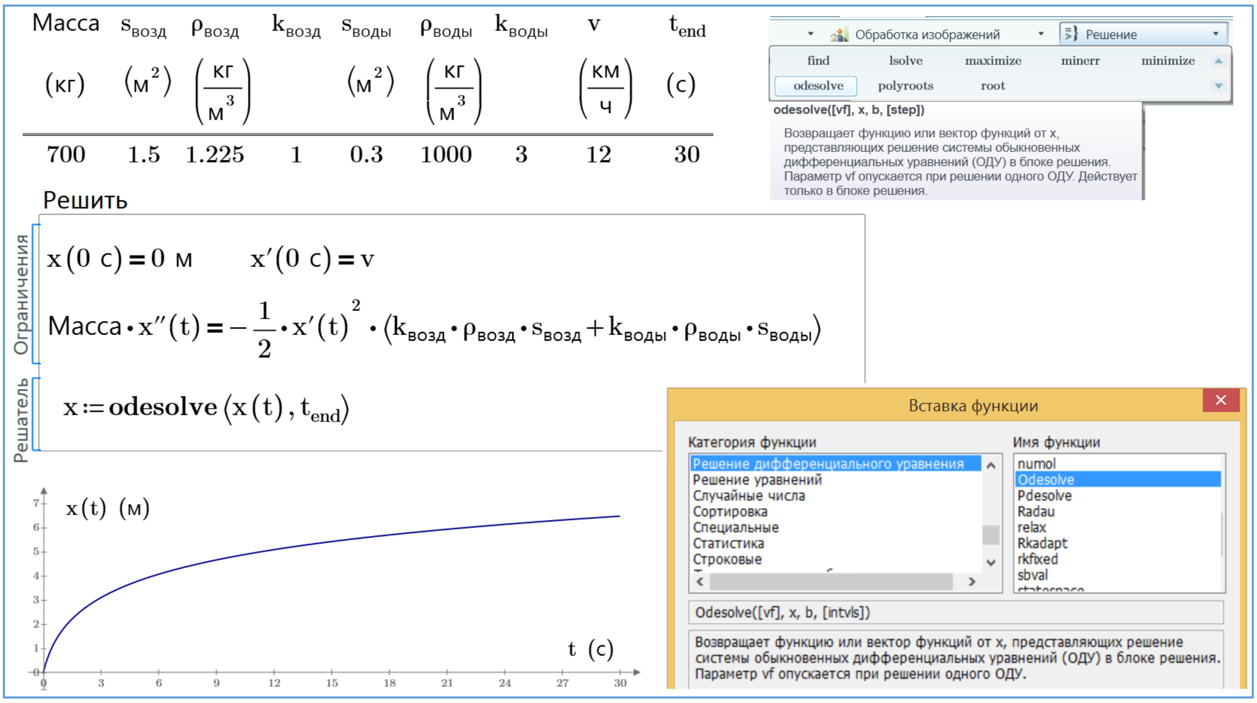


Рис. 21. Решение задачи об остановки лодки

Коэффициент пропорциональности между инерцией и силой трения, записанный в уравнении на рис. 21 (масса лодки, помноженная на ускорение – на первую производную скорости по времени), состоит из двух частей, связанных с трением о воздух надводной части лодки и трением о воду ее подводной части. Эти коэффициенты пропорциональны плотности ρ среды (воздуха или воды) и площади поперечного сечения надводной и подводной частей лодки S. В уравнение можно добавить силу тяги мотора и моделировать также старт моторной лодки и ее последующее движение с переменной и постоянной скоростью. Если скорость лодки станет постоянной, то дифференциальное уравнение превратится в алгебраическое: сила тяги мотора будет уравновешиваться силой сопротивления воды и воздуха.

Задачу об остановке моторной лодки мы решили численно: функция Odesolve не ищет аналитического решения уравнения. Она формирует таблицу значений искомой функций x (пройденный путь), по которой интерполяцией создается непрерывная функция, по которой мы построили график (см. рис. 21). На сайте http://communities.ptc.com/videos/1471 можно просмотреть авторскую анимацию численного решения обыкновенного дифференциального уравнения методами Эйлера и Рунге-Кутта.

В среде Mathcad нет средств аналитического (символьного) решения дифференциальных уравнений. Но их можно поискать и найти в Интернете. На рисунке 22 показано такое решение – логарифмическая функция. Оно нашлось, поскольку исходное уравнение было достаточно простым: вторая производная функции пропорциональна квадрату ее первой производной. Но если с нашей задачи о движении лодки начать снимать ограничения, позволяющие упростить уравнение, то символьного решения уже не будет, и нам придется возвращаться к численным методам – к функции Odesolve. Так, например, при торможении лодки площадь поперечного сечения ее надводной части уменьшается (лодка проседает в воду), а подводной части растет[5]. Коэффициенты $k_{возд}$ и $k_{воды}$ (см. блок исходных данных на рис. 21) также зависят от скорости и характера движения лодки: они одни при ламинарном («гладком») обтекании тела и другие при турбулентном движении, когда за лодкой клубятся вихри воды и воздуха. У воды и воздуха разная вязкость, что тоже нужно учитывать при математическом моделировании движении лодки. Этим занимается очень интересная наука под названием *гидрогазодинамика*…

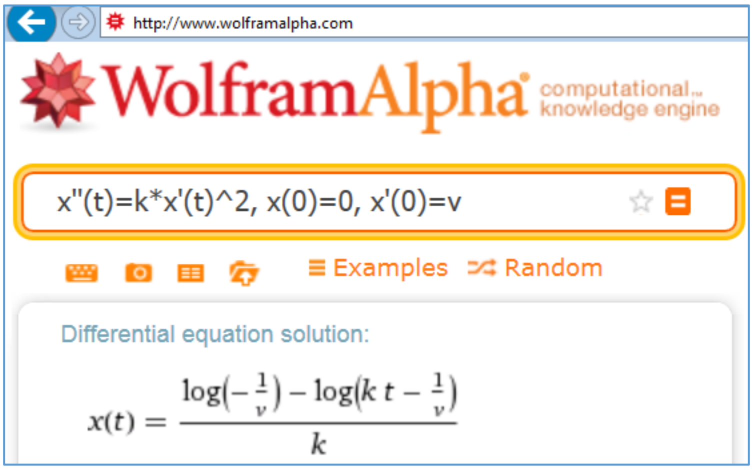


Рис. 22. Символьное решение дифференциального уравнения

И последнее. После нахождения корня алгебраического уравнения (или их систем) стоит сделать *проверку* – подставить найденное значение (найденные значения) в уравнение (в систему) и убедиться, что оно превратилось в тождество, что его левая часть равна правой. Или примерно равна, если используются численные (приближенные) методы решения. Проверка решения дифференциального уравнения может заключаться в построении графика баланса сил и произведения массы на ускорение (если иметь ввиду задачу, показанную на рис. 21) в зависимости от аргумента полученной функции (**t** – см. рис. 21). Этот график должен совпадать с осью x. Кроме того, если есть аналитическое решение ОДУ (см. рис. 22), то его можно сравнить с численным (рис. 21). Мы это сделали в расчетном документе, показанном на рис. 23.

[5] Самые быстроходные суда те, у которых подводная часть минимальна: глиссирующие суда, суда на подводных крыльях или на воздушной подушке.

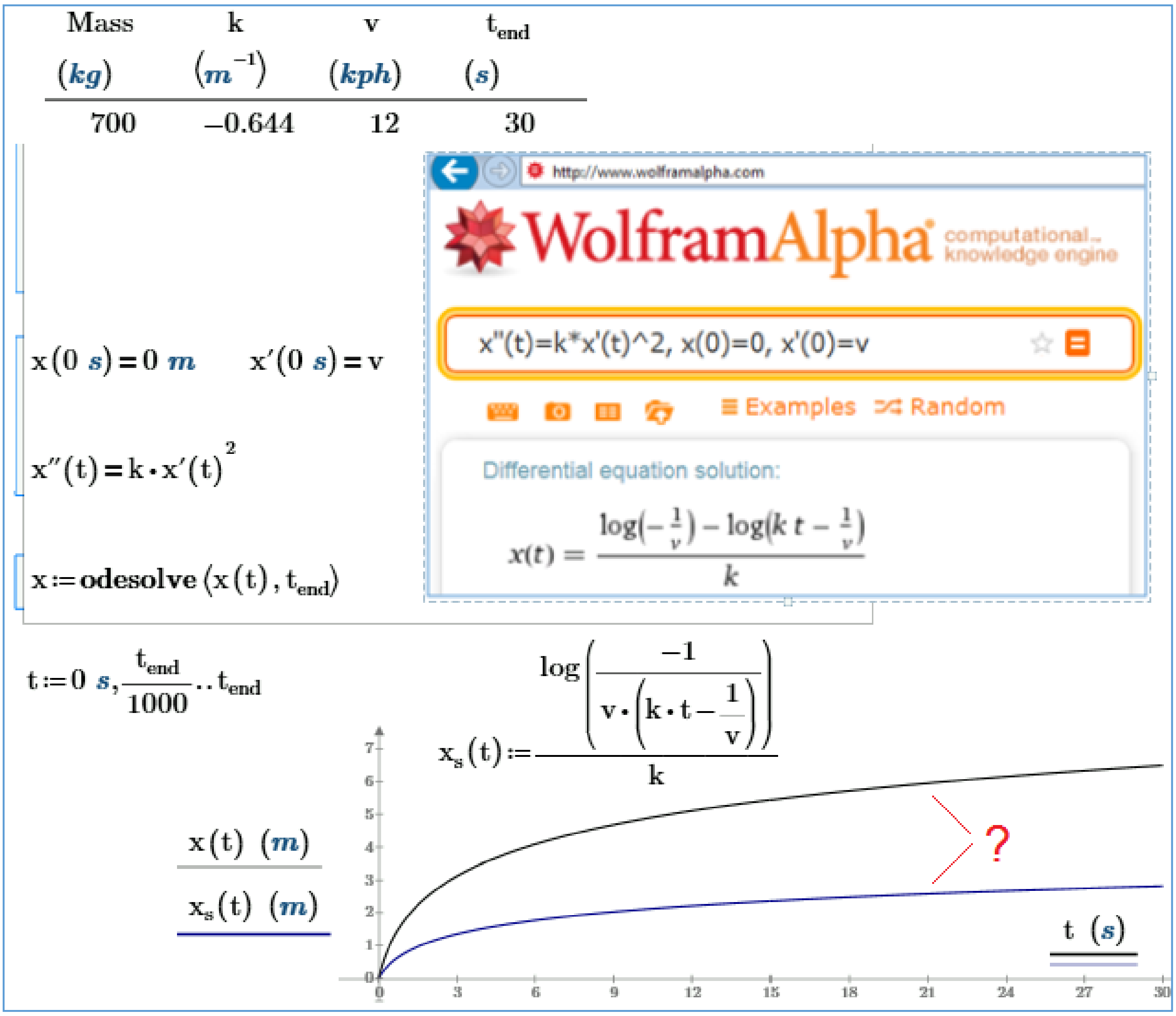


Рис. 23. Графическое сравнение аналитического и численного решения ОДУ

Почему на рисунке 23 графики торможения моторной лодки не совпали? Ответ пусть даст сам читатель!

Выводы

Каждая из рассмотренных функций «великолепной семерки Mathcad» обладает своими особенностями и ограничениями. Прежде чем приступать к решению задачи, следует продумать, какая из опций Mathcad приведет к поставленной цели, причем наилучшим образом.

Школьнику, студенту, инженеру или ученому необходимо (а в ряде случаев и достаточно) освоить «великолепную семерку Mathcad», особенности численных, графических и аналитических методов решения задач, чтобы успешно решать на компьютере свои учебные или профессиональные задачи [4].

Литература:

1. Очков В.Ф. Физические и экономические величины в Mathcad и Maple (Серия «Диалог с компьютером»). М.: Финансы и статистика. 2002 (http://twt.mpei.ac.ru/ochkov/Units/Forword_book.htm)
2. Очков В.Ф. Преподавание математики и математические пакеты // Открытое образование, №2. 2013. С. 23-34 (http://twt.mpei.ac.ru/ochkov/Mathcad-15/OchkovMath-pdf.pdf)
3. Очков В.Ф. Решение алгебраических уравнений и систем или Ван Гог в среде Mathcad // КомпьютерПресс. № 9. 2001. (http://twt.mpei.ac.ru/ochkov/Carpet/index.htm)
4. Теплотехнические этюды с Excel, Mathcad и Интернет / Под общ. ред. В.Ф. Очкова. Издательство БХВ-Петербург. 2014. – 336 с. (http://twt.mpei.ac.ru/ochkov/TTMI)