

Глава 2. Работа с физическими Величинами: проблемы и решения

Как уже отмечалось ранее, языки программирования и электронные таблицы, используемые для решения в том числе и инженерно-технических задач, оперируют просто величинами (числами), а не физическими величинами — массой, скоростью, энергией и т. д., что, во-первых, снижает "читабельность" расчетов, а, во-вторых, чревато ошибками.

Ошибки, связанные с неправильным использованием единиц измерения издавна сопровождали все сферы человеческих отношений. Например, Петр I в письме князю Куракину (1714 г.) укорял последнего: "... присылали вы роспись подрядным кораблям, которым написана пропорция амстердамскими футами, а я к вам всегда писал, чтоб английскими, о чем зело удивляюсь, для чего сие пренебрегли, ибо убыло в длину более 10 фут, а также и в ширину". В наш же век, в век техногенных катастроф последствия и наносимый ущерб от такого рода ошибок могут быть более значительными. Три примера.

Так, самолет Boeing 767, принадлежащий канадским авиалиниям, 23 июля 1983 года совершал полет из Монреаля в Эдмонтон. На полпути, на высоте 12 500 м, по причине полного расхода топлива лайнер был вынужден совершить аварийную посадку на заброшенном военном аэродроме в местечке Гимли (Gimli). Причиной аварийной ситуации стала ошибка командира, неправильно рассчитавшего массу топлива, необходимого для перелета. В то время авиация Канады переходила с британской метрической системы (в которой объем измеряется в галлонах, а масса в фунтах) на международную метрическую систему SI (литры и килограммы, соответственно). Для пересчета массы потребного топлива следовало показания топливомера (в литрах) умножить на соответствующее значение плотности, чтобы получить килограммы. Ошибка состояла в том, что вместо правильного значения плотности (измеряемого в кг/л), командир использовал старое значение (измеряемое в фунтах/галлон). В результате самолет был заправлен только половиной необходимого топлива, что и привело к аварийной ситуации.

Подобная ошибка привела к неудаче и при полете американского спутника Mars Climate Orbiter (MCO). Mars Climate Orbiter был запущен 11 декабря 1998 года на РН Дельта-2. Аппарат прибыл к Марсу через 9 месяцев, 23 сентября 1999 года. В расчетное время на высоте 193 км аппарат включил двигатели на торможение. Через 5 минут MCO ушел за Марс и больше никаких сигналов с него не поступало. Из анализа данных со станций слежения было установлено, что аппарат прошел над поверхностью на высоте всего 57 км вместо расчетных 140 км и попросту сгорел в атмосфере (стоимость аппарата 125 млн. долларов). Столь большое отклонение было вызвано ошибкой специалистов, готовивших миссию: при расчетах тормозного импульса одна из групп использовала британские единицы измерения (фунт-сила), а другая — метрические (ньютон).

Можно упомянуть еще одну инженерную ошибку, связанную уже не с самими единицами измерения, а с относительными шкалами измерения. Строили мост через Рейн. С одного берега это делали немцы, а с другого швейцарцы. Когда пролеты моста стали соединяться на середине реки, то оказалось, что разница в их высотах составила чуть ли не полметра. Причина ошибки оказалась в том, что в Германии строительный стандарт нулевой высоты — это уровень Северного моря, а в Швейцарии — Средиземного.

Любой специалист в любой области науки и техники может привести множество примеров подобных ошибок и казусов, связанных с неправильным оперированием единицами измерения. Отход от ручных расчетов и переход на компьютерные "безразмерные" языки программирования не полностью решил эту проблему.

В самом начале *главы 1* мы отметили, что Mathcad — это не просто математический, а физико-математический пакет (см. рис. 1.2, 1.3 и 1.11). Но часто в реальном физическом Mathcad-расчете, там, где почти все величины имеют размерность массы, длины, силы и т. д., единицы измерения физических величин присутствуют не как множители у числовых констант, упрощающие расчет и позволяющие избежать ошибок, а как комментарии такого типа:

Введите значение давления в атмосферах¹ P:=120

вместо, казалось бы, более логичного и правильного

Введите давление P:=120 atm

В чем причины такого неполного использования возможностей Mathcad? Первая из них заключается в том, что некоторые пользователи не знают о таком полезном инструменте Mathcad, как встроенные константы, хранящие единицы физических величин, и переносят в среду Mathcad — в среду, повторяю, *физико-математического* пакета — приемы, выработанные за время общения с "нефизическими" языками программирования или с электронными таблицами, в которых, повторяю, переменные хранят только числовые значения, а их единицы измерения отмечены в комментариях и то далеко не всегда.

Есть и вторая группа пользователей Mathcad, которые не задействуют физические величины в расчетах, объясняя или оправдывая это тем, что у них все величины прописаны только в основных единицах одной из систем измерений (например, международной SI) и проблем с переводами единиц у них не возникает. Эта мотивация часто подкрепляется и тем, что Mathcad-документ без физических величин намного проще подготовить для компиляции в средах языков программирования — для перевода пользовательских функций в разряд встроенных по технологии DLL (см. *разд. 7.9*). Кроме того, Mathcad-документ с отключенным механизмом работы с единицами измерений, с имитацией этого механизма работает быстрее (см. рис. 2. 22).

Третья и основная причина отказа от физических величин в расчетах более глубокая. Она связана с некоторыми особенностями и недоработками инструментария физиче-

¹ Здесь намеренно введена ошибка — не уточняется, в каких атмосферах нужно задавать давление: в физических (760 мм рт. ст.) или в технических (кгс/см²). Эти две единицы давления близки по значению и из-за этого такую ошибку трудно выявить.

ских величин, которые заставляют даже опытных пользователей изымать из почти уже готового расчета единицы измерения и переводить их в разряд комментариев:

было

Введите значение давления P:=120 atm

стало

Введите значение давления в физических атмосферах² P:=120

Но при этом можно забыть ввести в расчет соответствующие коэффициенты пересчета атмосфер и паскалей — вот вам и ошибка!

Физические величины в расчете, не вникая в их "физическую" сущность, можно рассматривать как некие очень уместные комментарии в Mathcad-документе (см. разд. 1.3). Оператор $P := 120$ — немой, а $P := 120 \text{ atm}$ — очень "говорящий", не требующий каких-либо дополнительных пояснений. Единицы физических величин и комментарии роднит еще одна особенность, связанная, если так можно выразиться, с "психологией" создания Mathcad-документов. Ввод комментариев тормозит написание документа, как бы отвлекая человека от сути расчета. Часто ввод в расчет единиц измерения, как и в случае с комментариями, откладывается "на потом". Но как уже отмечалось, очень часто этого "потом" не бывает — расчет заработал и выдает приемлемый результат.

2.1. Инструментарий физических величин в среде Mathcad

Инструментарий физических величин в среде Mathcad довольно прост. При вводе размерной величины к числовой константе через знак умножения или через невидимый символ функциональной зависимости (см. далее описание работы с относительными шкалами измерений) приписывается встроенная или пользовательская единица измерения набором на клавиатуре ее имени либо вставкой встроенной единицы из диалогового окна **Вставка единицы измерения** (рис. 2.1). Затем, как правило, знак умножения делают невидимым. На рис. 7.9 показано, как при вводе размерной величины можно давать пользователю возможность выбирать единицу измерения, например, через использование переключателей: температуру по разным температурным шкалам или давление с разными единицами давления.

На рис. 2.1 показана также вкладка **Система единиц измерения** из диалогового окна **Параметры документа** с установкой по умолчанию Международной системы единиц — СИ. В среде Mathcad 13/14 стало возможно работать не только со встроенными (СИ, МКС (метр — килограмм — секунда), СГС (сантиметр — грамм — секунда³) и США), но и с пользовательскими системами измерений. Это, в частности, означает,

² Тут мы исправили нашу ошибку (см. предыдущую сноску). Другой вопрос — знает ли пользователь Mathcad, что также физическая атмосфера и сделает ли она правильный пересчет, если это понадобится.

³ В этой системе очень любят работать физики. В ней, например, силу тока и прочие электрические единицы можно выразить через базовую тройку: cm — g — s.

что пользователь может модифицировать одну из встроенных систем исчисления так, чтобы, например, основной единицей давления был не паскали (Pa^4), а атмосфера (atm) — переменные, хранящие давление, будут выводиться сразу в атмосферах. В самих же расчетах ведется *контроль за соответствием размерностей* — метры, например, нельзя сложить с килограммами, что часто позволяет избежать некоторых ошибок и опечаток при вводе самих формул.

При *выводе размерных величин* оператором $\blacksquare = \blacksquare \blacksquare$ в его третий операнд (в третий местозаполнитель, появляющийся на дисплее при подводе курсора к этому оператору) можно вставить иную единицу измерения, чтобы получить нужный ответ, вернее, чтобы заменить единицу измерения умолчания на другую. Можно также дублировать вывод размерной величины с разными единицами, чтобы читающий имел возможность выбора того ответа, который ему более понятен: джоули или калории, атмосферы или мегапаскали и т. д. (см. пример на рис. 1.54, на котором мощность человеческого сердца выведена в ваттах и в лошадиных силах). На сайте с адресом <http://twf.mpei.ac.ru/MCS/Worksheets/PumpMWkW.xmcd> читатель может открыть сетевой расчет мощности насоса примерно такой, какой показан на рис 1.2. Сетевой расчет отличается от своего аналога, показанного на рис. 1.2, тем, что рассчитанное значение мощности выводится с единицами W, kW или MW в зависимости от того, какая получилась мощность: больше 1000 W или больше 10^6 W. Тут единицы мощности выводятся на экран правее безразмерного подправленного числового ответа в виде сменяющейся картинки по технологии, показанной на рис. 1.59.

Что же заставляет даже опытных пользователей Mathcad избегать единиц измерения в сугубо физических расчетах или изымать их из почти готового расчета?

Вот эти "подводные камни".

1. Некоторые инструменты Mathcad не приспособлены к работе с размерными величинами. Они либо прерывают свою работу сообщением об ошибке типа "Здесь не должно быть размерной величины" (см. описание такой ситуации в *главе 6* при решении дифференциальных уравнений), либо, что намного хуже, выдают неправильный ответ. В таких ситуациях необходимо временно лишать величины их единиц измерения, деля переменные на соответствующие базовые единицы измерения, а затем возвращать нужную единицу измерения ответу умножением его на другую нужную базовую единицу измерения. Эту технологию мы более подробно опишем при рассмотрении работы с эмпирическими формулами.

Если в расчете вообще не планируется использовать физические величины, то работу с единицами измерения следует отключить командой **Сервис | Параметры документа...** и на вкладке **Система единиц измерения** установить переключатель **Нет** (рис. 2.1), чтобы единицы измерения не приводили к некоторым ошибкам. Пользователь, например, забыл присвоить переменной, совпадающей по имени с одной из единиц измерения, нужное значение, а расчет, тем не менее, ведется и не прерывается сообщением об ошибке, как этого следовало бы ожидать. Вот неполный список таких "коварных" переменных: A, K, T, S, R, m, L, s и т. д.

⁴ Очень маленькие и неудобные, следовательно, величина, которую всегда нужно использовать с множителями кило- или мега-

Другой пример. Пользователь объявил функцию $n(m)$ и собирается построить ее график по технологии QuickPlot, т. е. без явного задания диапазона изменения аргумента: например, $m := -3, -2.9 \dots 5$. А график не строится, вернее, строится одна невидимая точка, т. к. переменная m хранит единицу длины — метр.

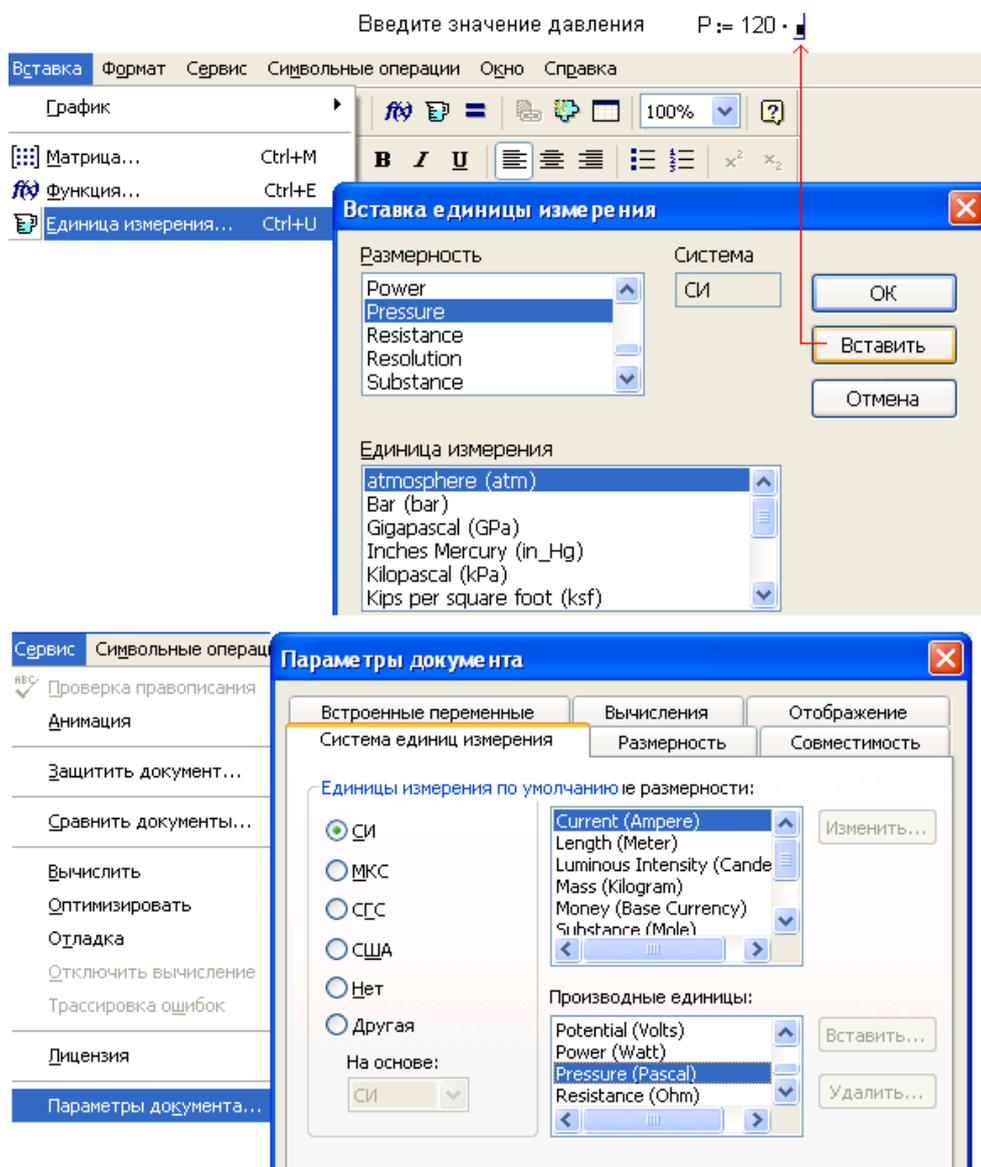


Рис. 2.1. Диалоговые окна установки системы измерения и ввода единиц измерения

2. Символьная математика Mathcad оперирует единицами измерения как простыми переменными, не принимая во внимание, что в метре 100 см, а в часе 60 мин и т. д. Символьная математика — это чужеродный элемент в среде Mathcad. Она взята из пакета Maple, в котором единицы измерения появились только в восьмой версии (Mathcad 5—13), или из пакета MuPAD, в котором вообще нет единиц измерения (Mathcad 14). Символьная математика — это вспомогательный инструмент Mathcad, который редко бывает интегрирован в расчет, а выполняет лишь вспомогательные функции. Если необходимо, чтобы единицы измерения заработали в символьной математике, то следует предпринять дополнительные усилия — с помощью оператора `substitute` (подставить) сообщить пакету Mathcad, что $1\text{ m}=100\text{ cm}$, $1\text{ hr}=60\text{ min}$ и т. д.
3. Массивы Mathcad (векторы и матрицы) могут хранить только безразмерные величины, либо величины одной размерности, т. е. одинаковые физические величины — время, силу, массу и т. д. Известно только одно исключение из этого правила. Функция `Find`, например, может вернуть вектор с разноразмерными элементами, если аргументы самой функции `Find` имеют разную размерность. Если же необходимо, чтобы программно созданная функция вернула несколько разноразмерных рассчитанных величин, объединенных в вектор или матрицу, то можно лишить эти величины размерностей, а потом вернуть их назад⁵.
4. В расчетах иногда приходится использовать так называемые *эмпирические формулы* — формулы, связывающие не просто физические величины, а физические величины в определенных единицах измерения. В этом случае также нужно принять меры, подобные тем, какие были описаны в п. 1, чтобы не было сбоя в использовании единиц измерения. В качестве примера на рис. 2.2 показан расчет (оценка) в среде Mathcad стоимости подержанного автомобиля по его возрасту и пробегу.

⁵ Эта существенная недоработка будет направлена в будущей версии Mathcad — Mathcad Spirit (см. рис. 3.38).

Mathcad 13, 12, 11 и др.

▼ Пользовательские единицы измерения

год := yr миля := mi км := km

лет := yr \$US := cd руб := $\frac{\$US}{25.3}$

▲ Пользовательские единицы измерения

Отсутствующей размерности присваивали единицу неиспользуемой в расчете размерности - канделу, например

Mathcad 14

▼ Пользовательские единицы измерения

год := yr миля := mi км := km

лет := yr \$US := * руб := $\frac{\$US}{25.3}$

▲ Пользовательские единицы измерения

Вставка единицы измерения
 Размерность
 Mass
 Money
 Единица измерения
 Base Currency (α)

$\frac{\text{Пробег}}{28735}$

Цена(Возраст, Пробег) := 4064 - 269.4 · Возраст + 4973 · e

Возраст := 5.5 лет Пробег := 75000 mi

Цена(Возраст, Пробег) = ■

Значение имеет единицы измерения: Time, а должно иметь единицы измерения: Unitless.

Работаем без единиц измерения

Возраст := 5.5 Пробег := 75000 Цена(Возраст, Пробег) = 2948

Изменяем формулу для работы с единицами измерения

$$\text{Цена(Возраст, Пробег)} := \left(4064 - 269.4 \cdot \frac{\text{Возраст}}{\text{год}} + 4973 \cdot e^{-\frac{\text{Пробег}}{28735 \cdot \text{миля}}} \right) \cdot \$US$$

Возраст := 5.5 лет Пробег := 120700 км

Цена := Цена(Возраст, Пробег) = 2.948 × 10³ * Ответ компьютера

Цена = 2948 \$US Цена = 74584 руб Подправленные человеком ответы

Рис. 2.2. Работа с эмпирическими формулами

Эмпирическая формула, по которой ведется расчет стоимости старого автомобиля, была получена после статистической обработки данных (см. главу 5). На этом

примере (см. рис. 2.2) показано, как нужно дополнить подобные формулы, чтобы в них без помех заработал инструментарий физических величин Mathcad. При публикации эмпирических формул всегда четко отмечается, в каких единицах должны быть исходные величины и в каких единицах будет дан ответ. В нашем случае возраст автомобиля должен быть в *годах* (yr), а пробег — в *милях* (mi)⁶. Формула возвращает цену автомобиля в долларах США ($\$US$). Этими единицам измерения необходимо дополнить формулу и отключить на время механизм размерностей Mathcad в самой формуле. На рис. 2.2 так и сделано при повторном определении функции $\text{Цена}(\text{Возраст}, \text{Пробег}) := \dots$, где аргументы функции *поделены* на приписанные им единицы измерения, сама функция *умножена* на приписанную ей единицу измерения. (Рис. 2.2 создавался в то время, когда доллар США стоил 25 рубля и 30 копеек. Кроме того, в расчете учтено, что 75 000 миль соответствуют 120 700 км.)

5. В список размерностей Mathcad включены далеко не все величины, с которыми приходится сталкиваться в расчетах. Там, например, отсутствуют единицы информации (бит, байт и т. д.). В Mathcad до 14-й версии отсутствовали единицы стоимости (доллар, рубль, евро и др.). Mathcad до 14-й версии имел дело только с "семеркой" системы СИ (время, длина, масса, сила тока, температура, сила света и количество вещества) и с их производными величинами — величинами, составленными из этих базовых единиц (с силой, энергией, мощностью и т. д.). А как поступать в среде старых версий Mathcad, если необходимо вести так называемые технико-экономические расчеты, в которых присутствуют доллары, рубли, евро и т. д.? Одно из решений показано в верхней части рис. 2.2. Доллару ($\$US$) присваивается значение какой-либо единицы измерения, физическая величина которой не фигурирует в данном расчете — *канделу* (единица освещенности), например: $\$US := cd$ (см. первый оператор на рис. 2.2). Далее к доллару можно привязать и другие валюты, использующиеся в расчете: например, $руб := \$US / 25.3$. После этого цена по умолчанию будет выводиться либо в *канделах* (версии Mathcad до 14-й) либо в базовых единицах валюты \square ("солнышко" — см. предпоследнюю строку на рис. 2.2), которые надо будет заменить на нужную единицу стоимости — доллары или рубли (см. последнюю строку на рис. 2.2).
6. В расчетах встречаются формулы, которые по своей сути являются физическими, а по форме — эмпирическими (см. п. 5). Пример работы с такой формулой показан на рис. 2.3, где решается следующая задача из области теплоэнергетики: дан КПД электростанции η , необходимо рассчитать удельный расход условного топлива на выработку электроэнергии $b_{yт}$. Во всех справочниках и учебниках для этого расчета дается формула $b_{yт} = 12300 / \eta$ (или $123 / \eta$) и сказано, что КПД (η) должен быть выражен в процентах (или в относительных единицах), а значение $b_{yт}$ при этом будет выдано в граммах условного топлива (у.т.) на киловатт-час (кВт·ч). Пример: $12300 / 32 = 384.4$ или $123 / 0.32 = 384.4$ — тепловая электростанция с КПД = 32% сжигает 384,4 г у.т./на выработку (кВт·ч).

⁶ Статистические данные взяты из анализа американского вторичного рынка автомобилей.

1. Работа без единиц измерения

КПД электростанции, % $\eta := 32$

Расход условного топлива, г/(кВт·ч)

где, η в процентах

$$b_{\text{УТ}} := \frac{12300}{\eta}$$

$$b_{\text{УТ}} = 384.4 \quad \text{г/(кВт·ч)}$$

2. Работа с единицами измерения

Пользовательские единицы

ккал := kcal кг := kg г := gm кВт := kW ч := hr

Пользовательские единицы

КПД электростанции $\eta := 32\%$ или $\eta := 0.32$

Константа

Теплота сгорания условного топлива $Q_{\text{УТ}} := 7000 \frac{\text{ккал}}{\text{кг}}$

Константа

Расход условного топлива $b_{\text{УТ}} := \frac{1}{Q_{\text{УТ}} \cdot \eta}$

$$b_{\text{УТ}} = 1.066 \times 10^{-7} \text{ sec}^2 \text{ m}^{-2} \quad \text{Ответ компьютера}$$

$$b_{\text{УТ}} = 383.9 \frac{\text{г}}{\text{кВт} \cdot \text{ч}} \quad \text{Ответ после вставки нужных единиц}$$

Рис. 2.3. Работа с псевдоэмпирическими формулами

Если в инструкции по применению формулы перечислены конкретные единицы измерения, то такую формулу можно заставить правильно работать по методике, пригодной для расчета по эмпирическим формулам, описанной в п. 4. Но можно идти другим путем — вспомнить, что такие псевдоэмпирические формулы были когда-то упрощены с благими намерениями освободить человека от дополнительного пересчета по единицам измерения. Если при этом полученные коэффициенты легко запоминаются, как в нашем случае с КПД (раз, два, три и два нуля — 12 300), то такая упрощенная формула приживается, и ее уже трудно убрать из справочников и учебников. Исходная, неупрощенная формула для расчета расхода условного топлива выглядит так: $b_{\text{УТ}} = 1 / (\eta \cdot Q_{\text{УТ}})$, где $Q_{\text{УТ}}$ — теплота сгорания условного топлива, принятое значение которой составляет 7000 ккал/кг (это теплота сгорания угля хорошего качества, которую легко запомнить). Если ввести именно такую, а не упрощенную формулу, то работа механизма размерностей Mathcad не нарушится (рис. 2.3, внизу). Кроме того, ответ будет более точен.

7. Измерения физических величин в среде Mathcad до 13-й версии ведется только по *абсолютным шкалам*. Это, в частности, означает, что если сама величина нулевая, то к ней не нужно приписывать какую-либо единицу измерения, хотя в среде Mathcad тем не менее это необходимо делать: например, $l := 0 \text{ m}$, чтобы не нарушить контроль размерностей⁷. Но есть еще и *относительные шкалы измерения*⁸. Например, температуру мы обычно измеряем в по шкале Цельсия (относительная шкала), а не в кельвинах (термодинамическая температура — абсолютная шкала). Это, в частности, означает, что в выражении $t := 25 \text{ }^\circ\text{C}$ между числовой константой (25) и единицей измерения ($^\circ\text{C}$) стоит не знак умножения, а что-то другое, замаскированное под пробел.

На рис. 2.4 показано одно из решений проблемы относительных шкал измерения на примере простой задачи: даны *температура* t_1 на входе в подогреватель и разность температур Δt между входом и выходом из него. Необходимо найти температуру t_2 на выходе из подогревателя. Понятно, что это не арифметическая, а, скорее, метрологическая задача, для решения которой в расчет вводятся *три объекта* с именем $^\circ\text{C}$: функция с именем $^\circ\text{C}$ и две константы с именем $^\circ\text{C}$, у первой из которых ($^\circ\text{C}:=1$) стиль с именем $^\circ\text{C}=1$, а у второй ($^\circ\text{C}:=\text{K}$) — с именем $^\circ\text{C}=\text{K}$, и еще одна функция с невидимым именем (см. разд. 1.2.3) — $(t) := \text{T/K}-273.15$.

⁷ Переменную m можно сделать невидимой (см. разд. 1.2.3).

⁸ См. упоминание относительных шкал высот при строительстве моста через Рейн в начале главы.

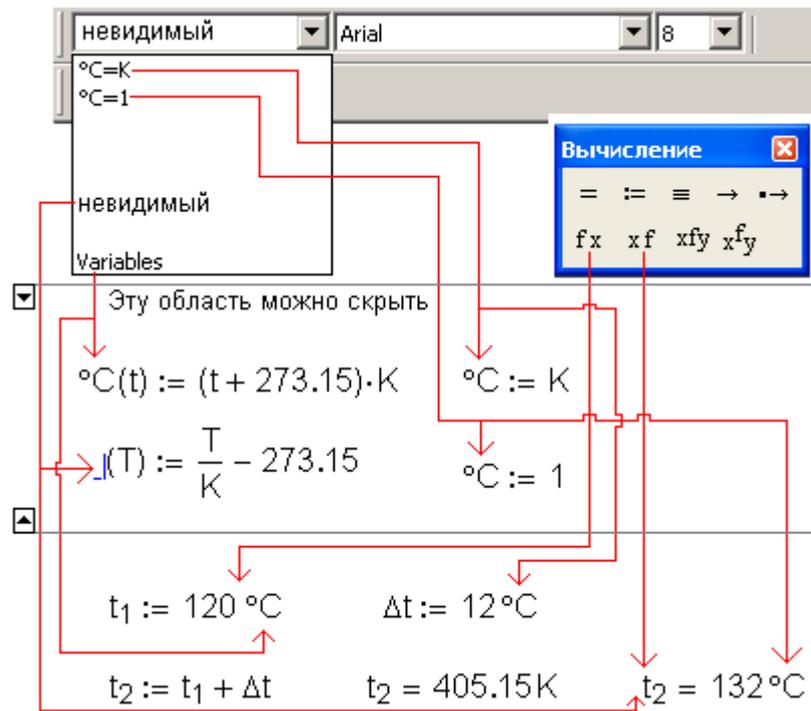


Рис. 2.4. Работа с температурными шкалами

Символ "градус" отсутствует на клавиатуре. Он вводится в расчет либо нажатием комбинации клавиш <Alt>+0176, либо копированием из набора математических символов Mathcad (см. рис. 1.42).

Имена всех трех объектов *совпадают* (°C), тем не менее, это *разные объекты*, поскольку у них различные *стили* (см. разд. 1.2). При работе с температурой, выраженной по относительной шкале, возникают *три ситуации*, правильно отреагировать на которые помогут вышеописанные вспомогательные функции и константы.

- ❑ Ситуация 1. В расчет необходимо *ввести* значение температуры по шкале Цельсия. Для этого в правой части оператора ввода := функция °C со стилем Variables (первый объект с именем °C) вызывается в виде *постфиксного оператора* $t_1 := 120^\circ\text{C}$. При этом переменной t_1 присваивается значение температуры по абсолютной шкале измерений.
- ❑ Ситуация 2. Необходимо *ввести* значение *разности температур* Δt . Здесь можно применить обычное правило умножения числа на единицу измерения К или °C, равную К (второй объект с именем °C).
- ❑ Ситуация 3. Необходимо *вывести* значение температуры по шкале Цельсия. Для этого в левой части оператора = выводимую на печать переменную нужно сделать операндом *префиксного оператора*, имя (символ) которого невидимо. Если при

этом к выдаваемому на печать числу добавить константу °C, равную единице (третий объект с именем °C), то иллюзия вывода значения температуры по относительной шкале будет полная: $t_2=132^{\circ}\text{C}$.

Описанные три приема и три одноименных объекта с именем °C позволяют полностью реализовать работу с температурой: ввод значения температуры по любой шкале, вывод значения температуры, ввод и вывод значения разности температур. При этом нужно следовать простому, но важному правилу: в каких бы шкалах ни вводились и ни выводились значения температуры, в формулах температура должна фигурировать только в абсолютных значениях (по шкале в кельвинах).

В среде Mathcad 13/14 заложена возможность работы по относительным шкалам температур (рис. 2.5), но рис. 2.4 "остаётся в силе", т. к. по данной методике можно вводить и другие относительные шкалы измерения. Кроме того, это позволяет при необходимости отключить работу с единицами измерения, оставив только ее имитацию (см. рис. 2.22).

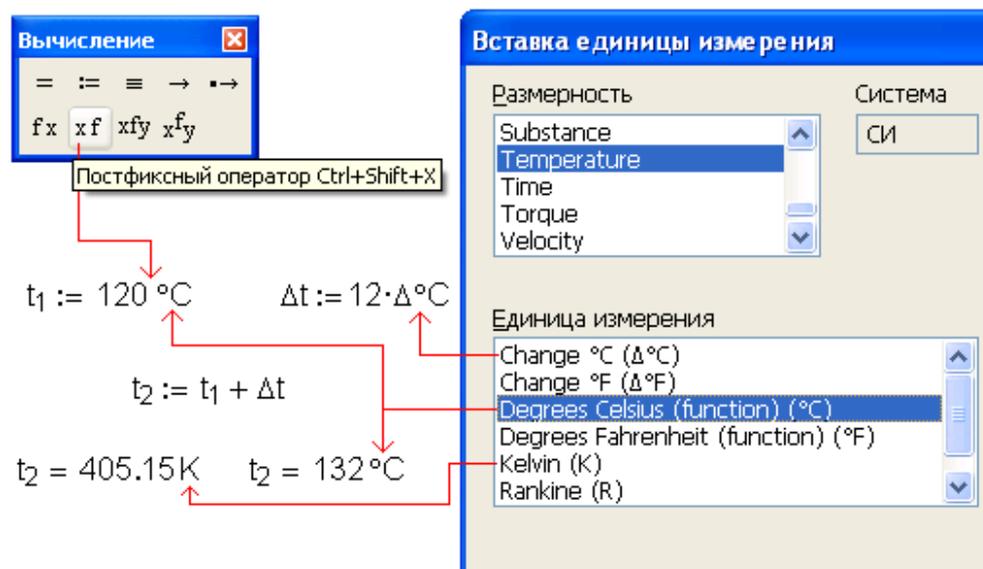


Рис. 2.5. Работа с температурными шкалами в среде Mathcad 13/14

В пакет Mathcad 13/14 заложена не совсем стандартная единица температуры (разности температур) $\Delta^{\circ}\text{C}$ ($\Delta^{\circ}\text{F}$) наряду с К (R или $^{\circ}\text{R}$) и $^{\circ}\text{C}$ ($^{\circ}\text{F}$). Это сделано для того, чтобы отличать температуру по шкале Цельсия или Фаренгейта, которые сдвинуты относительно шкал Кельвина и Ренкина, от градуса Цельсия или Фаренгейта, которые равны градусам Кельвина (кельвинам) или градусам Фаренгейта, соответственно. Это дань устаревшим единицам измерения. Раньше, например, теплопроводность измеряли в $\text{W}/(^{\circ}\text{C m})$, а теперь в $\text{W}/(\text{K m})$. В среде Mathcad единицу теплопроводности нужно будет писать так: $\text{W}/(\Delta^{\circ}\text{C m})$, но лучше вот так: $\text{W}/(\text{K m})$, т. к. $\Delta^{\circ}\text{C} = \text{K}$. Да, повторяю, в среде Mathcad 14 есть встроенные средства работы соотносительны-

ми шкалами температуры, но в книге все равно оставлен рис. 2.4 с описанием пользовательских средств решения данной задачи, т. к. и об этом будет сказано далее, иногда бывает целесообразно отключить работу единиц измерения (см. переключатель **Нет** в диалоговом окне **Параметры документа** на рис. 2.1) для повышения скорости расчетов или обхода недоработок инструментария единиц измерения.

Есть еще одна единица измерения, работа с которой в среде Mathcad может вызывать некоторые трудности. Это *децибелы* (дБ, dB). *Бел* — это десятичный логарифм отношения двух одномерных физических величин, а децибел — это, соответственно, одна десятая бела. Измеряя величину в децибелах, мы тем самым выстраиваем некую логарифмическую шкалу значений физической величины. Обычно децибелами измеряют силу звука. Интенсивность звуковых волн сравнивается с наименьшей интенсивностью звука I_0 , слышимого человеческим ухом (обычно $I_0 = 0.01 \text{ Вт/м}^2$). Можно рассчитать непосредственно отношение измеряемой интенсивности звука I к наименьшей, однако диапазон значений этого отношения столь широк, что вызывает неудобства, которые устраняются введением логарифмической шкалы с десятичным множителем деци — $0.1 \cdot \lg(I/I_0)$. Очень громкий звук отбойного молотка характеризуется уровнем 80 дБ, разговор в помещении — 60 дБ, а едва слышимый звук вроде шелеста листьев — примерно 10 дБ. При оперировании децибелами необходимо выбрать *базу*, от которой ведется отсчет. На рис. 2.6 такая шкала выстроена относительно мощности человеческого сердца (см. также рис. 1.2 с расчетом этой мощности).

$$\text{base} := \frac{70 \frac{\text{mL}}{\text{sec}} (120 \text{ torr} - 80 \text{ torr})}{70\%} \quad \text{Мощность сердца человека} \quad \text{base} = 0.533 \text{ W}$$

☑ Две функции и одна константа

$$\text{dB}(x) := 10 \cdot \log\left(\frac{x}{\text{base}}\right)$$

У этой функции стиль Invisible (белым по белому)

$$\text{dB} := 1$$

У этой константы стиль User 1



$$\text{dB}(x) := \text{base} \cdot 10^{\frac{x}{10}}$$

У этой функции стиль Variables

☑ Две функции и одна константа

Вывод значения мощности в dB (невидимая функция dB + prefix operator + dB=1)

$$p := 1 \text{ W}$$

$$\text{dB } p = 2.73$$

$$p = 2.73$$

$$p = 2.73 \text{ dB}$$

$$p := 1 \text{ hp}$$

$$p = 31.456 \text{ dB}$$

Лошадиная сила

$$p := 1 \text{ kW}$$

$$p = 32.73 \text{ dB}$$

$$p := 6 \times 800000 \text{ kW}$$

$$p = 99.543 \text{ dB}$$

Крупнейшая в мире Сургутская ГРЭС-2

Ввод значения мощности в dB ("видимая" функция dB + postfix operator)

$$p := -\infty \text{ dB}$$

$$p = 0 \text{ W}$$

$$p = 0$$

$$p := 0 \text{ dB}$$

$$p = 0.533 \text{ W}$$

$$p := 2 \text{ dB}$$

$$p = 8.452 \times 10^{-4} \text{ kW}$$

Сложение мощностей

$$p := 0 \text{ dB} + 0 \text{ dB}$$

$$p = 1.067 \text{ W}$$

$$p = 3.01 \text{ dB}$$

Мощность двух сердец

$$p := 12 \times 200000 \text{ kW} + 6 \times 800000 \text{ kW}$$

$$p = 7200000 \text{ kW}$$

$$p = 101.304 \text{ dB}$$

Рис. 2.6. Работа с децибелами

Для работы с децибелами в Mathcad-документ вводятся две функции с именами dB (имя одной из функций невидимо — пишем белым по белому) и одна константа — также с именем dB. Но это разные объекты, поскольку у них разные стили. Оператор, определяющий невидимую функцию, "лежит" на цветном фоне для того, чтобы было видно имя функции. При вызове этой функции в виде *префиксного оператора* цветная подложка отсутствует, поэтому пользователь видит не dB p=2 dB, а p=2 dB (константу dB за числовым ответом пользователь допечатывает сам: она равна единице и ничего в ответе не меняет, имитируя лишь единицу измерения). Невидимая функция служит для вывода значения размерной переменной в децибелах, а видимая — для ее ввода. Она вызывается не в традиционном виде, а, как и в случае с температурой (рис. 2.5), в виде *постфиксного оператора*: не p:=dB(0), а p:=0 dB, что также имитирует единицу измерения.

Иногда при работе с децибелами указывают также и базу (исходную величину) таким образом: $p := 100 \text{ dB (re 0.533 W)}$, где *re* — начальные буквы слова *reference*, т. е. ссылка. Такой стиль работы с децибелами требует использования инфиксного оператора (рис. 2.7).

▾ 1 функция и 4 константы

$$\text{dB}(x, \text{base}) \equiv \text{base} \times 10^{\frac{x}{10}} \text{ on error } 10 \times \log\left(\frac{x}{\text{base}}\right)$$

$\text{re} \equiv 1 \quad \text{dB} \equiv 1 \quad \text{B} \equiv 10 \times \text{dB} \quad \text{Np} \equiv \frac{2 \times \text{B}}{\ln(10)}$

▴ 1 функция и 4 константы

Ввод значения мощности в единицах мощности

$P_1 := 100 \text{ kW}$

Перевод значения мощности в логарифмические единицы

Вычисление ✕

= := ≡ → •→ fx xf xfy xfy

$P_1 := P_1 \text{ dB (re 0.533W)}$

$P_1 = 52.733 \text{ dB} \quad P_1 = 5.273 \text{ B} \quad P_1 = 6.071 \text{ Np}$

Ввод значения мощности в логарифмических единицах

$P_2 := 50 \text{ dB} \quad P_2 = 5 \text{ B} \quad P_2 = 5.756 \text{ Np}$

Перевод значения давления в единицы давления

$P_2 := P_2 \text{ dB (re 0.533W)} \quad P_2 = 53.3 \text{ kW}$

Рис. 2.7. Работа с децибелами и ссылкой на базу

Некоторые особенности можно отметить и при использовании *безразмерных физических величин* — плоского и телесного углов, массовых, объемных и молярных долей и т. д. Так, начиная с 12-й версии Mathcad, стерадиан стал безразмерной величиной ($\text{sr}=1$), а раньше он был размерной величиной ($\text{sr}=1 \text{ sr}$). Этим разработчики, с одной стороны, восстановили некую логику — радиан (отношение двух длин) был безразмерным, а стерадиан (отношение двух площадей) размерным (*см. ранее*), а с другой стороны, открыли возможность совершения ошибок такого рода: сложение радиана со стерадианом, взятие синуса от стерадиана и т. д. С подобной проблемой отсутствия контроля соответствия размерностей можно столкнуться и при работе с другими "размерно-безразмерными" величинами.

Если массу нельзя сложить с количеством вещества, то, например, по отношению к массовой и молярной долям такое ошибочное действие не прерывается сообщением об ошибке.

В расчетах часто присутствует безразмерная единица измерения — штука. Как правило, ее вводят в расчет через оператор $\text{шт} := 1$ и далее оперируют ею по известной схеме, например: Количество трубок в теплообменнике $N_{\text{тр}} := 2200$ шт. Переменная $N_{\text{тр}}$ при этом остается безразмерной. А можно вспомнить, что в среде Mathcad есть встроенная единица измерения, хранящая единицу "шт" (структурные единицы) — моль (mol, mole). Если моль поделить на число Авогадро, то и получится "шт", которую можно задействовать в расчете, как это показано на рис. 2.8, где определяется скорость воды v в теплообменнике с известным числом трубок в трубном пучке $n_{\text{тр}}$, внутренним диаметром этих трубок $d_{\text{тр}}$ и объемным расходом воды Q .

Размерные штуки и прочие условные размерные величины могут показаться неким курьезом и только. Так, в расчете, представленном на рис. 2.8, площадь сечения одной трубки и общая площадь трубок, как это с первого взгляда ни покажется странным, являются разноразмерными величинами ($\text{мм}^2/\text{шт}$ и мм^2), которые нельзя, например, складывать. И это правильно — такое действие может быть произведено только по ошибке. Пример, показанный на рис. 2.8, конечно, надуманный. Но автору известны реальные примеры, когда в сложном технико-экономическом расчете была локализована и исправлена ошибка только после того, как "безразмерный" оператор $\text{шт} := 1$ был заменен на "размерный" $\text{шт} := \text{mole}$. Оказалось, что в дефектном расчете ошибочно складывались две величины, размерность которых была руб и руб/шт. Этим ошибка была локализована и быстро исправлена.

▼ Единицы измерения			
$N_A := 6.02214199 \cdot 10^{23} \cdot \frac{1}{\text{mole}}$	$\text{шт} := \frac{1}{N_A}$	$\text{мм} := \text{mm}$	
▲ Единицы измерения			
	$\text{м} := \text{m}$	$\text{ч} := \text{hr}$	$\text{с} := \text{s}$
Исходные данные:			
Число трубок	$n_{\text{тр}} := 2200$ шт		
Диаметр трубок	$d_{\text{тр}} := 15$ мм		
Расход в теплообменнике	$Q := 1200 \frac{\text{м}^3}{\text{ч}}$		
Расчет скорости потока в трубках:			
Площадь сечения одной трубки	$f_{\text{тр}} := \pi \cdot \frac{d_{\text{тр}}^2}{4} \cdot \frac{1}{\text{шт}} = 176.7 \frac{\text{мм}^2}{\text{шт}}$		
Площадь сечения всех трубок	$f := f_{\text{тр}} \cdot n_{\text{тр}} = 0.389 \text{ м}^2$		
Скорость потока	$v := \frac{Q}{f} = 0.857 \frac{\text{м}}{\text{с}}$		

Рис. 2.8. Расчет трубного пучка

В некоторых расчетах приходится иметь две переменные для хранения одной физической величины, но в двух разных единицах. Это, например, температура в термодинамических расчетах, где переменная t (или θ — тетта) хранит численное значение в градусах Цельсия, а T — в кельвинах. Инструментарий единиц измерения, встроенный в Mathcad, позволяет отказаться от этой неоправданной раздвоенности.

Без инструментария физических величин, вшитого в Mathcad, расчет, показанный на рис. 1.2, было бы необходимо дополнить операторами, пересчитывающими вспомогательные, но популярные единицы измерения (mL и $torr$) в базовые единицы той или иной системы, например, в международную систему SI: не миллилитры (mL), а метры кубические (m^3), не миллиметры ртутного столба ($torr$), а паскалы (Pa) и т. д. Кроме того, как было уже отмечено, в среде Mathcad ведется контроль соответствия размерностей (не физических величин, а именно размерностей, и мы об этом поговорим далее) в расчетах.

2.2. Полностью размерная функция

Продолжим задачу о насосе. Так, на рис. 2.9 показан аварийный останов вычисления мощности насоса, если в исходных данных допущена ошибка — переменной p_1 ошибочно присвоили значение массы, а не давления.

$$Q := 30000 \frac{L}{hr} \quad p_1 := 1kg \quad p_2 := 20atm$$

$$Q \cdot (p_2 - p_1) = \blacksquare$$

Значение имеет единицы измерения: Mass, а должно иметь единицы измерения: Pressure.

Рис. 2.9. Аварийный останов расчета мощности насоса

Но избежать аварийного останова расчета можно не только исправлением допущенной ошибки $p_1 := 1 kg$, но и... вводом новой $p_2 := 20 kg$ (рис. 2.10).

$$Q := 30000 \frac{L}{hr} \quad p_1 := 1kg \quad p_2 := 20kg$$

$$Q \cdot (p_2 - p_1) = 0.158 \frac{m^3 \cdot kg}{s} \leftarrow ???$$

Рис. 2.10. Неверный, но безаварийный расчет мощности насоса

Аварийного останова при расчете мощности насоса не будет и в том случае, когда все переменные расчета — безразмерные (рис. 2.11).

$$Q := 30000 \quad p_1 := 1 \quad p_2 := 20$$

$$Q \cdot (p_2 - p_1) = 5.7 \times 10^5$$

Рис. 2.11. "Безразмерный" расчет мощности насоса

В принципе, полный механизм контроля размерностей должен подразумевать, что в формулах могут быть величины только определенной размерности — примеры, показанные на рис. 2.10 и 2.11 должны завершаться не просто неточными ответами ("немошностью" на рис. 2.10 или безразмерным числом на рис. 2.11), а аварийным остановам расчета, как показано на рис. 2.9. Кроме того, пакет Mathcad ведет контроль соответствия размерностей и не дает, грубо говоря, суммировать массу с длиной, но не контролирует полное соответствие физических величин. А, как известно, некоторые разные физические величины могут иметь одинаковые размерности, что может приводить к ошибкам в вычислениях в среде Mathcad.

Суть этой проблемы, ее частичное и возможное полное решение мы проиллюстрируем на более общей и понятной читателю простейшей задаче — создание и вызов функции с именем V_c , возвращающей объем цилиндра. На рис. 2.12 изображена эта операция в среде Mathcad.

Из рис. 2.12 видно, что если переменные d и h имеют размерность длины, то функция безаварийно возвращает значение объема цилиндра с размерностью длины в кубе. Но эта же функция безаварийно принимает значение своих аргументов с единицами любых других размерностей и безразмерными (рис. 2.13).

$$Q := 30000 \quad p_1 := 1 \quad p_2 := 20$$

$$Q \cdot (p_2 - p_1) = 5.7 \times 10^5$$

Рис. 2.12. Традиционное создание и "размерный" вызов функции пользователя

$$V_c(d, h) := \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot h$$

$$d := 20 \quad h := 15 \text{kg}$$

$$V_c(d, h) = 4712.4 \text{kg}$$

Рис. 2.13. Вызов функции объема цилиндра с различными размерностями аргументов

И не важно, что функция в ситуации, показанной на рис. 2.13, выдает значение с размерностью, не равной длине в кубе (следствие!). Важна причина такой ненормальной ситуации. Чтобы разобраться, как выйти из этой ситуации, вспомним замечательный принцип, сформулированный Фурье в его классической работе "Аналитическая теория теплоты", которая вышла в свет в 1822 году. Этот принцип называется теперь "принципом размерной однородности" и утверждает, что любое физическое уравнение (которое, как правило, представляет собой алгебраическую сумму двух или более членов) должно содержать только члены, размерность которых одинакова. Чтобы пояснить, в чем разница между обычными алгебраическими и "физическими" уравнениями, обратимся к примеру, приведенному в основополагающей работе Бриджмена: Бриджмен П. Анализ размерностей. — Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2001. Анализируя задачу о падении тела под действием силы тяжести, Бриджмен замечает, что справедливы, по меньшей мере, два равенства, связывающие пройденное расстояние (s), скорость (v), время (t) и ускорение свободного падения (g):

$$v = g t, \quad s = g t^2 / 2.$$

Если теперь чисто алгебраически сложить оба равенства, получится уравнение:

$$v - s = g T - g t^2 / 2,$$

которое выглядит правдоподобным, но неверно с точки зрения размерностей — скорость нельзя складывать с расстоянием! Имея в распоряжении инструмент контроля размерностей, внедренный в Mathcad, мы можем проконтролировать размерность вводимой величины путем добавления "размерного нуля", а именно прибавлением и вычитанием некоторой величины заданной размерности. На рис. 2.14 показано, как можно создать функцию пользователя, принимающую в качестве аргументов величины с заданной пользователем же размерностью.

$$V_C(d, h) := \frac{\pi \cdot (d - m + m)^2}{4} \cdot (h - m + m)$$

$$d := 20\text{kg} \quad h := 15\text{cm}$$

$$V_C(d, h) = \blacksquare \blacksquare$$

Значение имеет единицы измерения: Mass, а должно иметь единицы измерения: Length.

$$d := 20$$

$$V_C(d, h) = \blacksquare$$

Значение имеет единицы измерения: Unitless, а должно иметь единицы измерения: Length.

$$d := 20\text{cm} \quad V_C(d, h) = 4712.4\text{cm}^3$$

Рис. 2.14. Создание и вызов "размерной" функции пользователя

Из рис. 2.14 видно, что вновь созданная функция, возвращающая объем цилиндра, принимает значение аргументов только в единицах длины — с размерностью длины. И выдает эта функция значения только с единицами (размерностью) длины в кубе (объема).

Следующий пример (рис. 2.15) показывает, что в среде Mathcad ведется контроль только соответствия размерностей физических величин, а не самих физических величин.

$$V_C(d, h) := \frac{\pi \cdot (d - m + m)^2}{4} \cdot (h - m + m)$$

$$d := 20\text{cm} \quad h := 15\text{cm}$$

$$V_C(h, d) = 3534.3\text{cm}^3$$

↑↑ Не на своих местах!

Рис. 2.15. Ошибка при вызове функции пользователя

На рис. 2.15 показано, что ошибка при вызове функции, возвращающей объем цилиндра, может возникнуть, если перепутать местами аргументы функции: на место диаметра основания цилиндра поставить его высоту, а на место высоты — диаметр. Этой ошибки можно избежать, усилив инструмент контроля, нацелив его не на раз-

мерности, а на физические величины. Дело в том, что диаметр основания цилиндра и его высота — это две разные физические величины, имеющие одинаковые размерности длины. Впервые, в наиболее законченной форме, эта идея была эффективно развита в книге Хантли: Хантли Г. Анализ размерностей.— М.: Мир, 1970, который, в частности, предложил использовать "векторные размерности", т. е. приписывать разнонаправленным величинам различные символы размерности.

Таким образом, единицы измерения в среде Mathcad нужно привязывать не к размерностям (длина — метры, футы, мили и т. д., масса — килограммы, фунты и т. д.), а к физическим величинам. При этом нужно будет принять, что метры диаметра основания нашего цилиндра и метры его высоты — это разные единицы измерения, и это их "различие", в частности, должно выражаться в том, что эти метры нельзя, например, складывать: возникнет ошибка, как если бы мы складывали давление или массу (см. рис. 2.9).

В пакет Mathcad вшиты восемь размерностей — длина, время, масса, сила тока, температура, сила света, количество вещества ("великолепная семерка" SI) и стоимость (только в 14-й). Если же в расчет необходимо ввести размерность, не перечисленную выше, например, количество информации с единицами бит, байт и т. д., или стоимость (в версиях Mathcad до 14-й), то приходится под эту размерность резервировать одну из свободных размерностей, размерность, которая не задействована в данном расчете. На рис. 2.16 показано, как можно две одинаковые размерности (диаметр основания цилиндра и его высоту) разделить на две разные физические величины и прикрепить к ним две различные единицы длины.

$m-d := m \quad m-h := cd$

$$V_c(d, h) := \frac{\pi \cdot \left(\frac{d + m-d}{m-d} - 1 \right)^2}{4} \cdot \left(\frac{h + m-h}{m-h} - 1 \right) \cdot m^3$$

$d := 0.2m-d \quad h := 0.15m-h$

$$V_c(d, h) = 4712.4 \text{ cm}^3$$

$V_c(h, d) = \blacksquare \blacksquare$

Значение имеет единицы измерения: Luminous Intensity, а должно иметь единицы измерения: Length.

Рис. 2.16. Расчет объема цилиндра с диаметром основания (первая физическая величина) и высотой (вторая физическая величина)

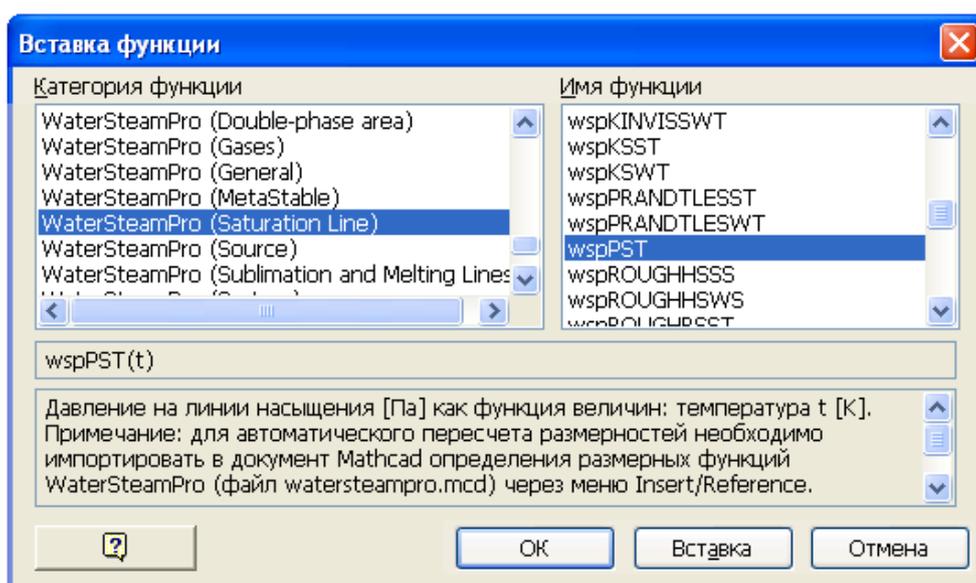
Теперь вольная или невольная перестановка местами аргументов у функции, возвращающей объем цилиндра, будет прерываться сообщением об ошибке, которую мож-

но расшифровать так: "Тут стоит не та физическая величина — высота цилиндра вместо диаметра его основания!"

Правда, в сообщении об ошибке, показанном на рис. 2.16, стоит иное: "Тут должна быть длина, а стоит сила света?!". Но если вспомнить, что "безработная" в данном расчете кандела (cd) была нами связана с недостающей физической величиной, то все встанет на свои места.

Все вышеприведенные рассуждения можно считать некими "изысками" в области теории размерных (физических) величин и попытками приложения этой теории к компьютерным технологиям. Но вот реальная термодинамическая задача, при решении которой в среде Mathcad понадобится или, по крайней мере, будет желательно оперирование разными физическими величинами, имеющими одинаковую размерность (в данном случае массы).

Необходимо рассчитать термический КПД парогазового теплоэнергетического цикла. Для решения этой задачи необходимо иметь функции, возвращающие термодинамические свойства рабочих тел этого цикла. Эти функции можно подключить к среде Mathcad, воспользовавшись уже упоминавшимся нами пакетом программ WaterSteamPro (www.wsp.ru) — см. рис. 2.17.



$$t := \underbrace{120}_{\text{Шкала Цельсия}} + \underbrace{273.15}_{\text{Шкала Кельвина}} = 393.15$$

$$p := \text{wspPST}(t) = \underbrace{1.987 \times 10^5}_{\text{паскали}}$$

Рис. 2.17. "Безразмерные" функции пакета WaterSteamPro в среде Mathcad

На рис. 2.17 показано, как в среде Mathcad можно рассчитать температуру кипения воды при заданном давлении, вызвав одну из функций пакета WaterSteamPro — функцию `wspTSP`. При этом все величины остаются безразмерными, но имеется в виду, что давление выражено в паскалях, а температура измеряется по шкале Кельвина (выражена в кельвинах). Все функции пакета WaterSteamPro оперируют безразмерными аргументами и вызывают безразмерные величины, которые соответствуют базовым единицам измерения системы СИ: метры, килограммы, джоули (а не килоджоули), паскали (а не мегапаскали) и т. д.

Но программа Mathcad оборудована средствами работы с размерными величинами, и этот механизм необходимо задействовать при решении и нашей задачи о парогазовом цикле, да и вообще в теплоэнергетических расчетах.

Чтобы функции пакета WaterSteamPro стали размерными, их нужно переопределить в среде Mathcad, сделав в конкретном Mathcad-документе ссылку на файл `watersteampro.mcd`, входящий в пакет WaterSteamPro (рис. 2.18, а также рис. 1.30).

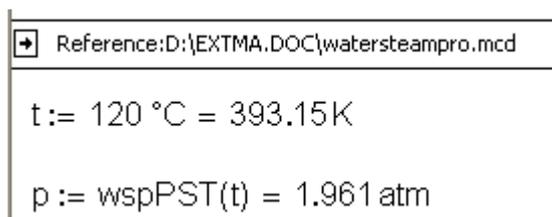


Рис. 2.18. "Размерные" функции пакета WaterSteamPro в среде Mathcad

Что содержит файл `watersteampro.mcd`? Там, во-первых, содержатся операторы, вводящие в расчет национальные и недостающие кратные единицы измерения (`кг := kg`, `м := m`, `с := s`, `кДж := 1000 J` и т. д.), а также различные константы, необходимые в теплоэнергетических расчетах (универсальная газовая постоянная, температура и давление тройной и критической точек воды и водяного пара и др.). Во-вторых, и это главное, файл `watersteampro.mcd` хранит операторы, делающие в среде Mathcad безразмерные функции пакета WaterSteamPro размерными.

Можно поступить и по-другому: не делать ссылку на файл `watersteampro.mcd`, переопределяющий все функции пакета, а вставить в рабочий документ операторы, переопределяющие только отдельные функции, необходимые в конкретном теплотехническом расчете, учтя при этом наш тезис о том, что некоторые разные физические величины имеют одинаковые размерности. В частности, в нашей задаче о термическом КПД парогазового цикла будут фигурировать две разные физические величины — масса газа и масса воды/водяного пара, имеющие одинаковую размерность массы (рис. 2.19).

$$\begin{aligned}
& \text{kgg} := \text{cd} \quad \text{J/kgg} := \frac{\text{J}}{\text{kgg}} \quad \text{J/(kgg K)} := \frac{\text{J}}{\text{kgg K}} \quad \text{Единицы измерения для газа} \\
& \text{wspgHGST}(\text{gas_specification}, t) := \text{wspgHGST}_{[\text{user}]} \left(\text{gas_specification}, \frac{t + K}{K} - 1 \right) \cdot \text{J/kgg} \\
& \text{wspgSGSPT}(\text{gas_specification}, p, t) := \text{wspgSGSPT}_{[\text{user}]} \left(\text{gas_specification}, \frac{p + \text{Pa}}{\text{Pa}} - 1, \frac{t + K}{K} - 1 \right) \cdot \text{J/(kgg K)} \\
& \text{wspgTGSPS}(\text{gas_specification}, p, s) := \text{wspgTGSPS}_{[\text{user}]} \left(\text{gas_specification}, \frac{p + \text{Pa}}{\text{Pa}} - 1, \frac{s + \text{J/(kgg K)}}{\text{J/(kgg K)}} - 1 \right) \cdot \text{K} \\
& \text{kgws} := \text{kg} \quad \text{J/kgws} := \frac{\text{J}}{\text{kgws}} \quad \text{J/(kgws K)} := \frac{\text{J}}{\text{kgws K}} \quad \text{Единицы измерения для воды и водяного пара} \\
& \text{wspHPT}(p, t) := \text{wspHPT}_{[\text{user}]} \left(\frac{p + \text{Pa}}{\text{Pa}} - 1, \frac{t + K}{K} - 1 \right) \cdot \text{J/kgws} \\
& \text{wspSPT}(p, t) := \text{wspSPT}_{[\text{user}]} \left(\frac{p + \text{Pa}}{\text{Pa}} - 1, \frac{t + K}{K} - 1 \right) \cdot \text{J/(kgws K)} \\
& \text{wspPST}(t) := \text{wspPST}_{[\text{user}]} \left(\frac{t + K}{K} - 1 \right) \text{Pa} \\
& \text{wspXSTS}(t, s) := \text{wspXSTS}_{[\text{user}]} \left(\frac{t + K}{K} - 1, \frac{s + \text{J/(kgws K)}}{\text{J/(kgws K)}} - 1 \right) \\
& \text{wspHSTX}(t, x) := \text{wspHSTX}_{[\text{user}]} \left(\frac{t + K}{K} - 1, x \right) \cdot \text{J/kgws} \\
& \text{wspHSWT}(t) := \text{wspHSWT}_{[\text{user}]} \left(\frac{t + K}{K} - 1 \right) \cdot \text{J/kgws} \\
& \text{wspHSST}(t) := \text{wspHSST}_{[\text{user}]} \left(\frac{t + K}{K} - 1 \right) \cdot \text{J/kgws} \\
& \text{wspSSWT}(t) := \text{wspSSWT}_{[\text{user}]} \left(\frac{t + K}{K} - 1 \right) \cdot \text{J/(kgws K)} \\
& \text{wspHPS}(p, s) := \text{wspHPS}_{[\text{user}]} \left(\frac{p + \text{Pa}}{\text{Pa}} - 1, \frac{s + \text{J/(kgws K)}}{\text{J/(kgws K)}} - 1 \right) \cdot \text{J/kgws}
\end{aligned}$$

Рис. 2.19. Переопределение некоторых функций пакета WaterSteamPro

В расчете нам нужны будут следующие функции, которые "размерно" и "физически" переопределяются в области Mathcad-документа, показанного на рис. 2.19.

Для газа (это в нашем расчете — воздух):

- wspgHGST — энтальпия (H) газа в зависимости от его спецификации (GS) и температуры (T);
- wspgSGSPT — энтропия (H) газа в зависимости от его спецификации (GS) и давления (P);

- ❑ `wppgTGSP` — температура (T) газа в зависимости от его спецификации (GS), давления (P) и энтропии (S).

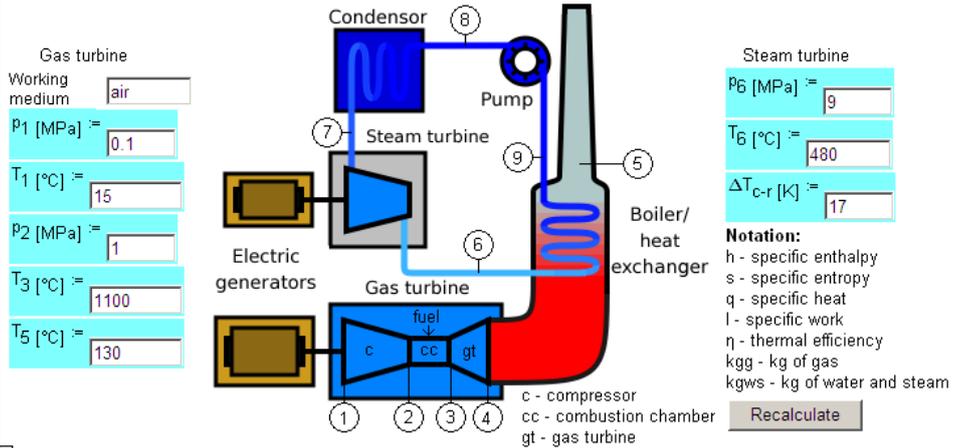
Для воды и водяного пара:

- ❑ `wspHPT` — энтальпия (H) воды и водяного пара в зависимости от давления (P) и температуры (T);
- ❑ `wspSPT` — энтропия (S) воды и водяного пара в зависимости от давления (P) и температуры (T);
- ❑ `wspPST` — давление (P) воды на линии насыщения (S — здесь saturation) в зависимости от температуры (T);
- ❑ `wspXSTS` — степень сухости (X) влажного пара (S — см. выше) в зависимости от температуры (T) и энтропии (S);
- ❑ `wspHSTX` — энтальпия (H) влажного пара (S) в зависимости от температуры (T) и степени сухости (X);
- ❑ `wspHSWT` — энтальпия (H) на линии насыщения (S) воды (W) в зависимости от температуры;
- ❑ `wspHSST` — энтальпия (H) на линии насыщения (S) пара (S) в зависимости от температуры;
- ❑ `wspSSWT` — энтропия (S) на линии насыщения (S) воды (W) в зависимости от температуры;
- ❑ `wspHPS` — энтальпия (H) в воды и водяного пара в зависимости от давления (P) и энтропии (S)

На рис. 2.19 показано, что двенадцать функций пакета WaterSteamPro (а всего их в пакете более 300), необходимых для расчета термического КПД парогазового цикла, не переопределяются, а создаются заново. В расчете мы будем иметь по паре функций: функции `wspXXX[USER]` — исходные безразмерные функции и `wspXXX` (без нижнего индекса) — вновь созданные на базе старых "размерных" функций, в которых будет вестись контроль размерности аргументов (на месте температуры может стоять только температура, а на месте давления — только давление и т. д.) и которые будут выдавать размерные величины — энтальпию (kJ/kg), энтропию ($\text{kJ}/(\text{kgK})$) и не просто "на килограмм", а "на килограмм газа" или на "килограмм воды/водяного пара".

Теперь, когда в среде Mathcad есть нужные для нашего теплотехнического расчета функции с префиксами `wspg` или `wsp`, легко провести расчет нашего парогазового цикла (рис. 2.20).

Thermal efficiency of **Combined cycle**: Rankin cycle (steam turbine) + Brayton cycle (gas turbine)



Ideal Gas turbine calculation

af = "air" $h_1 := \text{wspgHGST}(af, T_1) = 288.56 \text{ kJ/kgg}$ $s_1 := \text{wspgSGSPT}(af, p_1, T_1) = 6.83 \text{ kJ/(kgg K)}$

$s_2 := s_1$ $T_2 := \text{wspgTGSPS}(af, p_2, s_2) = 279.02 \text{ }^\circ\text{C}$ $h_2 := \text{wspgHGST}(af, T_2) = 557.39 \text{ kJ/kgg}$

$p_3 := p_2$ $s_3 := \text{wspgSGSPT}(af, p_3, T_3) = 7.847 \text{ kJ/(kgg K)}$ $h_3 := \text{wspgHGST}(af, T_3) = 1483.61 \text{ kJ/kgg}$

$p_4 := p_1$ $s_4 := s_3$ $T_4 := \text{wspgTGSPS}(af, p_4, s_4) = 498.08 \text{ }^\circ\text{C}$ $h_4 := \text{if}(T_4 > T_6, \text{wspgHGST}(af, T_4), \text{"Error"}) = 790.87 \text{ kJ/kgg}$

$q_{cc} := h_3 - h_2 = 926.22 \text{ kJ/kgg}$ $l_{\text{gas turb}} := h_3 - h_4 = 692.74 \text{ kJ/kgg}$ $l_{\text{compressor}} := h_2 - h_1 = 268.83 \text{ kJ/kgg}$

$$\eta_{\text{gas turb}} := \frac{l_{\text{gas turb}} - l_{\text{compressor}}}{q_{cc}} = 45.77 \%$$

Mass of gas (air)

Ideal Steam turbine calculation

$h_6 := \text{wspHPT}(p_6, T_6) = 3336.33 \text{ kJ/kgws}$ $s_6 := \text{wspSPT}(p_6, T_6) = 6.593 \text{ kJ/(kgws K)}$

$T_7 := T_1 + \Delta T_{k-p} = 32 \text{ }^\circ\text{C}$ $p_7 := \text{wspPST}(T_7) = 4.76 \text{ kPa}$ $s_7 := s_6$ $x_7 := \text{wspXSTS}(T_7, s_7) = 77.12 \%$

$h_7 := \text{wspHSTX}(T_7, x_7) = 2004.37 \text{ kJ/kgws}$ $T_8 = T_7$ $h_8 := \text{wspHSWT}(T_8) = 134.11 \text{ kJ/kgws}$

$p_9 := p_6$ $s_9 := \text{wspSSWT}(T_8) = 0.464 \text{ kJ/(kgws K)}$ $s_g := s_8$ $h_g := \text{wspHPS}(p_9, s_g) = 143.13 \text{ kJ/kgws}$

$q_{\text{boiler}} := h_6 - h_g = 3193.2 \text{ kJ/kgws}$ $l_{\text{steam turb}} := h_6 - h_7 = 1331.96 \text{ kJ/kgws}$ $l_{\text{pump}} := h_g - h_8 = 9.023 \text{ kJ/kgws}$

$$\eta_{\text{steam turb}} := \frac{l_{\text{steam turb}} - l_{\text{pump}}}{q_{\text{boiler}}} = 41.43 \%$$

Mass of Water and Steam

Ideal Combined cycle calculation

$h_5 := \text{wspHGST}(af, T_5) = 404.51 \text{ kJ/kgg}$

Heat balance of the boiler $m \cdot (h_4 - h_5) = h_6 - h_g$ $m := \frac{h_6 - h_g}{h_4 - h_5} = 8.26 \text{ kgg/kgws}$

$q_{cc} := m \cdot (h_3 - h_2) = 7655.13 \text{ kJ/kgws}$ $l_{\text{gas turb}} := (h_3 - h_4) - (h_2 - h_1) = 423.91 \text{ kJ/kgg}$

$l_{\text{steam turb}} := (h_6 - h_7) - (h_g - h_8) = 1322.94 \text{ kJ/kgws}$ $\frac{m \cdot l_{\text{gas turb}}}{l_{\text{steam turb}}} = 2.648$

$$\eta_{\text{combined cycle}} := \frac{m \cdot l_{\text{gas turb}} + l_{\text{steam turb}}}{q_{cc}} = 63.05 \%$$

Useful Added Error Messages!

$h_1 - h_6 = \blacksquare$ $l_{\text{gas turb}} + l_{\text{steam turb}} = \blacksquare$

The units in this expression do not match. The units in this expression do not match.

Insert Unit

Dimension

Mass:

- Mass1
- Mass2
- Mass3
- Mass4

Unit

- Gram (gm)
- Kilogram (kg)
- Metric ton (tonne)
- Milligram (mg)
- Ounce (oz)
- Pound (lb)

Рис. 2.20. Расчет парогазового цикла

В расчете, показанном на рис. 2.20, мы имеем не только конкретизацию килограмма — килограмм газа (kg_g) и килограмм воды и водяного пара (kg_{ws}), но и контроль над правильностью работы с физическими величинами (энтальпия, энтропия и т. д. килограмма газа или воды/водяного пара). Так, в конце расчета показаны два аварийных останова расчета по двум операторам (разность энтальпий рабочего цикла в точке 1 и точке 6 и сумма удельных работ газовой и паровой турбин). При отсутствии разделения физических величин с одной размерностью массы (см. рис. 2.19) в этих операторах не было бы аварийного останова, что могло бы привести к ошибке в расчете с разной степенью тяжести последствий (см. примеры в начале текста).

В реальной же (а не идеальной, как у нас) парогазовой установке участвуют не два, а больше рабочих тел. Кроме воды и водяного пара, а также воздуха нужно учитывать термодинамические свойства топлива, поступающего в камеру сгорания газовой турбины (природный газ различного состава или жидкое топливо), продукты сгорания и т. д. Поэтому в расчете желательно иметь не две (kg_g и kg_{ws}), а больше единиц массы и других базовых единиц измерения.

Одно из решений в среде Mathcad проблемы разных физических величин с одинаковой размерностью можно предложить через дополнительную вкладку **Quality** (Физическая величина) в диалоговом окне **Properties** (Свойства), возникающем, если на имени вновь создаваемой функции или переменной нажать правую кнопку мыши. В текстовое окно этой вкладки можно записать, а еще лучше — вставить из окна **Dimension** (Размерность) нужную размерность — базовую (масса, ..., кол-во вещества) или составную (сила, мощность и т. д.). При этом можно будет имя размерности дополнить числом 1, 2, 3 и т. д., отличающим одну физическую величину от другой, одномерной. Эта технология отображена на рис. 2.21.

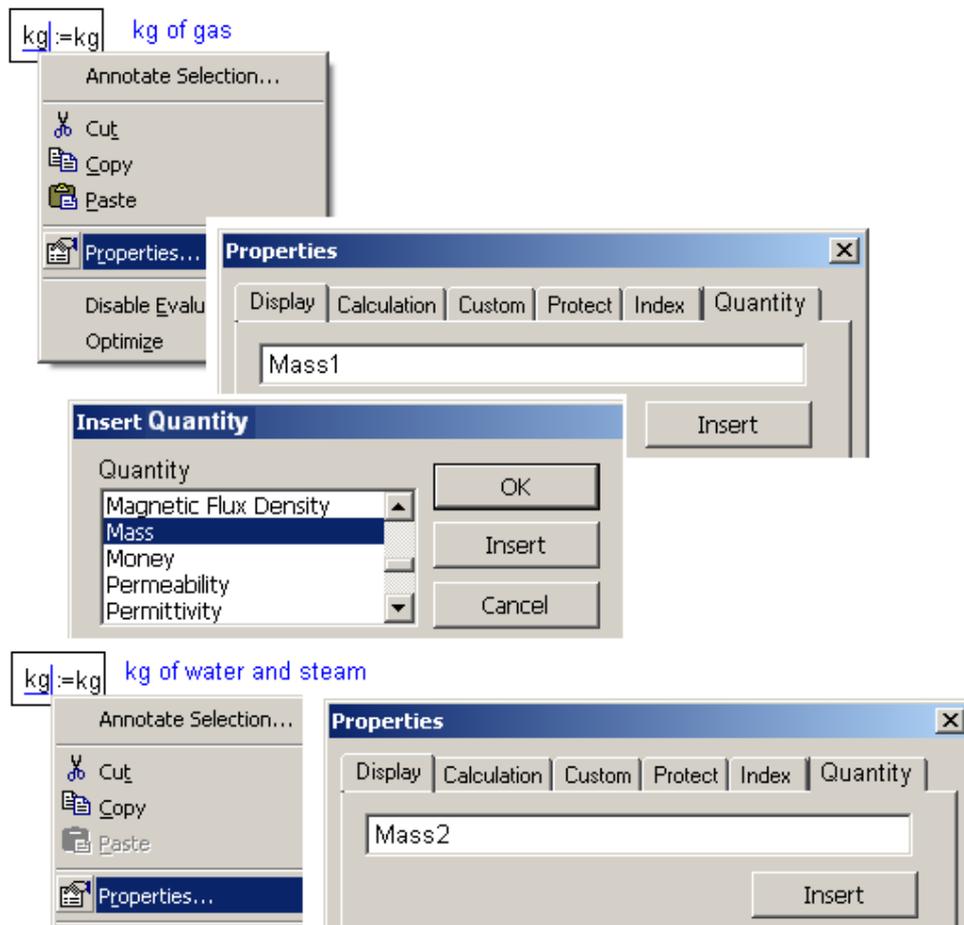


Рис. 2.21. Предложение по развитию инструментария "Физическая величина — Размерность — Единица измерения" в среде Mathcad

В расчете, показанном на рис. 2.20, безразмерная переменная m (отношение массового расхода газа в газовой турбине к массовому расходу пара в паровой турбине) из безразмерной превратилась в разменную. И это, как мы увидели, хорошо — чем меньше в расчете будет безразмерных величин, тем шире будет поле для инструмента контроля размерностей. Но в расчете остались другие безразмерные величины — это степень сухости водяного пара (отношение массы сухого пара к массе влаги (капель) в нем) в единице объема и три значения термических КПД (η_t — отношении e полезной работы к затраченному теплу). Если числители и знаменатели в этих дробях (отношениях) считать одинаковой размерности, то эти отношения (дроби) должны быть безразмерными. Если же числители и знаменатели этих дробей считать разными физическими величинами (кг воды и кг пара; джоули работы и джоули тепла), то эти величины (x и η_t) нужно считать не просто размерными, а разноразмерными, и

их, например, нельзя будет вольно или невольно сложить в среде Mathcad, поддерживающей механизм размерных величин не частично, как сейчас, а полностью, как предложено, к примеру, на рис. 2.21.

Но когда расчет отлажен, то для его ускорения можно отключить единицы измерения и, заодно, отказаться от переопределения функций, "безразмерно" созданных на "безразмерном" языке программирования C и прикрепленных к Mathcad по технологии DLL. Так на рис. 1.22 показаны изменения, которые нужно сделать в скрытой области (сравните с рис. 1.19), чтобы после отключения механизма единиц измерения расчет по-прежнему правильно работал.

▣	$kgg := 1$ $J := 1$ $kgws := 1$ $Pa := 1$ $K := 1$ Единицы - единицы
	$J/kgg := \frac{J}{kgg}$ $J/(kgg K) := \frac{J}{kgg K}$ $J/kgws := \frac{J}{kgws}$ $J/(kgws K) := \frac{J}{kgws K}$
	$p_1 := p_1 [MPa] 10^6 Pa$ $T_1 := (T_1 [^{\circ}C] + 273.15) K$ $p_2 := p_2 [MPa] 10^6 Pa$ $T_3 := (T_3 [^{\circ}C] + 273.15) K$
	$T_5 := (T_5 [^{\circ}C] + 273.15) K$ $p_6 := p_6 [MPa] 10^6 Pa$ $T_6 := (T_6 [^{\circ}C] + 273.15) K$ $\Delta T_{к-р} := \Delta T_{с-р} [K] K$
	$kPa := 1000 Pa$ $kJ/kgg := 1000 J/kgg$ $kJ/(kgg K) := 1000 J/(kgg K)$
	$kJ/kgws := 1000 J/kgws$ $kJ/(kgws K) := 1000 J/(kgws K)$ $kgg/kgws := \frac{kgg}{kgws}$
▢	

Рис. 2.22. Ввод в расчет безразмерных единиц

А вот случай, когда работу единиц измерения не просто можно, а нужно отключать (рис. 2.23).

par := 20

dim := высота, mm
 поверхность, cm²
 объем, L

Свойства компонента

Свойства группы переключателей

Посмотреть

Имя	Значение
1	высота, mm h
2	поверхность, ... s
3	объем, L v

par := if(dim = "h", par·mm, if(dim = "s", par·cm², L))

Формы возможных возвращаемых значений должны совпадать.
 Форма первого: Length²,
 а форма второго: Volume.

m := 1 mm := $\frac{m}{1000}$ cm := $\frac{m}{100}$

par := if(dim = "h", par·mm, if(dim = "s", par·cm², L))

Формы возможных возвращаемых значений должны совпадать.
 Форма первого: Unitless,
 а форма второго: Length.

L = 1 length

m := 1 mm := $\frac{m}{1000}$ cm := $\frac{m}{100}$ mL := cm³

par := if(dim = "h", par·mm, if(dim = "s", par·cm², par·mL))

Высота := if(dim = "h", par, if(dim = "s", $\sqrt{\frac{par}{6}}$, $\sqrt[3]{par}$))

Площадь := if(dim = "h", 6·par², if(dim = "s", par, 6·($\sqrt[3]{par}$)²))

Объем := if(dim = "h", par³, if(dim = "s", ($\sqrt{\frac{par}{6}}$)³, par))

Высота = 20 mm Площадь = 24 cm² Объем = 8 mL

Параметры документа

Система единиц измерения

Единицы измерения

СИ
 МКС
 СГС
 США
 Нет
 Другая

Параметры документа

Размерность

Показывать размерность

Название размерности

Масса	mass
Длина	length
Время	time
Заряд	current
Температура	temperature
Яркость	luminosity
Вещество	substance

Рис. 2.23. Расчет параметров куба

На рис. 2.23 решается такая задача: пользователь задает высоту куба или площадь его поверхности или его объем (разные физические величины с разными размерностями: расстояние, квадрат расстояния и куб расстояния) и просит компьютер, чтобы он рассчитал высоту куба и (не или!) его площадь поверхности и его объем. Встроенная в Mathcad функция `if` не может иметь на месте своего второго и третьего аргумента (плечи альтернативы) величины с разной размерностью и выдает соответствующее

сообщение об ошибке. Тут и приходится отказываться от единиц измерения, заменяя их на имитацию: $m := 1$ $mm := m/1000$ и т. д.

2.3. Размерность и массивы

Еще одна особенность работы с единицами измерения показана на рис. 2.24.

The image shows a Mathcad worksheet with the following content:

- Definition of a function: $par(h) := \begin{pmatrix} s \leftarrow 6 \cdot h^2 \\ v \leftarrow h^3 \end{pmatrix}$
- An attempt to call the function with a dimensioned argument: $par(20 \cdot mm) =$
- An error message box: "Значение имеет единицы измерения: Length, а должно иметь единицы измерения: Unitless."
- A detailed view of the function definition with a matrix window open. The matrix window shows the function's output as a column vector: $\begin{pmatrix} s \\ m^2 \\ v \\ m^3 \end{pmatrix}$. The matrix window also shows the function's arguments: x_n , x^{-1} , $|x|$, $f(x)$, and "Индекс []".
- Dimensional analysis of the function's output: $s(h) := \underline{par(h)_0} \cdot m^2$ and $v(h) := \underline{par(h)_1} \cdot m^3$
- Dimensional analysis of the function's output for a specific input: $s(20mm) = 24 \text{ cm}^2$ and $v(20mm) = 8 \text{ mL}$

Рис. 2.24. Работа с размерной функцией, возвращающей вектор

Функция par возвращает вектор, содержащий два элемента: площадь поверхности куба (s) и его объем (v) в зависимости от высоты куба h . "Размерный" вызов этой функции: $par(20 \text{ mm}) =$ прерывается сообщением об ошибке, т. к. в среде Mathcad вектор не может хранить разноразмерные величины. Решение проблемы: "обезразмеривание" возвращаемого функцией вектора (s/m^2 и v/m^3) и возврат размерностей отдельным элементам функции-вектора.

"Завершая круг нашего повествования" нельзя еще раз не вспомнить о такой базовой физической величине как плоский или телесный угол. Эта величина, как правило, начинает список размерностей, описанных в SI: сначала идут углы, потом "великолепная семерка SI", а затем единицы, составленные из базовых для силы, мощности и т. д. При этом хоть и указывается, что углы — это безразмерные величины, но отмечается, что их размерность все-таки м/м (плоский угол, радиан) и м²/м² (телесный угол, стерadian). Не вдаваясь в теорию, просто спросим себя, можно ли в среде математической программы с элементами контроля размерностей сложить радиан и стерadian?! В старых версиях Mathcad такое сложение прерывалось сообщением об ошибке, т. к. радиан был безразмерной величиной ($rad = 1$), а стерadian — размерной ($sr = sr$). Потом разработчики пакета поняли, что это нелогично, и в версиях Mathcad 13 и 14 сделали стерadian... тоже безразмерным ($sr = 1$), решив, по-видимому, что м²/м² можно сократить до единицы, как было сокращено выражение м/м для плоского угла. Но представим себе, что было бы, если бы плоский угол сделали размерным ($rad = rad$)?! Тогда синус, косинус и другие тригонометрические функции нужно было бы брать от уже размерных величин... И какой размерности был бы сам синус: \sin (м/м) — новые метры (длина катета) к новому метру (длина гипотенузы)... Где-то это "форменное безумие" нужно было пресечь! Что и сделали разработчики пакета, встроив в Mathcad только частичный контроль размерности, понимая, что у этого контроля нет четко очерченных границ.