Оптимизация функции многих переменных

Задача.

Из круглой жестянки по несложной технологии изготавливается три *пожарных ведер*[1]: вырезаются три сектора, затем полученные выкройки сворачиваются в конус, а шов сваривается (паяется).

Можно ли так раскроить круглую заготовку на три сектора и свернуть из них три конуса, чтобы превысить "двухведерный" рекорд?! Новая, "трехведерная" задача сводится к поиску максимума функции уже не одного, а *двух* аргументов: α (угол заготовки для первого ведра) и β (для второго). Третьему ведру "перепадут остатки": `360-α-β`.

Решение "трехведерной" задачи, как и "одноведерной" или "двухведерной", можно и нужно начать с графического анализа. На рис. 1 построены линии уровня функции `ΣV(α, β)`.

> ***Примечание***
> В этой функции значение `R` принято равным единице, углы отмеряются в градусах, а не в радианах, а сами аргументы α и β отмеряют не углы вырезки, а углы заготовок, из которых сворачиваются конусы-ведра. Это сделано для упрощения задачи при сохранении ее сути.

---

[1] Батунер Л. М., Позин М. Е. Математические методы в химической технике. — Л.: Химия, 1960. В этой книге описывалось не пожарное ведро, а конус, изготавливаемый загибом сектора на круглом листе фильтровальной бумаги. Спрашивается, какой должен быть загиб, чтобы этот фильтр работал оптимально.

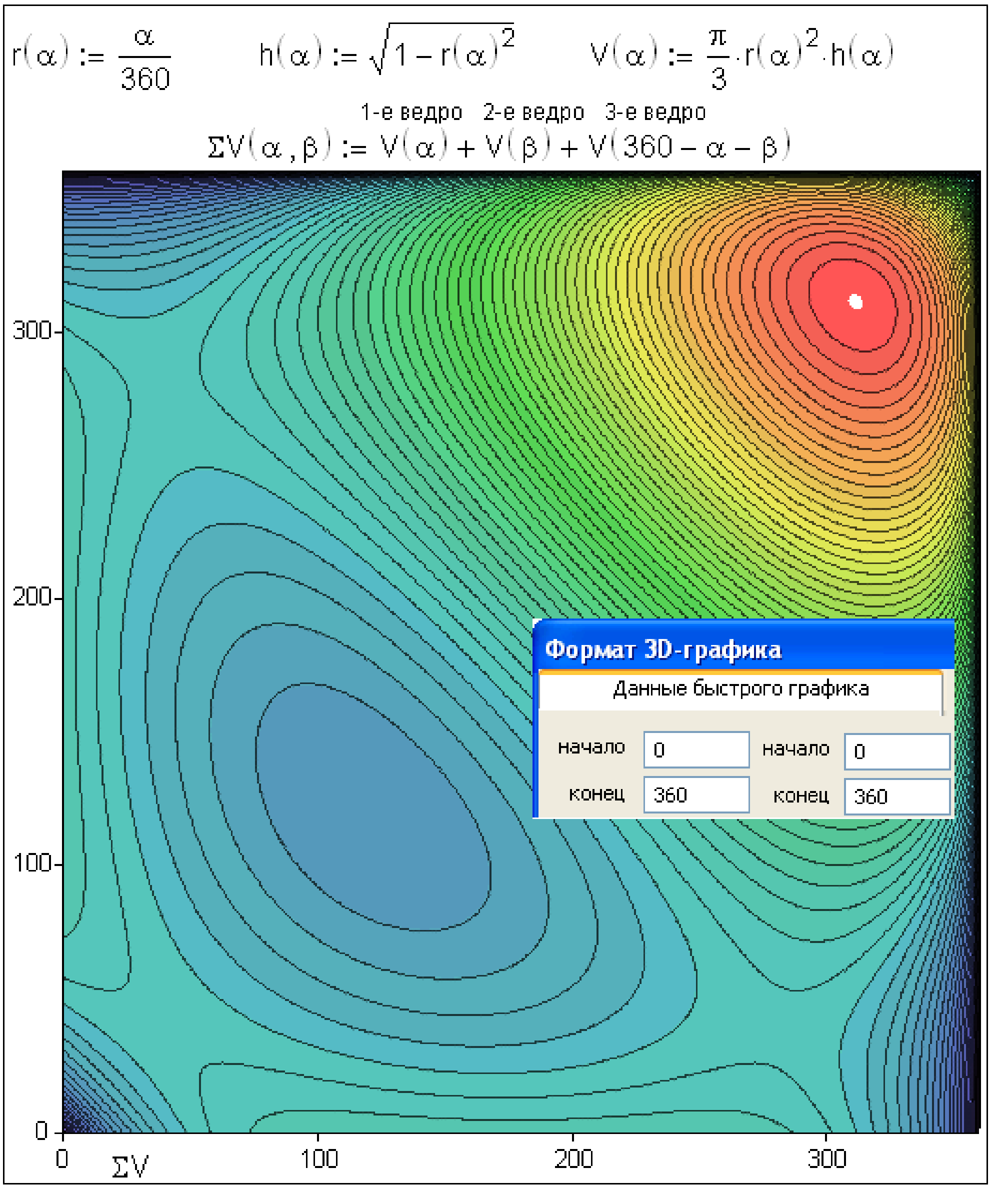


Рис. 1. Топография трехведерной задачи в прямоугольной диаграмме

Из "контурной карты" трехведерной задачи видно[2] (рис. 1), что в прямоугольной области изменения аргументов от 0 до 360° четко просматриваются один ложный максимум в правом верхнем углу и один реальный минимум (круг посекторно делится на три одинаковые части) в левом нижнем углу графика ($\alpha = 120°$, $\beta = 120°$).

Основной недостаток трехмерной графики Mathcad заключается в том, что область изменения аргументов должна быть всегда *прямоугольной*. Но в нашей "трехведерной" задаче эта область *треугольная*, т. к. аргументы функции ΣV связаны ограничением $\alpha + \beta \leq 360$.

На рис. 2 график функции строится так, чтобы ее значения, выходящие за рамки треугольника, приравнивались к нулю (метод штрафных санкций), а сами координаты точек преобразовывались из прямоугольных в треугольные координаты, с углом 60° ($\pi/3$). В этом преобразовании функция ΣV переопределялась, что вызвало необходимость использования системного индекса [doc].

---

[2] Видно из цветного варианта графика. Мы не стали помещать на график значение линий уровня (другой способ фиксации минимумов и максимумов), чтобы не перегружать его.

$$r(\alpha) := \frac{\alpha}{360} \qquad h(\alpha) := \sqrt{1 - r(\alpha)^2} \qquad v(\alpha) := \frac{\pi}{3} \cdot r(\alpha)^2 \cdot h(\alpha)$$

$$\Sigma V(\alpha, \beta) := v(\alpha) + v(\beta) + v(360 - \alpha - \beta)$$

$$\Sigma V(\alpha, \beta) := \left| \begin{array}{l} \alpha' \leftarrow \alpha - \beta \cdot \cot\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ \beta' \leftarrow \dfrac{\beta}{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)} \\ \text{if}\left[(\alpha' + \beta' > 360) \vee (\alpha' < 0) \vee (\beta' < 0), 0, \Sigma V_{[doc]}(\alpha', \beta')\right] \end{array} \right.$$

Рис. 2. Топография трехведерной задачи в треугольной диаграмме

Из рис. 2 видно, что наша функция ΣV имеет шесть максимумов на границах своего существования — на краях треугольника. Отсюда вывод — третье ведро лишнее. На рис. 3 эта "визуальная" догадка подтверждается и численно.

Примечание

Треугольник — это основа визуализации *трехкомпонентных смесей* (сплавов): поверхность над таким треугольником отображает какой-либо параметр (плотность сплава, к примеру, или температуру его плавления), а стороны треугольника — это процентное содержание каждого из трех компонентов. Углы треугольника — один из трех чистых металлов, стороны — двухкомпонентный сплав, а нутро треугольника — трехкомпонентный сплав. Очень часто здесь, как в драке, третий оказывается лишним. Так, например, припой для пайки — это сплав свинца с оловом в оптимальном отношении, имеющий минимальную (опять оптимизация) температуру плавления. Добавление в припой какого-нибудь третьего металла (кадмия или висмута, например) только ухудшает этот основной его технологический показатель, или наоборот улучшает его — делает припой более тугоплавким. По адресу **http://twt.mpei.ac.ru/mas/worksheets/3_st_isparenie.mcd** выложен расчет из области энергетики, также "укладывающейся" в треугольную диаграмму, но с оптимумом внутри, а не на краях треугольника.

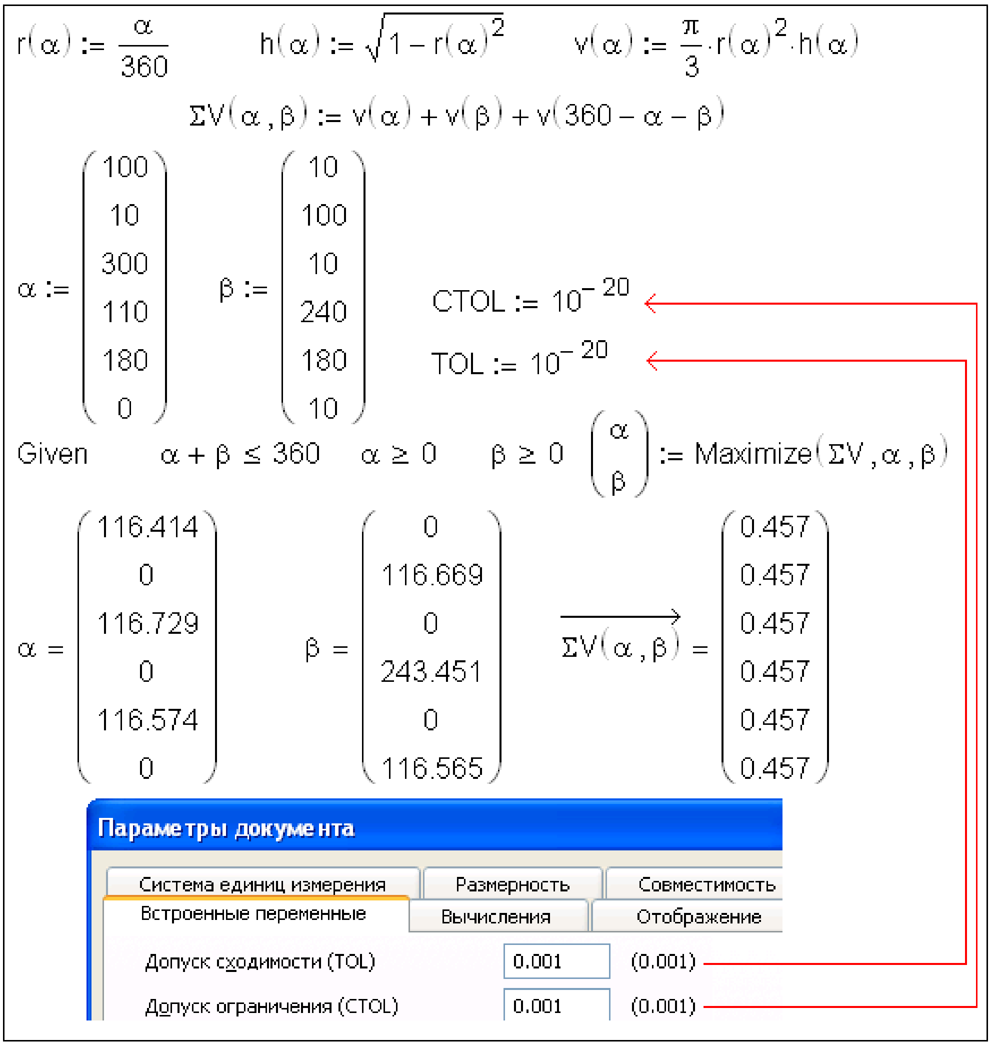


Рис. 3. Численное решение трехведерной задачи

При численном решении трехведерной задачи (рис. 3) функция `Maximize` дополняется ключевым словом `Given`, за которым записываются *ограничения* при решении оптимизационных задач. Ограничения, как правило, вводятся в задачу поэтапно. Сначала делается попытка решения задачи без ограничений (см., например, рис. 4.4, где функция `Maximize` успешно работала без ключевого слова `Given`), а потом, если решение срывается или оно неверное, вводятся ограничения, но опять же не все сразу, а по одному, каждое из которых как бы отсекает функции `Maximize` путь к неверному решению (обкладывание функции флажками как волка в лесу). Дело в том, что одновременный ввод в задачу всех ограничений (а часто они дублируют друг друга) может срывать решение задачи, как и в случае полного отсутствия ограничений. Нюанс здесь в том, что численная математика Mathcad базируется на *градиентных методах* решения задач, которые не любят "острых углов" — обрывов в функциях, создаваемых этими самыми ограничениями.

На рис. 3, как, впрочем, и в решении, показанном на рис. 4.4, задействован вектор, а не скаляр первых приближений к решению, что позволило нам, дав первые приближения вблизи предполагаемых шести максимумов (см. рис. 2), получить эти самые шесть искомых максимумов.

Задача о максимальном объеме коробки

Теперь решим задачу, подобную задаче о пожарном ведре, но более простую и более известную (см. например Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления // Том 1. — М.: Физматлит, 2003: **http://lib.mexmat.ru/books/34)** задачу о максимальном объеме коробки (рис. 4.8). Она тоже будет иметь интересное продолжение, связанное с "утилизацией отходов раскроя".

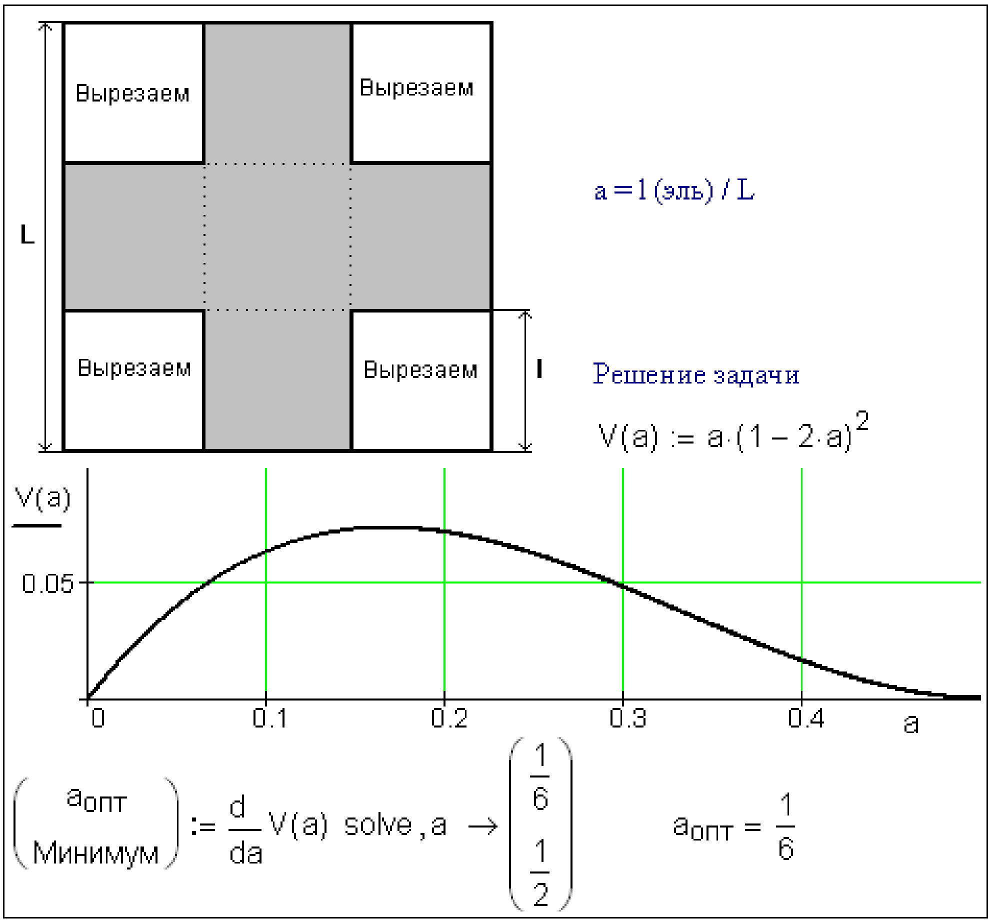
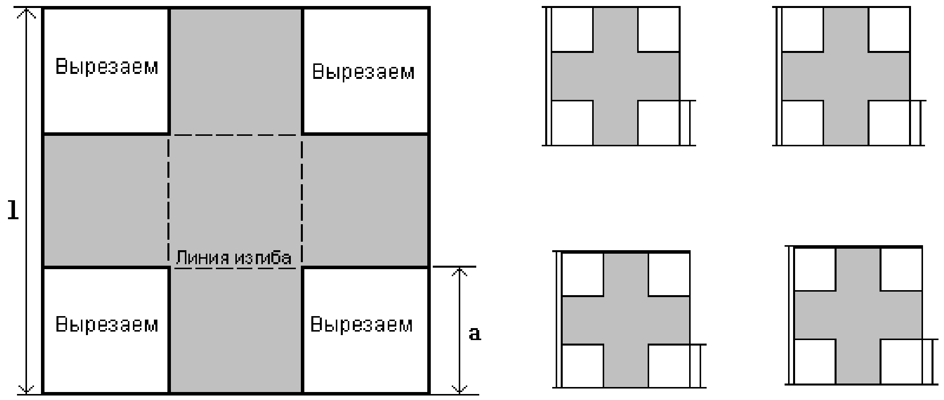


Рис. 4.8. Задача об оптимальном раскрое коробки

У квадратной жестянки по углам вырезаются четыре квадрата. Полученная таким образом крестообразная заготовка сгибается в прямоугольную призму без верхней крышки, а четыре шва свариваются (паяются). Требуется рассчитать размер сторон вырезаемых квадратов (а лучше — отношение размеров квадратов a, чтобы отойти от конкретных размеров), при котором объем нашего "квадратного ведра" (коробки) будет максимальным.

На рис. 4.8 показано графическое и аналитическое решения задачи. Они отличаются от аналогичных решений по пожарному ведру (см. рис. 4.1 и 4.2) только видом анализируемой функции.

Продолжение задачи о коробке также похоже на продолжение задачи о пожарном ведре: обрезки идут на изготовление новых четырех коробок, новые обрезки (их уже будет 16) тоже пойдут в дело, и так до бесконечности. Но до нее (до бесконечности) мы доберемся чуть позже (рис. 4.10), сейчас же мы ограничимся только первыми тремя шагами раскроя квадратной заготовки (рис. 4.9).

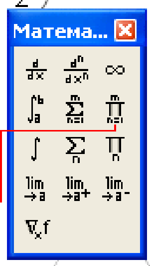


$$V_1(a) := a\cdot(1-2\cdot a)^2$$

$$V_5(a,b) := V_1(a) + 4\cdot a\cdot b\cdot(a-2\cdot a\cdot b)^2$$

$$\begin{pmatrix} No & No \\ a & b \\ No & No \\ No & No \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial a} V_5(a,b) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial b} V_5(a,b) = 0 \end{pmatrix} \text{solve}, \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{9}{29} + \frac{3}{58}\cdot 7^{\frac{1}{2}} & \frac{1}{6} \\ \frac{9}{29} - \frac{3}{58}\cdot 7^{\frac{1}{2}} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\frac{a}{b} = 1.0409771 \qquad b = \frac{1}{6}$$



$$\Sigma V(a) := \sum_{i=0}^{\text{last}(a)} \left[4^i \cdot \prod_{j=0}^{i} a_j \cdot \left(\text{if}\left(i = 0, 1, \prod_{j=0}^{i-1} a_j\right) - 2\cdot \prod_{j=0}^{i} a_j \right)^2 \right]$$

$$a := \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ a \\ b \end{pmatrix} \quad \text{Given} \quad a_2 = \frac{1}{6} \quad a_1 = \frac{9}{29} - \frac{3}{58}\cdot 7^{\frac{1}{2}} \quad a := \text{Maximize}(\Sigma V, a_0)$$

$$a\cdot 6 = 1.04187$$

Рис. 4.9. Задача об оптимальном раскрое пяти коробок

Задача о коробках хороша тем, что в ней можно рассматривать любое число переменных оптимизации. Кроме того, сам процесс оптимизации можно в свою очередь также оптимизировать — оптимизация оптимизации, оптимизация в квадрате, если так можно сказать.

Формулу, по которой высчитывается суммарный объем коробок, можно сделать либо с переменным числом аргументов (функции V_1 и V_5 на рис. 4.9), либо с одним аргументом-вектором (функция ΣV). Второй вид записи (ΣV) более труден для вывода и анализа, зато более универсален — он позволяет делать расчет по любому количеству шагов раскроя. Для этого достаточно (только) менять длину вектора-аргумента функции ΣV. Слово "только" заключено в скобки потому, что в этом расчете свою роль может сыграть точность численной математики Mathcad. Здесь нужно будет менять не "только" число шагов раскроя, но и еще и методы расчета. Но это уже другая тема.

На рис. 4.9 оптимизация раскроя сделана двумя методами. Для функции V_5 (два шага раскроя — пять коробок) решение найдено символьной математикой через поиск корней системы двух уравнений, включающих частные производные функции V_5 по переменным a и b. Для функции ΣV (три шага раскроя — 21 коробка) решение найдено через численную математику и через сведение задачи с тремя неизвестными к задаче с одной неизвестной и с опорой на решения, найденные в задаче с двумя неизвестными. Это один из основных принципов математики.

Примечание

Символ простой производной (умолчание) преобразуется в символ частной производной через соответствующую команду контекстного меню, вызываемого щелчком правой кнопкой мыши на операторе взятия производной.

На рис. 4.10 даны решения задачи о бесконечном числе шагов раскроя коробок в двух вариантах: пропорция раскроя a не меняется (верхняя часть рис. 4.10) и пропорция раскроя меняется (но не a, b, c и т. д., а a_0, a_1, a_2 и т. д. — элементы вектора a), а задача сводится к поиску оптимума функции с *бесконечным числом аргументов*.

$$V(a, n) := \sum_{i=1}^{n} \left[4^{i-1} \cdot a^{i} \cdot \left(a^{i-1} - 2 \cdot a^{i}\right)^{2}\right] \qquad a := 0.15 \qquad a_{опт}(n) := \mathrm{Maximize}(V, a)$$

$i := 1 .. 10$

$i =$	$a_{опт}(i) =$	$V(a_{опт}(i), i) =$
1	0.166666667116501	1.000000000000000
2	0.173332463423214	1.01962215114863
3	0.173638167729551	1.02005781632245
4	0.173647898141464	1.02006698978142
5	0.173648170491226	1.02006718196422
6	0.173648177629288	1.02006718598944
7	0.173648177808845	1.02006718607374
8	0.173648177813096	1.02006718607551
9	0.173648177813732	1.02006718607555
10	0.173648177813987	1.02006718607555

$V\left(\frac{1}{6}, 1\right)$

$$a := a \qquad V_{infinity}(a) := \sum_{i=1}^{\infty} \left[4^{i-1} \cdot a^{i} \cdot \left(a^{i-1} - 2 \cdot a^{i}\right)^{2}\right] \text{ simplify } \rightarrow -a \cdot \frac{(-1 + 2 \cdot a)^{2}}{4 \cdot a^{3} - 1}$$

$$\frac{d}{da} V_{infinity}(a) = 0 \;\Bigg|\; \begin{matrix} \text{solve}, a \\ \text{float}, 25 \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} .5000000000000000000000000 \\ .7660444431189780352023926 + 1. \cdot 10^{-25} \cdot i \\ -.9396926207859083840541092 \\ .1736481776669303488517166 \end{pmatrix}$$

Решение-->

$$a_0 := \frac{1}{6} \qquad i := 0 .. 10$$

$$a_{i+1} := \frac{1}{4 + 2 \cdot \sqrt{1 - 2 a_i \cdot \left(1 - 2 a_i\right)}}$$

$a =$

	0
0	0.166666666666667
1	0.173495621841487
2	0.173644979419639
3	0.173648110679800
4	0.173648176263916
5	0.173648177637545
6	0.173648177666315
7	0.173648177666917
8	0.173648177666930
9	0.173648177666930
10	0.173648177666930
11	0.173648177666930

Рис. 4.10. Решение задачи о бесконечном числе коробок

При фиксированной пропорции раскроя (верхняя часть рис. 4.10) оптимум находится за счет упрощения выражения — через замену бесконечной суммы на несложное выражение.

Для изменяющейся пропорции раскроя (нижняя часть рис. 4.10) решение[3] представлено в виде рекуррентного выражения, первое значение которого (пропорция раскроя последней коробки в бесконечной цепи) равна 1/6 (см. рис. 4.8).

---

[3] Автор, надеется, что читатель найдет его сам.