Системы уравнений. Уроки математики в классической литературе

В художественной литературе часто можно встретить математические выкладки. Как правило, это несложные финансовые выкладки, но встречаются и довольно сложные общематематические расчеты. Они, в основном, сводятся к решению несложных алгебраических уравнений и ведутся либо в уме, либо с привлечением «компьютеров», какие были доступны героям литературных произведений, а вернее, их авторам (бумага и карандаш, счеты и др.) во времена написания книг.

Кроме простых финансовых расчетов в литературе можно встретить и более сложные задачи, решение которых требует привлечения уже не калькулятора, выполняющего отдельные арифметические действия (сложение/вычитание, умножение/деление, взятие процента и т.д.), а компьютера со специализированными математическими программами.

Рассмотрим три задачи из классической отечественной и зарубежной литературы, связанные с решением систем алгебраических уравнений (САУ).

Рассказ А.П. Чехова «Репетитор» начинается с такого диалога:

— Теперь по арифметике... Берите доску. Какая следующая задача?

Петя плюет на доску и стирает рукавом. Учитель берет задачник и диктует:

— "Купец купил 138 арш. черного и синего сукна за 540 руб. Спрашивается, сколько аршин купил он того и другого, если синее стоило 5 руб. за аршин, а черное 3 руб.?" Повторите задачу.

Петя повторяет задачу и тотчас же, ни слова не говоря, начинает делить 540 на 138.

— Для чего же вы это делите? Постойте! Впрочем, так... продолжайте. Остаток получается? Здесь не может быть остатка. Дайте-ка я разделю!

Зиберов делит, получает 3 с остатком и быстро стирает.

"Странно... — думает он, ероша волосы и краснея. — Как же она решается? Гм!.. Это задача на неопределенные уравнения, а вовсе не арифметическая..."

Учитель глядит в ответы и видит 75 и 63.

"Гм!.. странно... Сложить 5 и 3, а потом делить 540 на 8? Так, что ли? Нет, не то".

— Решайте же! — говорит он Пете.

— Ну, чего думаешь? Задача-то ведь пустяковая! — говорит Удодов Пете. — Экий ты дурак, братец! Решите уж вы ему, Егор Алексеич.

Егор Алексеич берет в руки грифель и начинает решать. Он заикается, краснеет, бледнеет.

— Это задача, собственно говоря, алгебраическая, — говорит он. — Ее с иксом и игреком решить можно. Впрочем, можно и так решить. Я, вот, разделил... понимаете? Теперь, вот, надо вычесть... понимаете? Или, вот что... Решите мне эту задачу сами к завтраму... Подумайте...

Петя ехидно улыбается. Удодов тоже улыбается. Оба они понимают замешательство учителя. Ученик VII класса еще пуще конфузится, встает и начинает ходить из угла в угол.

— И без алгебры решить можно, — говорит Удодов, протягивая руку к счетам и вздыхая. — Вот извольте видеть...

Он щелкает на счетах, и у него получается 75 и 63, что и нужно было.

— Вот-с... по-нашему, по-неученому.

Такую систему двух линейных алгебраических линейных уравнений (СЛАУ) с двумя неизвестными (а именно она просматривается в приведенном диалоге: $x + y = 138$ и $5x + 3y = 540$) можно решить без компьютера и даже без калькулятора, выполнив несложные арифметические действия на бумаге или просто в уме. На счетах (как Удодов-старший, отец Пети) это сейчас, конечно, мало кто сделает[1]. Мы эту задачу решим на компьютере (на современных «счетах»), воспользовавшись самым популярным «суперкалькулятором» – программой Mathcad – см. рис. 1.

$$\begin{bmatrix} x+y=138\ арш \\ 5\ \dfrac{руб}{арш}\cdot x+3\ \dfrac{руб}{арш}\cdot y=540\ руб \end{bmatrix} \xrightarrow{solve,\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 63\,арш & 75\ арш \end{bmatrix}$$

Рис. 1. Решение задачи о купце и сукне в среде Mathcad Prime

На рис. 1 показано, как в среде Mathcad решается задача о купце и сукне с помощью оператора ***solve***, предназначенного для поиска корней одиночных алгебраических уравнений и их систем, линейных и нелинейных: «Вот-с... по-нашему, *по-компьютерному…*»!

В задаче о купце и сукне число уравнений *равно* числу неизвестных. Но в жизни и, соответственно, в художественной литературе так бывает далеко не всегда. Два последующих примера тому подтверждение.

В повести Ф.М. Достоевского «Игрок» можно найти[2] семь цитат, в которых зашифрованы курсы европейских валют во времена написания повести:

Цитата 1

— Вы их немедленно получите, — ответил генерал, покраснев немного, порылся у себя в бюро, справился в книжке, и оказалось, что за ним моих денег около ***ста двадцати рублей****.*

— Как же мы сосчитаемся, — заговорил он, — надо переводить на талеры. Да вот возьмите ***сто талеров****, круглым счетом, — остальное, конечно, не пропадет.*

и далее

Вам следует дополучить с меня эти четыре ***фридрихсдора*** *и* ***три флорина*** *на здешний расчет.*

---

[1] Можно предположить, что отец Пети решил задачу так (в пять действий): 1) Сколько заплатил бы купец, если б все сукно было черное – 138·3=414; 2) На сколько больше пришлось заплатить за синее сукно – 540-414=126; 3) На сколько синее сукно дороже черного – 5-3=2; 4) Сколько куплено синего сукна 126:2=63 и 5) Сколько куплено черного сукна – 138-63=75. Можно также предположить, что Петин отец не мог сосчитать в уме, сколько будет, если 138 помножить на три, и должен был брать в руки счеты. В наше же время многие тоже не могут проводить в уме или на бумаге такие выкладки и прибегают к помощи калькулятора или даже компьютера. Репетитор Зиберов тут, в принципе, был прав, когда говорил, что задачу «с иксом и игреком решить можно. Тут просматривается типичный педагогический конфликт. Взрослые (родители) пытаются помочь ребенку решить школьную задачу и понимают, что она сводится к решению уравнения или системы уравнений. Но ребенок тут возражает и говорит, что в школе их учат по-другому решать такие задачи – не через составление и решение уравнений (общий подход к решению), а через логические рассуждения и несложные арифметические выкладки (частный подход к конкретной задаче).

[2] А в эру Интернета и электронных библиотек это делать стало намного проще: задал ключевой слово поиска и считай, сколько раз оно встречается в тексте.

Цитата 2

Полина просто рассердилась, когда я передал ей всего только ***семьсот гульденов****.*

и далее

Слушайте и запомните: возьмите эти ***семьсот флоринов*** *и ступайте играть, выиграйте мне на рулетке сколько можете больше; мне деньги во что бы ни стало теперь нужны.*

Цитата 3

Я начал с того, что вынул ***пять фридрихсдоров****, то есть* ***пятьдесят гульденов****, и поставил их на четку.*

Цитата 4

— Да-с, вот взяла да и выиграла двенадцать тысяч флоринов! Какое двенадцать, а золото-то? С золотом почти что ***тринадцать*** *выйдет. Это сколько по-нашему? Тысяч шесть, что ли, будет?*

Я доложил, что и за ***семь*** *перевалило, а по теперешнему курсу, пожалуй, и до* ***восьми*** *дойдет.*

Цитата 5

— Oui, madame, — вежливо подтвердил крупер, — равно как всякая единичная ставка не должна превышать разом ***четырех тысяч флоринов****, по уставу, — прибавил он в пояснение.*

Я поставил самую большую позволенную ставку, в ***четыре тысячи гульденов****, и проиграл.*

Цитата 6

Ей проходилось получить ровно ***четыреста двадцать фридрихсдоров****, то есть* ***четыре тысячи флоринов*** *и* ***двадцать фридрихсдоров****.*

Цитата 7

— Полина, вот ***двадцать пять тысяч флоринов*** *— это* ***пятьдесят тысяч франков****, даже больше.*

Если в рассказе А.П.Чехова уравнения были прописаны в явном виде, то в «Игроке» Ф.М. Достоевского они зашифрованы в цитатах. Составив и решив соответствующую систему уравнений, можно узнать курсы валют (талер, фридрихсдор, флорин, гульден и франк) по отношению к рублю:

120 рублей = 100 талеров + 4 фридрихсдора + 3 флорина (цитата 1 – см. выше)

700 гульденов = 700 флоринов (цитата 2)

5 фридрихсдоров = 50 гульденов (цитата 3)

13 000 флоринов = 8 000 рублей (цитата 4)

4 000 флоринов = 4 000 гульденов (цитата 5)

420 фридрихсдора = 4 000 флоринов + 20 фридрихсдоров (цитата 6)

25 000 флоринов = 50 000 франков (цитата 7)

Если число уравнений (у нас их семь) превышает число неизвестных (у нас их пять), то такая система уравнений называется *переопределенной*.

Задачу «Игрока» также можно решить без компьютера, последовательно высчитывая курсы отдельных валют (гульден равен флорину, фридрихсдор равен десяти гульденам и т.д.) и определить их стоимость по отношению к рублю. Но мы, как и в случае с первой задачей, попросим это сделать компьютер. Пусть он сам подставляет и упрощает, что считает нужным – см. рис. 2.

$$\begin{bmatrix} 120\ руб = 100\ талер + 4\ фридрихсдор + 3\ флорин \\ 700\ гульден = 700\ флорин \\ 5\ фридрихсдор = 50\ гульден \\ 13000\ флорин = 8000\ руб \\ 4000\ флорин = 4000\ гульден \\ 420\ фридрихсдор = 4000\ флорин + 20\ фридрихсдор \\ 25000\ флорин = 50000\ франк \end{bmatrix} \xrightarrow{solve,\begin{bmatrix} талер \\ фридрихсдор \\ флорин \\ гульден \\ франк \end{bmatrix}, float, 2} \begin{bmatrix} 0.94 \cdot руб & 6.2 \cdot руб & 0.62 \cdot руб & 0.62 \cdot руб & 0.31 \cdot руб \end{bmatrix}$$

Рис. 2. Решение задачи о курсе валют в среде Mathcad Prime

На рис. 2 показано решение в среде Mathcad задачи о курсах валют с использованием оператора ***solve***. Добавлен еще оператор ***float, 2***, позволяющий вывести ответ не в виде простой, а в виде десятичной дроби с двумя значащими цифрами и плавающим (float) десятичным разделителем. Из решения, показанного на рис. 2, видно, что во второй половине XIX века талер стоил 94 копейки[3], фридрихсдор 6 рублей 20 копеек, флорин и гульден по 62 копейки, а франк 31 копейку[4]. При таком раскладе генерал заплатил учителю (Алексею Ивановичу) 117 руб. 73 коп («около 120 руб.» — см. цитату 1 выше), а «бабуленька» выиграла на рулетке 7930 руб. («до восьми тысяч дойдет» — см. цитату 4).

Если же число уравнений алгебраической системы *меньше* числа неизвестных, то такая система называется *недоопределенной*[5]. Ее можно «увидеть» в описании подводной лодки «Наутилус» – «героине» романов Жуль Верна «Двадцать тысяч лье под водой» и «Таинственный остров». Вот что можно узнать из разговора капитана Немо с профессором Аронаксом о размерах подводной лодки: "Вот, господин Аронакс, чертежи судна, на котором вы находитесь. Судно представляет собой сильно удлиненный цилиндр с коническими концами. <...> Площадь его равняется одной тысяче одиннадцати и сорока пяти сотым квадратных метров, объем равен одной тысяче пятистам и двум десятым кубических метров[6]; короче говоря, корабль, полностью погруженный в воду, вытесняет тысячу пятьсот и две десятых кубических метров, или тонн, воды.».

Если принять допущение, что под площадью подводной лодки понимается не ее «жилая» площадь (площадь ее помещений), а площадь поверхности и что центральная часть подводной лодки – это круглый прямой цилиндр, а ее нос и корма – это круглые

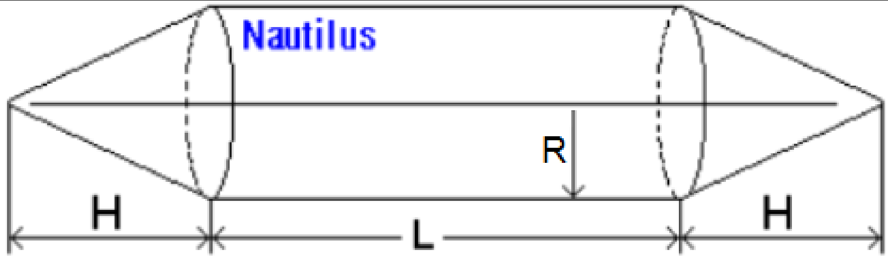
[3] Из «Писем русского путешественника» Н.М.Карамзина можно узнать, что в конце XVIII века талер стоил дороже – один рубль и 20 копеек

[4] То, что флорин, гульден равны по стоимости, а фридрихсдор в десять раз дороже флорина или гульдена и франк в два раза дешевле флорина или гульдена, ясно и без компьютера. Но мы специально ввели в компьютер все семь цитат, чтобы получилась переопределенная система уравнений.

[5] Или неопределенной. Репетитор Зиберов из рассказа А.П.Чехова так ошибочно пытался определить задачу о купце и сукне. Но она была четко определена – в ней два алгебраических уравнения с двумя неизвестными; сама же система имеет одно единственное решение.

[6] Тут капитан Немо, вернее, сам автор – Жюль Верн немного переборщил, указав параметры подводной лодки с излишней точностью. Достаточно было бы сообщить, что площадь судна равняется 1010 $м^2$, а объем (водоизмещение в подводном состоянии) – 1500 $м^3$. Для справки: водоизмещение в подводном состоянии современных атомных подводных лодок может достигать 50 000 тонн.

прямые конусы одинаковой высоты (см. чертеж на рис. 3), то задача сводится к решению двух нелинейных[7] алгебраических уравнений с тремя неизвестными.



$V := 1011.45\ m^2$

$S := 1500.2\ m^3$

H, L & R - ?

$$\mathrm{Size}(R) := \begin{bmatrix} 2\,\pi \cdot R \cdot \sqrt{H^2 + R^2} + \pi \cdot 2 \cdot R \cdot L = V \\ \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot R^2 \cdot H + \pi \cdot R^2 \cdot L = S \end{bmatrix} \xrightarrow{solve,\ \begin{bmatrix} H \\ L \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} \frac{3 \cdot \left(2 \cdot \sqrt{9 \cdot R^2 \cdot V^2 - 20 \cdot \pi^2 \cdot \right.}{} \\ \frac{6 \cdot S - 3 \cdot R \cdot V}{4 \cdot \pi \cdot R^2} - \frac{3 \cdot (18 \cdot S + 2}{} \end{bmatrix}$$

$\mathrm{H1}(R) := \mathrm{Size}(R)_{0,0}$ $\quad \mathrm{H2}(R) := \mathrm{Size}(R)_{1,0}$ $\quad \mathrm{L1}(R) := \mathrm{Size}(R)_{0,1}$ $\quad \mathrm{L2}(R) := \mathrm{Size}(R)_{1,1}$

$R := 3.13\ m \qquad \begin{bmatrix} \mathrm{H1}(R) & \mathrm{L1}(R) \\ \mathrm{H2}(R) & \mathrm{L2}(R) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.627 & 44.991 \\ 0.823 & 48.194 \end{bmatrix} m$

$R := 3.1\ m, 3.1005\ m .. 4.5\ m$

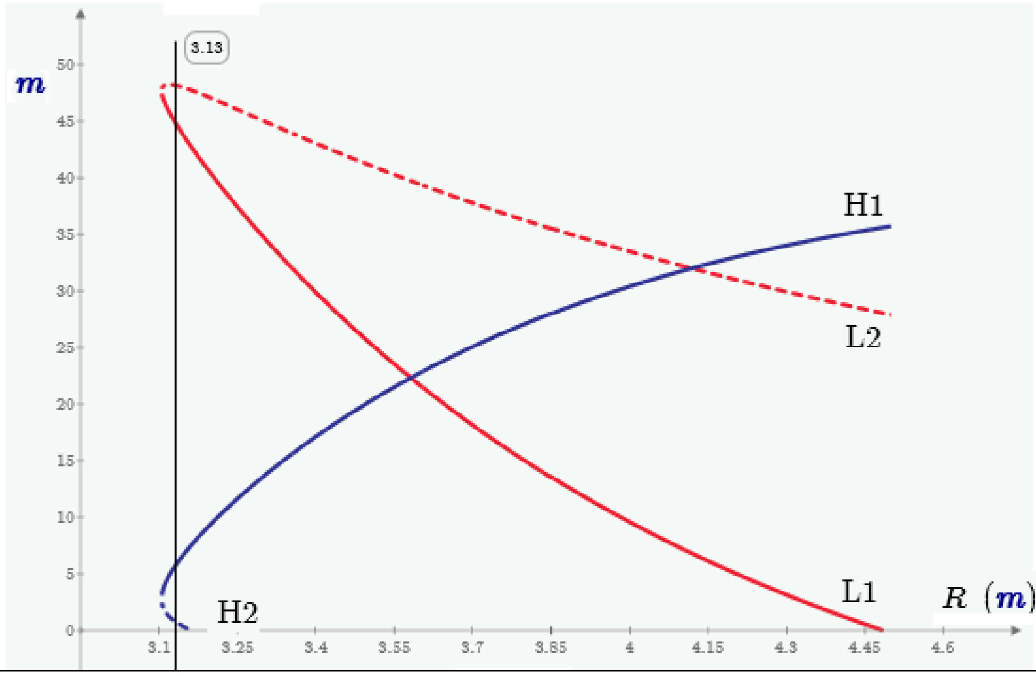


Рис. 3. Решение задачи о размерах подводной лодки «Наутилус» в среде Mathcad Prime

На рис. 3 показано решение задачи о размерах подводной лодки «Наутилус» в среде Mathcad с помощью оператора ***solve***. Но этот оператор в задаче о «Наутилусе» не возвращает конкретные числовые значения, как это было при решении двух предыдущих задач, а формирует функцию с именем **Size** и аргументом ***R***. Дело в том, что недоопределенные системы алгебраических уравнений могут иметь множество решений.

[7] А две предыдущие задачи сводились к решению систем *линейных* уравнений.

В нашем случае размеры субмарины (длины ***H*** и ***L***) при заданной ее геометрии подводной лодки и известном ее объеме и площади поверхности зависят от радиуса сечения цилиндрической части ***R***. Кроме того, сама система наших двух нелинейных уравнений имеет два решения. Поэтому оператор ***solve*** вернул нам не вектор (см. рис. 2 и 3), а матрицу, состоящую из двух строк (длины ***H*** и ***L***) и двух столбцов (два решения задачи) и хранящую выражения (на рис. 3 они из-за экономии места не показаны полностью) для функций с именами **H1**, **H2**, **L1** и **L2**. На рис. 3 эти функции отображены графически[8] в области действительных положительных чисел (решений) для величин ***H*** и ***L***. Если допустить, что радиус ***R*** сечения цилиндрической части субмарины равен 3.13 м (см. вертикальный маркер на рис. 3), то длина ее конических частей (носа и кормы) **H** будет равна 5.627 м или 0.823 м, а длина центральной цилиндрической части **L** – 44.991 м или 48.194 м. Первый вариант (H=5.627 м и L=44.991 м) представляется наиболее вероятным, т.к. при втором решении (H=0.823 м и L=48.194 м) нос лодки был бы слишком тупым, что увеличивало бы сопротивление воды при движении лодки и не соответствовало изображениям «Наутилуса», какими иллюстрируются книги Жуль Верна. Кстати, при заданных параметрах субмарины она может быть в форме цилиндра (точка пересечения кривой H2 с осью абсцисс при R≈3.2 м) или составленная из двух конусов без центрального цилиндра (точка пересечения кривой L2 с осью абсцисс при R≈4.5 м).

Предлагаю студентам продолжить решение задачи о размерах подводной лодки «Наутилус» и определить:

1. Минимальное значение R, при котором задача имеет решение (см левые оконечности кривых не рис. 1).
2. Значения R, при которых лодка превращается в цилиндр без конусов (H=0) или в два конуса, составленных основаниями друг к другу (L=0).
3. Размеры лодки, если ее нос будет выполнен в виде полусферы, а корма в виде конуса.
4. Размеры подводной лодки, при которых ее объем будет равен 1011.45 $м^3$, а площадь поверхности будет минимальна.
5. Размеры подводной лодки, при которых ее площадь поверхности будет равна 1500.2 $м^2$, а объем максимальным.

Кроме того, предлагаю студентам решить задачи, отображенные на рис 1 и 2, не через оператор символьной математики Solve, а через функцию lsolve(M, v).

---

[8] Аналитический вид этих функций на рис. 3 показан не полностью не только из-за экономии места, но скорее потому, что он мало что дает для анализа зависимостей. Иное дело графики.