



В. Ф. Очков, Д. А. Иванов, А. Д. Моисеева,
Национальный исследовательский университет «МЭИ», г. Москва

ТОМОГРАФИЯ = ИНФОРМАТИКА + МАТЕМАТИКА + ФИЗИКА + БИОЛОГИЯ

Аннотация

В статье описана лабораторная работа в русле междисциплинарных связей на стыке информатики, математики, физики и биологии: моделирование работы медицинского томографа и изучение томографии на четырехмерном объекте.

Ключевые слова: рентген, томография, функция одного, двух и трех аргументов, компьютерная графика, Maple, Mathcad.

Контактная информация

Очков Валерий Федорович, доктор тех. наук, профессор, профессор Национального исследовательского университета «МЭИ», г. Москва; *адрес:* 111250, г. Москва, Красноказарменная ул., д. 14; *телефон:* (495) 362-71-71; *e-mail:* ochkov@twt.mpei.ac.ru

Иванов Дмитрий Александрович, канд. тех. наук, профессор, профессор Национального исследовательского университета «МЭИ», г. Москва; *адрес:* 111250, г. Москва, Красноказарменная ул., д. 14; *телефон:* (495) 362-77-14; *e-mail:* ivanovda@mpei.ru

Моисеева Анастасия Дмитриевна, студентка 1-го курса Института тепловой и атомной энергетики Национального исследовательского университета «МЭИ», г. Москва; *адрес:* 111250, г. Москва, Красноказарменная ул., д. 14; *телефон:* (495) 362-71-71; *e-mail:* MoiseevaAnD@mpei.ru

V. F. Ochkov, D. A. Ivanov, A. D. Moiseeva,
National Research University MPEI, Moscow

TOMOGRAPHY = INFORMATICS + MATHEMATICS + PHYSICS + BIOLOGY

Abstract

The article proposes a laboratory work at the intersection of informatics, mathematics, physics and biology: modeling the work of a medical tomography and studying tomography on a four-dimensional object.

Keywords: X-ray, tomography, function of one, two and three arguments, computer graphics, Maple, Mathcad.

Обычно под словом «томография» понимают современный метод медицинского исследования, с помощью которого можно быстро и точно диагностировать многие заболевания внутренних органов человека, а также контролировать ход лечения.

Говорят, что идея такого исследования пришла в голову одному врачу, когда он шел по рынку в канун Рождества и видел в мясном ряду разрубленные замороженные свиные туши, на срезах которых были четко видны контуры костей и мягких тканей. В анатомических музеях мира можно увидеть такие заспиртованные препараты — срезы человеческих тел. Мечта о том, чтобы получать такие срезы не только у трупов, но и у живых людей, давно волновала многих врачей и ученых. И только относительно недавно она воплотилась в жизнь. Томография стала реальностью благодаря важным открытиям, сделанным физиками, появлению вычислительной техники и созданию специального математического аппарата.

Поговорим немного о физике, о ее достижениях и открытиях, позволивших без ножа заглянуть внутрь человека.

Во-первых, это открытие *рентгеновских лучей*. В городском музее Мюнхена хранится интересный экспонат — первый рентгеновский снимок человека во весь рост. Это был довольно опасный опыт: сведения о том, что рентгеновские лучи далеко не безвредны, появились позже. Тем не менее этот метод исследования широко вошел в медицинскую практику. В частности, рентген помог победить такую страшную социальную болезнь, как туберкулез. Рентген позволяет правильно вправлять сломанные кости. Его применяют и в такой довольно рутинной операции, как лечение зубов. В наши дни мы обязаны ежегодно проходить процедуру рентгеновского фотографирования легких.

Во-вторых, это изобретение *томографа*, с помощью которого можно получать изображения внутренних органов и тканей. В скором времени томография человека тоже станет обязательной процедурой. Врачи считают, что нет здоровых людей, а есть недообследованные — люди, не пропущенные, в частности, через медицинский томограф. Но пока томография — это дорогостоящая процедура, назначаемая врачами только в особых случаях. Рентген намного дешевле и доступнее, но рентгеновские снимки довольно нечеткие. Мы еще это отметим, описывая ниже рисунок 7.

Есть два вида медицинской томографии: КТ и МРТ. Компьютерная томография (КТ) относится к методам рентгеновского исследования. Она основана на измерении и сложной компьютерной обработке данных по разности ослабления рентгеновского излучения тканями живого организма различной плотности. Магнитно-резонансная томография (МРТ) базируется на явлении *ядерного магнитного резонанса* (ЯМР). Этот способ исследования основан на измерении электромагнитного отклика (эха) атомных ядер, в частности, атомов водорода. Концентрация водорода в организме человека разная в разных местах, что позволяет видеть на экране компьютера «срезы» человека со структурой внутренних органов.

Кстати говоря, сначала эти методы исследования назывались рентгеновской томографией (РТ) и ядерно-магнитной томографией (ЯМТ), но потом в обиход ввели термины КТ

и МРТ из-за радиофобии людей, связанной, в частности, с чернобыльской катастрофой. Да, медики часто в благих целях обманывают, скажем мягче, вводят в заблуждение своих пациентов. Хорошо ли это или плохо — ответить трудно. Исследования на магнитно-резонансном томографе вместо компьютерного томографа введены в медицинский обиход в том числе и для снижения дозы ионизирующего облучения.

Мы не случайно чуть выше слово «отклик» дополнили словом «эхо». Есть также способ ультразвукового медицинского исследования (УЗИ), но он не связан с томографией, хотя тоже позволяет заглянуть внутрь человека. Но не так глубоко и не с такой четкостью, как при КТ или МРТ. Хотя УЗИ намного безопаснее, дешевле и доступнее, чем рентген, КТ и МРТ.

Здесь мы не будем вдаваться глубоко в детали этих методов исследования, так как обо всем этом можно прочесть в Интернете. Скажем лишь, что ученые, внесшие наибольший вклад в развитие описанных методов диагностики, получили Нобелевскую премию. Сам же Конрад Рентген стал первым нобелевским лауреатом по физике.

Но термин «томография» мы стали связывать сугубо с медициной сравнительно недавно. Вернее, так: сначала это было чисто геометрическое понятие, а затем оно проникло и в медицину. Краткое справочное описание термина «томография» такое: *томография* (др.-греч. *τομή* — сечение) — получение послойного изображения внутренней структуры объекта.

Томография в медицине позволяет представить трехмерное тело человека в виде множества двумерных объектов — плоских срезов, отображаемых на дисплее компьютера или на бумаге принтера. Врач, двигая мышку и крутя ее ролик, может перемещаться вдоль этих сечений и воссоздавать структуру внутренних органов человека, выявлять в них аномалии и задумываться в случае чего о возможном хирургическом вмешательстве или терапевтическом лечении.

Давайте для начала создадим томограмму не трехмерного, а четырехмерного объекта на простом геометрическом примере.

Есть такая «народная» задача оптимизации. Народная в том смысле, что она широко «гуляет» по бумажным учебникам и Интернету, но ее конкретный автор неизвестен. В этом несложно убедиться, если в каком-либо поисковике Интернета сделать запрос по ключу «Коробка максимального объема». В [4] дан один из примеров многочисленных публикации этой задачи.

Суть задачи в следующем. Берется квадратный лист бумаги (картона, жести и т. д.) с длиной стороны, равной единице. В углах квадрата вырезаются четыре одинаковых квадрата меньшего размера. Далее из такой крестообразной заготовки складывается коробка загибанием прямоугольных участков вверх (рис. 1). Спрашивается: каким должно быть значение переменной x (длины стороны маленького квадрата), чтобы объем полученной коробки был максимальным? Длина стороны исходного квадрата равна, повторяем, единице.

Эту задачу несложно решить и без компьютера. Достаточно вспомнить азы математического анализа. Для решения можно создать функцию, возвращающую объем коробки (произведение площади ее основания $(1 - 2x)^2$ на высоту x) в зависимости от значения x , а затем взять производную от этого кубического полинома. Получится квадратный полином вида $12x^2 - 8x + 1$, у которого два нуля: $1/2$ и $1/6$. Известно, что у гладкой непрерывной

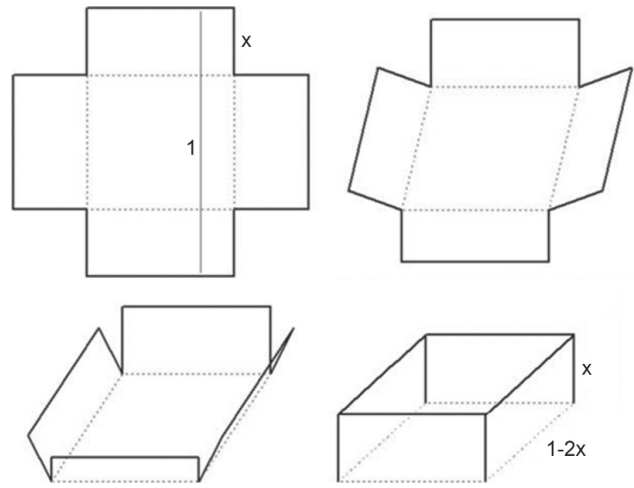


Рис. 1. Изготовление коробки из квадратной заготовки

функции в точках максимума, минимума или перегиба первая производная равна нулю. Следовательно, решение нашей задачи о коробке максимального размера такое: $x = 1/6$. Другой нуль квадратного полинома $(1/2)$ — это ложное решение: точка минимума, а не максимума. В этом несложно убедиться, построив график функции $(1 - 2x)^2 \cdot x$ на интервале от 0 до 0,5 или подсчитав значение второй производной при $x = 1/2$ и $x = 1/6$. В первом случае оно будет положительным (минимум), а во втором — отрицательным (максимум).

Показанное выше решение, повторяем, можно найти во многих бумажных и интернетовских источниках. Но задача о коробке максимального объема имеет свежее и довольно интересное «бесконечное» продолжение. Можно четыре квадрата, отрезанные от исходной заготовки (см. рис. 1), не выбрасывать, а пустить в дело — сделать из них четыре новые коробки меньшего размера по той же схеме раскроя. Из шестнадцати $(4 \cdot 4)$ новых отрезанных квадратов опять же можно сделать новые коробки. Из шестидесяти четырех $(16 \cdot 4)$ новых отрезанных квадратов опять же можно сделать новые коробки. И так далее до бесконечности. Это будет некий фрактал [3], требующий оптимизации — определения размеров сторон квадратных вырезов, при которых суммарный объем всех полученных коробок будет максимальным.

В общем решении для пяти коробок (рис. 2) вводится функция пользователя с именем V_5 , у которой два аргумента — x и y . Далее решается система двух алгебраических уравнений: равенство нулю частных производных функции V_5 по x и по y . Это, повторяем, необходимое условие экстремума для непрерывной гладкой функции двух аргументов. Координаты точек экстремума функции V_5 обязаны удовлетворять этой системе уравнений. Далее можно в каждой найденной точке проверить выполнение достаточного условия экстремума. Но можно результат проанализировать не аналитически, а графически — построить линии уровня функции двух переменных (контурный график см. на рисунке 2). Полученная система уравнений имеет четыре корня, один из которых — это точка максимума, т. е. решение нашей задачи о пяти коробках. Три других корня — это точка минимума $(x = 0,5, y = 0,5)$ и две так называемые «седловые точки», что ясно видно из графика, показанного на рисунке 2. Ниже на рисунке 4 мы этот контурный график отобразим в виде поверхности.

Из решения, показанного на рисунке 2 (да и по логике вещей), ясно, что квадратные заготовки для четы-

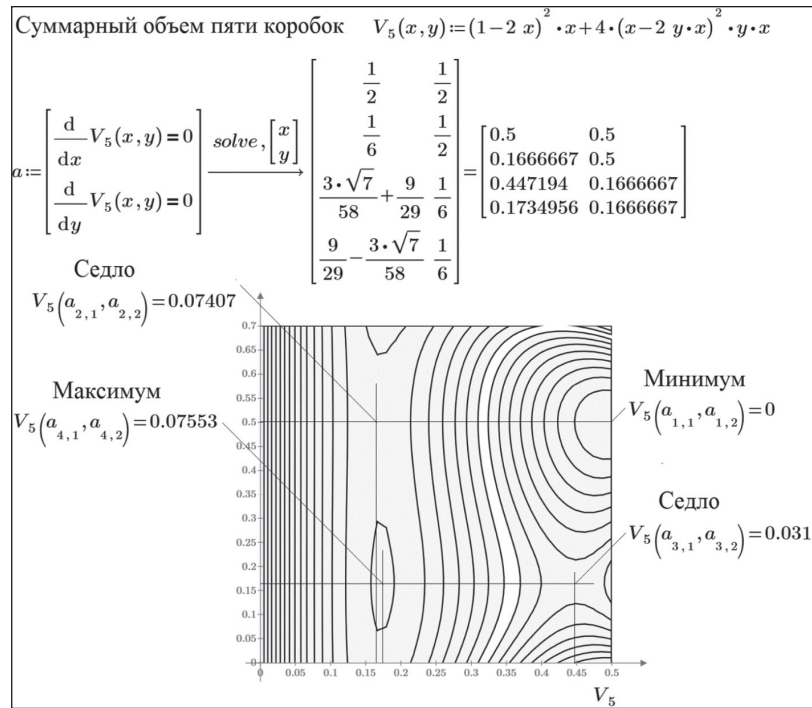


Рис. 2. Задача о пяти коробках

рех коробок нужно кроить в пропорции $y = 1/6$: задача о пяти коробках имеет не два неизвестных, а одно. Два аргумента нам нужны для графического анализа решения. Соответствующая же пропорция для центральной большой коробки (x) немного увеличится. На рисунке 2 мы получили некий срез функции двух аргументов, по которому легко сделать анализ функции — определить особые точки. Но томограмма — это не один срез, а несколько. Поэтому идем дальше.

Из вырезанных 16 квадратов, оставшихся после изготовления пяти коробок, также можно изготовить новые коробки. Спрашивается: при каком раскрое заготовок суммарный объем 21 коробки — одной большой, четырех средних и 16 маленьких — будет максимальным? Мы будем работать с функцией трех аргументов — x , y и z (рис. 3), хотя ясно, что тут можно обойтись функцией одного аргумента z , присвоив аргументам (параметрам) x и y значения, найденные ранее (см. рис. 2). Тут можно

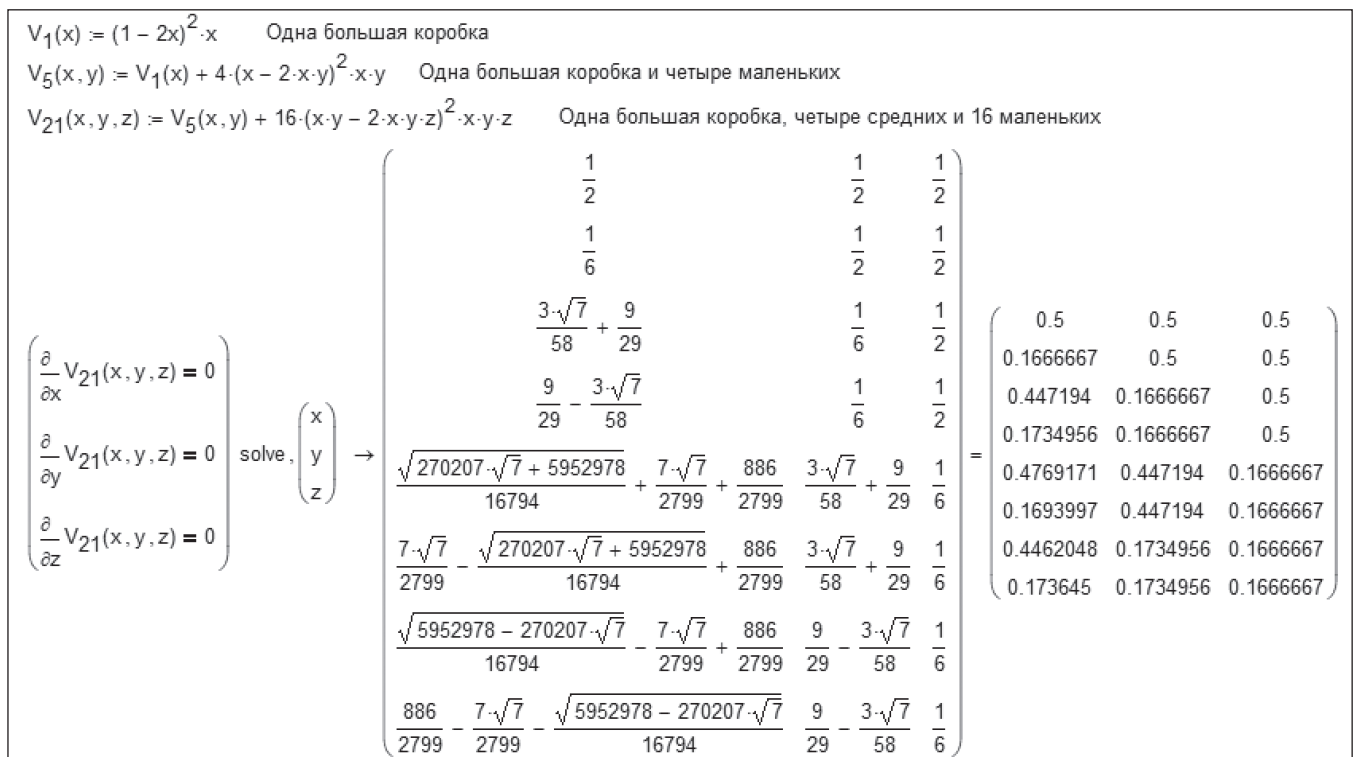


Рис. 3. Задача о 21 коробке

вывести рекуррентную формулу для определения очередного оптимального значения при очередном шаге раскроя коробок — 5 коробок, 21 коробка, 85 коробок и т. д. [3]. Функция трех аргументов нам будет нужна для ее визуального анализа, для построения ее *томограммы*.

А как визуально проанализировать функцию трех аргументов V_{21} , заданную на рисунке 3? Тут нам поможет анимация пакета Mathcad! Кадры анимации — это трехмерные срезы графика функции $f(y, z) := V_{21}(x, y, z)$, где каждой поверхности $f(y, z)$ соответствует определен-

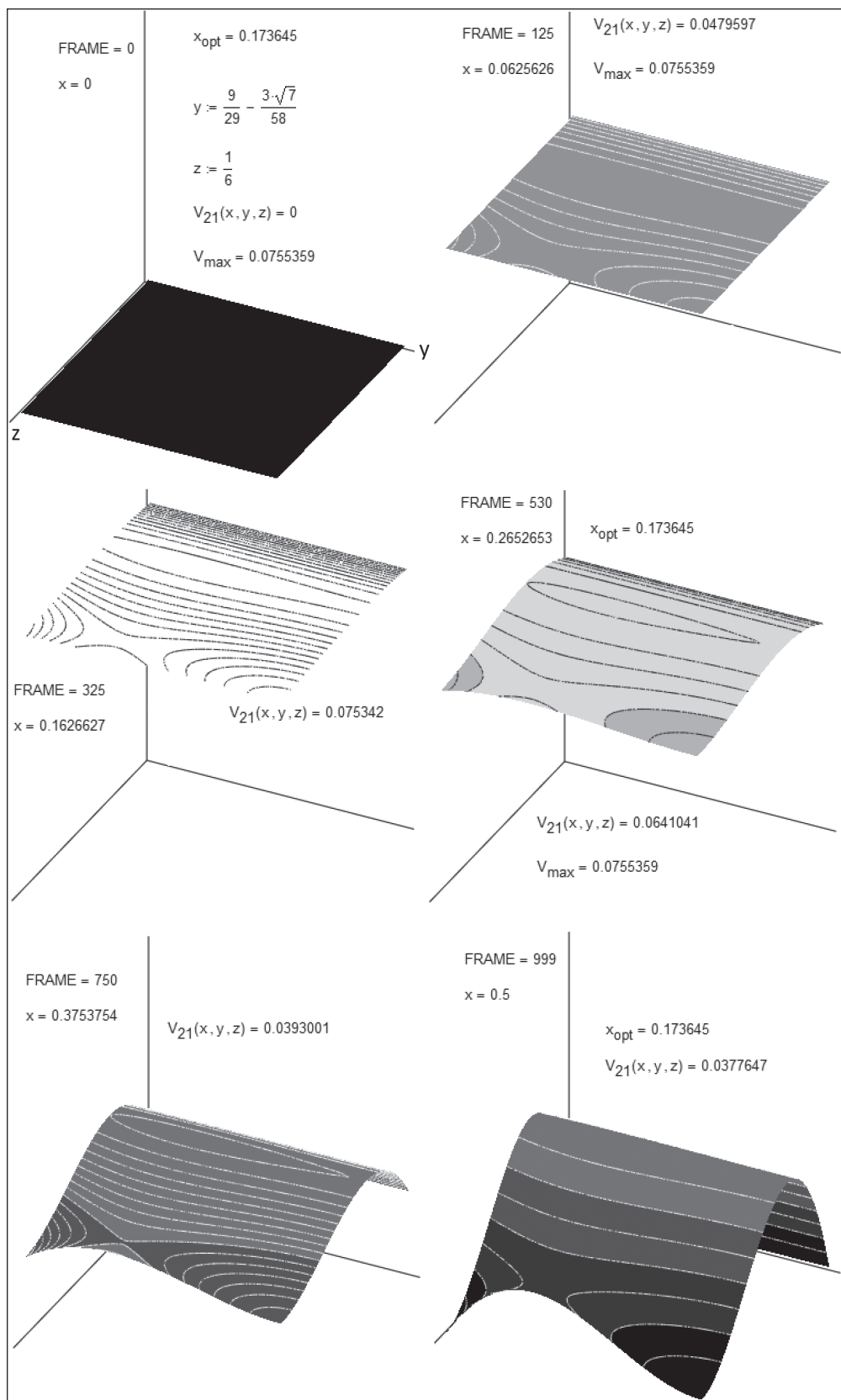


Рис. 4. Томограмма четырехмерной поверхности

ное значение переменной x в интервале от 0 (коробки отсутствуют) до 0,5 (20 коробок — исходную заготовку разрезали на четыре квадрата, а из каждого квадрата сделали пять коробок).

При значении x , равном нулю (левое верхнее изображение на рисунке 4), функция $V_5(x, y, z)$ также равна нулю, и мы имеем плоскую поверхность, ограниченную осями y и z . При значении x , равном 0,5 (левое нижнее изображение на рисунке 4), мы, повторяем, имеем не 21, а 20 коробок: исходный квадрат делится на четыре одинаковых квадрата, из которых делаются четыре большие коробки и 16 маленьких (см. рис. 2). Если менять значение параметра x от нуля до 0,5, то можно видеть деформацию сечений четырехмерной поверхности функции трех аргументов. Так с помощью томограммы можно визуализировать функцию трех аргументов и заглянуть внутрь четырехмерного графического объекта — см. один кадр такой анимации на рисунке 5.

Но давайте вернемся к трехмерным телам — к человеческому телу, например.

На рисунке 6 показано построение двух замкнутых поверхностей в среде Maple. Эта математическая программа имеет встроенную функцию *implicitplot3d* из пакета *plots* для графического отображения замкнутых (implicit) алгебраических выражений: не $z = f(x, y)$, а $f(z, y, z) = 0$. В расчет вводится формула деформи-

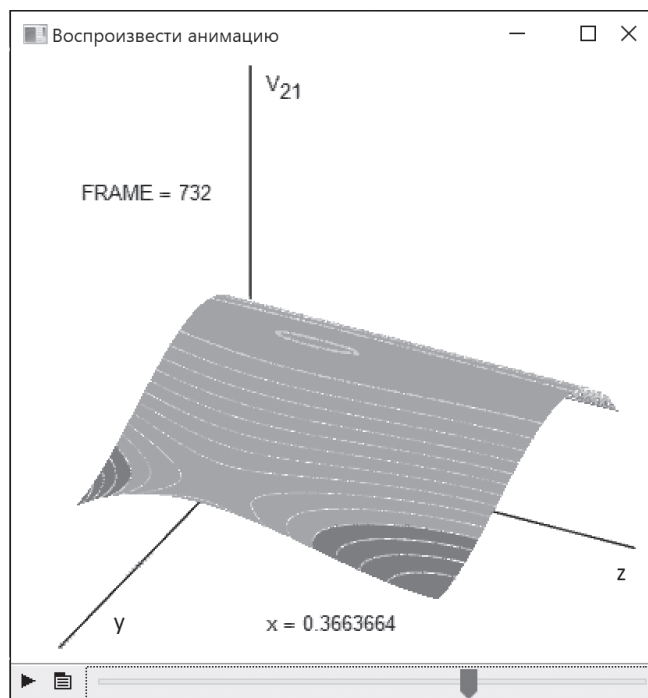


Рис. 5. Видеоплеер, показывающий томограмму четырехмерной поверхности

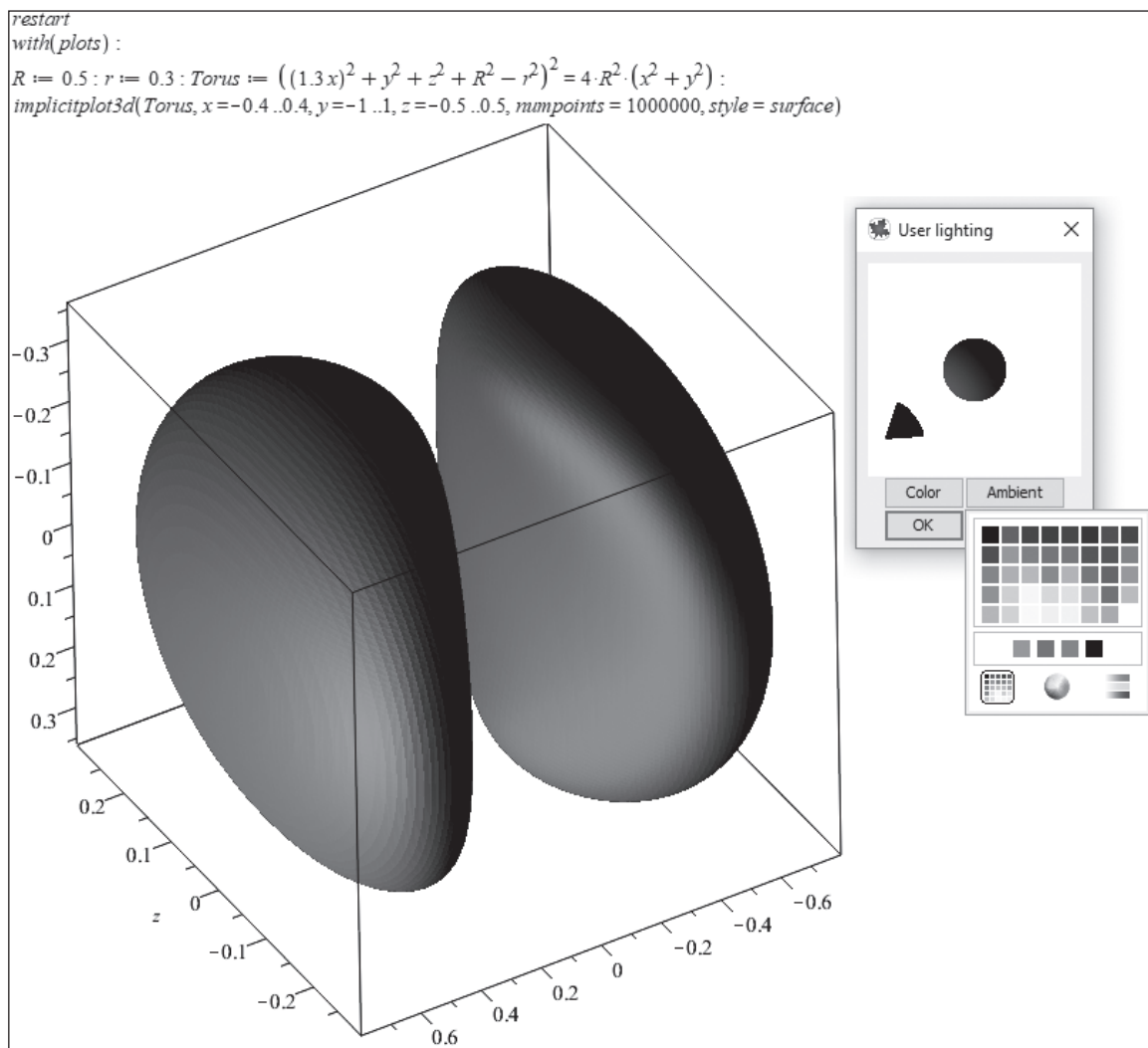


Рис. 6. Построение поверхности почки/легкого с помощью пакета Maple

рованного и разорванного на две половинки тора*: у аргумента x , возводимого в квадрат, стоит не единица (тор), а константа 1,3. Будем считать, что это у нас... две человеческие почки или две половинки легких. Можно в формулах замкнутых поверхностей (тора, шара, эллипсоида и т. д.) вводить дополнительные коэффициенты и получать другие интересные замкнутые и разомкнутые поверхности, похожие на человеческие органы — печень, желудок, селезенку и т. д. Подход, описанный в этой статье, позволяет выполнять и эту интересную работу.

На рисунке 6 также отображено диалоговое окно освещения (lighting) объемной конструкции: можно мышкой двигать фонарь с заданным цветом (см. конус в диалоговом окне освещения — *User lighting*) и добиваться максимальной выразительности трехмерного объекта, повышения его объемности. Еще для этого используют также туман, перспективу и другие инструменты форматирования трехмерной графики.

На сайте статьи можно увидеть анимацию трансформации тора в две почки (в две половинки легких) при плавном изменении коэффициента при аргументе x с единицы (тор) до значения 1,4 (почки).

Но трехмерная графика математических пакетов — это скорее рекламная штучка, нежели серьезный инструмент математического моделирования. Изображения**, подобные тому, которое показано на рисунке 6, раньше помещали на коробках с дистрибутивом математических пакетов, а сейчас — на сайтах фирм-разработчиков. Если нужно проектировать сложные трехмерные конструкции, то работают со специальными программами САПР, а не с математическими пакетами. Если же нужно отобразить какой-то математический объект (поверхность или геометрическое тело), то трех координат здесь часто не хватает — см. выше рисунок 4. Кроме того, мы работаем с плоским экраном дисплея и плоским листом бумаги принтера. Поэтому-то пакет Mathcad и не имеет встроенной функции, подобной той, которая показана на рисунке 6. Для практических инженерных расчетов объемная графика особо не нужна. Поэтому ее возможности были резко сокращены в новой версии Mathcad — в Mathcad Prime.

Тем не менее наш тор, превращенный в две почки или половинки легких, можно построить и в среде Mathcad методом, описанным в [2], — заполнением плоскости или объема точками, координаты которых удовлетворяют неким условиям.

На рисунке 7 показано, как наши почки/легкие можно построить в среде Mathcad, дополнительно поместив в них маленький шар, который будет имитировать почечный камень или некое затемнение в легких, диагностируемое с помощью... томографа.

В параллелепипед, ограниченный координатами от $-0,4$ до $0,4$ по оси x , от $-0,8$ до $0,8$ по оси y и от $-0,3$ до $0,3$ по оси z , бросаются n случайных точек. Те из них, которые формируют поверхность почек/легких и объем

* Геометрическое тело тор тут оказалось не случайно. Пациента при томографии пропускают через большое устройство в виде тора, в центре которого фокусируются либо рентгеновские лучи (КТ), либо электромагнитное поле (МРТ). Сквозь этот тор пропускают человека, лежащего на специальной движущейся кушетке.

** Авторы показывали рисунок 6 своим коллегам и просили сказать, на что это похоже. Называли кофейные зерна, кедровые орешки и др., но никто не назвал это почками или легкими человека. Тем не менее мы будем считать это почками, внутри одной из которых образовался камень, или легкими с затемнением.

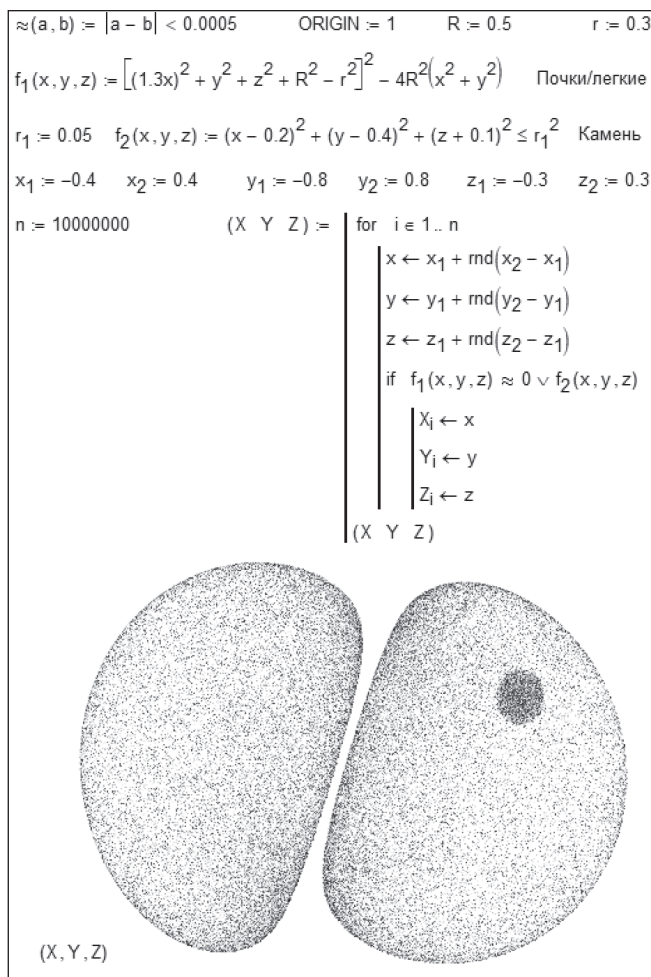


Рис. 7. Поточечное построение «почек/легких» с «камнем/ затемнением» внутри с помощью пакета Mathcad

камня в почке (шара), запоминаются в трех векторах X , Y и Z . Которые затем отображаются на трехмерном графике. Генерацию случайных точек выполняет встроенная в Mathcad функция *rnd*, возвращающая случайное число в диапазоне от нуля до значения, заданного аргументом этой функции. Для поточечного формирования поверхности используется оператор «примерно равно» (\approx); он задается первым оператором на рисунке 7), а для формирования геометрического тела — оператор «меньше или равно» (\leq). Полученные конструкции (почки с камнем или легкие с затемнением) показаны в нижней части рисунка 7.

Но вернемся к медицине. Есть два способа рентгеновского исследования внутренних органов человека: рентгенография (получение рентгеновских снимков) и рентгеноскопия (рентгеновское просвечивание), когда изображение объекта получают не на пленке, а на светящемся (флуоресцентном) экране. Перед таким экраном в старые времена мог сидеть врач и руками поворачивать торс больного, ища очаги туберкулеза легких, например. Руки такого врача при этом были защищены толстыми перчатками, изготовленными из специальной резины с добавкой свинца, а на тело накинута тяжелый фартук из такой же резины. Ведь при таком исследовании опасному для здоровья ионизирующему облучению подвергался не только пациент, но и сам врач. Мы же можем безопасно вращать наши «почки/легкие», показанные на рисунке 7, всего лишь одной рукой с помощью компьютерной мыш-

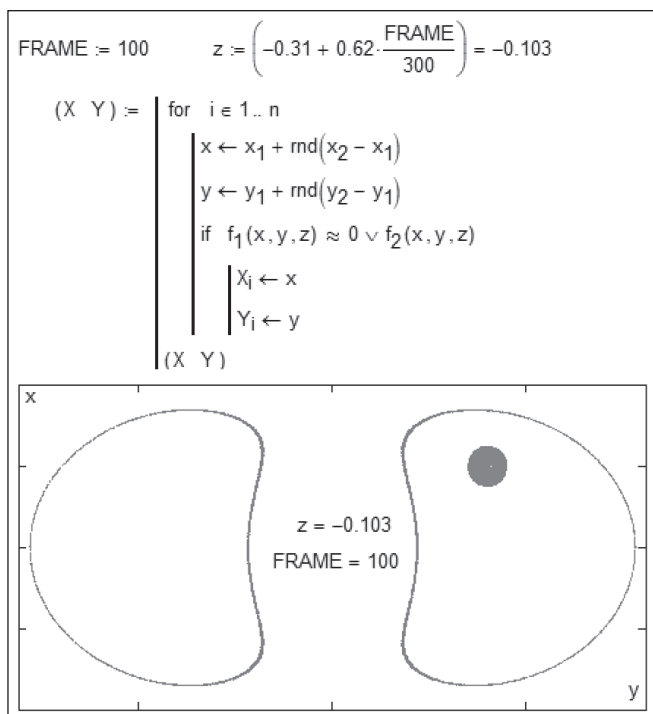


Рис. 8. Получение среза почек/легких с помощью пакета Mathcad

ки. Правда, раньше, когда в дисплеях были телевизионные трубки, тоже был риск небольшого ионизирующего облучения. Теперь же мы используем более безопасные плоские дисплеи другого типа.

Но наши почки/легкие допустимо увидеть более четко с помощью... *томографии!* Изображение на рисунке 7, повторяем, можно считать неким нечетким рентгеновским снимком, где изображение одних структур накладывается на изображения других. Медицинская томография для того и была придумана, чтобы повысить четкость и, следовательно, информативность медицинского исследования.

На рисунке 8 отображены уже описанные вычислительные действия, но не в объеме (рис. 7), а на плоскости. Для этого фиксируется значение переменной z (вертикальная ось), которое связывается с системой переменной $FRAME$, отвечающей в среде Mathcad за анимацию (счетчик кадров анимации [1]). У нас будет 300 кадров — 300 сечений почек/легких. Меняя значение переменной z , можно получить томограмму (сечения) нашего трехмерного объекта (рис. 9).

Двигая бегунок видеоплеера, показанного на рисунке 9, можно фиксировать аномалии в наших почках/легких.

Кстати, в Интернете по запросу «формула формы почки» ничего не было найдено. Поэтому-то авторам и пришлось деформировать и рвать на две половинки тор. Но по запросу «формула формы сердца» было найдено неявное алгебраическое выражение с переменными x , y и z , по которому можно построить сердце — не в анатомическом, а в «романтическом» виде (рис. 10). Но и наша статья описывает томографию в некоем «романтическом», научно-популярном стиле!

Было бы интересно найти в Интернете или вывести самому формулы и для других человеческих органов — желудка, печени, селезенки и т. д. Их можно было бы поместить в некоем объеме человека и проводить его исследование на томографе. Вернее, упрощенно моделировать это исследование на уроке информатики

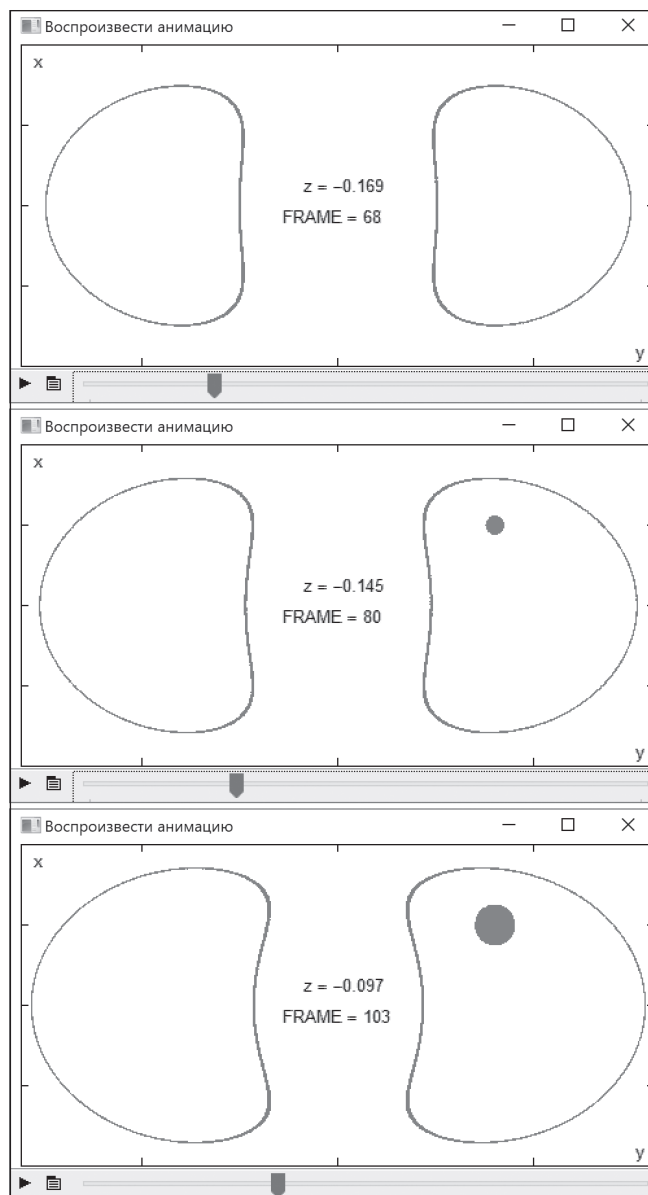


Рис. 9. Кадры томограммы почек с камнем внутри (легких с затемнением)

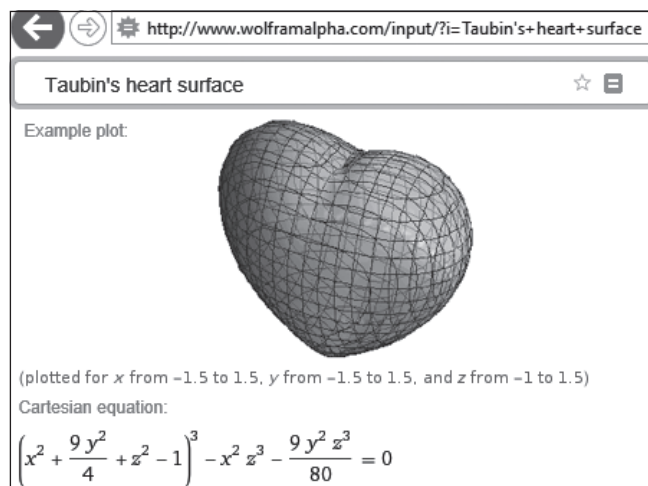


Рис. 10. Построение поверхности «сердце» с помощью сайта WolframAlpha (<http://www.wolframalpha.com/input/?i=Taubin's+heart+surface>)

с междисциплинарными связями с физикой, математикой и биологией.

Сайт статьи с цветными рисунками и анимациями: <https://community.ptc.com/t5/PTC-Mathcad-Blog/Tomography/ba-p/483596>

Список использованных источников

1. *Очков В. Ф.* Живые кинематические схемы в Mathcad // Открытое образование. 2013. № 3. <http://twf.mpei.ac.ru/ochkov/Mathcad-15/kinematic.html>

2. *Очков В. Ф., Диаз Фалькони А.* Информатика, алгебра, геометрия: четыре арифметические кривые с покером // Информатика в школе. 2016. № 9. <http://twf.mpei.ac.ru/ochkov/4-curves.pdf>

3. *Очков В. Ф., Калова Я., Никульчев Е. В.* Оптимизированный фрактал или ФМИ // Cloud of Science. 2015. Т. 2. № 4. http://twf.mpei.ac.ru/ochkov/Opt_Fractal.pdf

4. *Kwan S. P.* Learning and Teaching Mathematics with GeoGebra and Microsoft Excel // The Asian Conference on Education 2012. Osaka, Japan. http://iafor.org/archives/offprints/ace2012-offprints/ACE2012_0674.pdf

КОНКУРСЫ

В оформлении обложки данного номера журнала «Информатика в школе» использованы работы следующих авторов — победителей конкурса цифровых изображений и фотографий:



Дарья Неваляная,
воспитанница ГОБУДО
«Дворец творчества — Мемориал»,
ученица КОГОБУШ ОВЗ № 50, г. Киров



И. А. Ковальчук,
педагог дополнительного образования
Дома детского творчества
Спасского муниципального района
Республики Татарстан



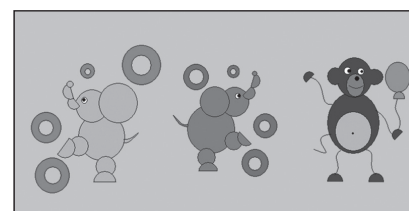
Екатерина Меняйлова,
ученица средней
общеобразовательной
школы № 8, г. Ноябрьск,
Ямало-Ненецкий
автономный округ



Эвелина Бокан,
ученица средней общеобразовательной
школы № 8, г. Ноябрьск,
Ямало-Ненецкий автономный округ



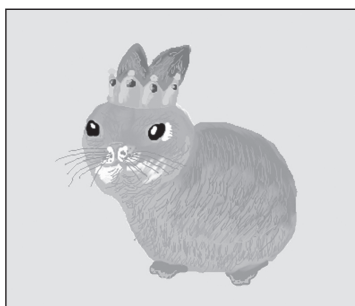
Сергей Шамеев,
студент Мамадышского политехнического
колледжа, Республика Татарстан



Вячеслав Борисов,
ученик средней общеобразовательной
школы № 1, г. Зеленокумск,
Ставропольский край



Т. Е. Сорокина,
учитель информатики лицея № 1547,
г. Москва



Арина Безбородова,
ученица гимназии № 1,
г. Новосибирск



Виктор Шароварников,
студент Барнаульского государственного
педагогического колледжа