第 4 章 “鹦鹉螺号”潜艇
——要信任，也要查证！

该章描述了一种对欠定代数方程组进行符号、图形和数值求解的技术，该技术导致了数学包符号数学中单一错误的发现。

以下是儒勒·凡尔纳小说《水下两万列尔》的原话：*«Voici, monsieur Aronnax, les diverses dimensions du bateau qui vous porte. C’est un cylindre très allongé, à bouts coniques. <…>. Ces deux dimensions vous permettent d’obtenir par un simple calcul la surface et le volume du Nautilus. Sa surface comprend mille onze mètres carrés et quarante-cinq centièmes; son volume, quinze cents mètres cubes et deux dixièmes — ce qui revient à dire qu’entièrement immergé il déplace ou pèse quinze cents mètres cubes ou tonneaux.»*

从法语翻译成数学语言的意思是，尼莫船长在回答阿罗纳克斯教授关于潜艇尺寸的问题时回答说，鹦鹉螺号是一个几何体的形状，由两个（相同-我们的假设）直圆锥体（船头和船尾）和一个直圆形圆柱体组成（船体-见图 4.1）。圆锥和圆柱体（变量 R）的基部半径相等。已知船体积 V（1500.2 立方米）和外表面积 S（1011.45 平方米）。必须确定其几何尺寸——两个锥体和圆柱体的底部半径 R、两个锥体的高度（船首和船尾的长度）H 和圆柱体的高度（船体的长度）L（见图 4.1）。

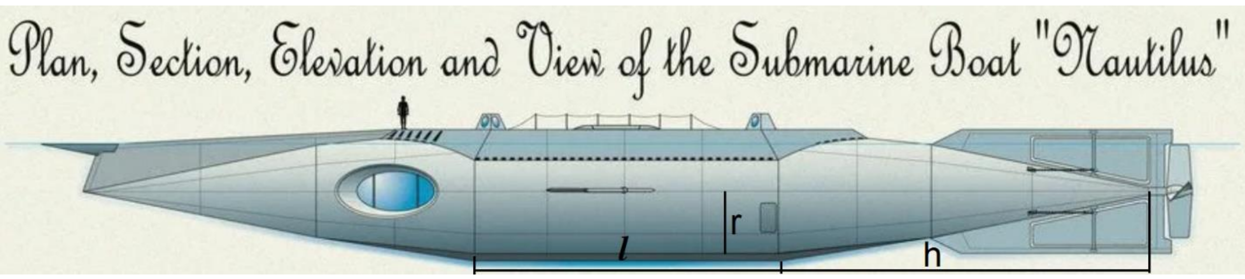

图 4.1 “鹦鹉螺号”潜艇图像的一种方案

第 4 章

儒勒·凡尔纳是一名受过教育的律师，而不是工程师。这可以解释在描述潜艇的体积和表面积时过于准确的原因。我们把这些数据稍微四舍五入，假设$v = 1500\ m^3$，$s = 1010\ m^3$。在科幻小说中，作者往往以夸大的准确性来操作，这样就会有更多的科学性和更少的幻想性。读者可以“玩”一下参数 v 和 s 的值，并查看图表中会得到什么。

问题归结为求解两个非线性方程组（体积方程组 V=……和曲面方程组 S=……——见图 4.2 第 1 和第 2 点），其中有三个未知的 r、h 和 l。结果证明该系统是未确定的，因为未知数的数目大于方程的数目。然而，我们将尝试解决它。不仅是为了得到答案——未知 r、h 和 l 的具体值，而且是为了教育和科学目的。

正如我们不止一次强调的那样，任何数学或工程问题都必须立即尝试解析（符号）解决——绝对准确并具有尽可能多的答案，然后在必要时求助于近似数值方法，这些方法通常不会从几个可能的答案中给出完全准确的单一答案。图 4.2 显示了“鹦鹉螺号”的体积和外表面积方程是如何在 Smath 环境中计算的，从这些方程中可以手动得出船体长度 l 的两个不同表达式（通过复制和编辑公式）。它们是等效的，因此它们可以相互等同，并且不再在手动模式下，而是在计算机的参与下，相对于变量 r 或 h 进行求解。需要强调的是，最好在计算机上解决和简单的表达式，以避免错误（拼错表达式）。另一方面，对于头脑训练来说，练习手算总是有好处的。更好的方法是先手算一个解决方案，然后将其与机器解决方案进行比较。答案往往不完全相同，但如果没有手工计数错误，那么它们在数学本质上是相同的。但是在机器分析转换中也会出现计算错误。这就是我们将在这本书的本章中展示的。

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h + \pi \cdot r^2 \cdot l + \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$$ - 潜艇体积 (1)

$$V = \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h + \pi \cdot r^2 \cdot l \qquad V - \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h = \pi \cdot r^2 \cdot l$$

$$l = \frac{V - \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h}{\pi \cdot r^2}$$ - 手算结果

$$S = \pi \cdot r \cdot \sqrt{r^2 + h^2} + 2 \cdot \pi \cdot r \cdot l + \pi \cdot r \cdot \sqrt{r^2 + h^2}$$ - 表面积 (2)

$$S = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot \sqrt{r^2 + h^2} + 2 \cdot \pi \cdot r \cdot l \qquad S - 2 \cdot \pi \cdot r \cdot \sqrt{r^2 + h^2} = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot l$$

$$l = \frac{S - 2 \cdot \pi \cdot r \cdot \sqrt{r^2 + h^2}}{2 \cdot \pi \cdot r}$$ - 手算结果

图 4.2 “鹦鹉螺号”问题解析解的开始

在 Smath 环境中没有方程的解析求解工具。没关系-让我们使用 wolframalpha.com 网站-参见图 4.3。在本网站的输入窗口中，我们将记录潜艇船体的长度方程，其左右部分来自图 4.2 所示的手算解。

https://www.wolframalpha.com

$$V=1500,\ S=1100,\ \frac{V-\frac{2}{3}\pi r^2 h}{\pi r^2}=\frac{S-2\pi r\sqrt{r^2+h^2}}{2\pi r},\ \text{solve } h$$

Results

$$h=\frac{3\left(-\frac{3000}{r^2}-\frac{\sqrt{5}\sqrt{-\pi^2 r^6+544\,500 r^2-2\,970\,000 r+4\,050\,000}}{r^2}+\frac{1100}{r}\right)}{5\pi}$$

$$h=\frac{3\left(-\frac{3000}{r^2}+\frac{\sqrt{5}\sqrt{-\pi^2 r^6+544\,500 r^2-2\,970\,000 r+4\,050\,000}}{r^2}+\frac{1100}{r}\right)}{5\pi}$$

图 4.3 “鹦鹉螺号”船体长度方程的解析解

方程可以相对于变量 r 或 h 求解。用变量 r 求解潜艇船体长度方程被证明过于繁琐且没有定论。它归结为求多项式的根。变量 h（图 4.3）的解将会变得相对简单，不同之处在于分子中所包含的分数的符号。它被转移到 Smath 环境（图 4.4），在那里绘制了代表我们欠定方程组解点集的图形。一切都简单明了，甚至优雅，但是……

$V := 1500 \qquad S := 1100$

$$h_1(r) := \frac{3 \cdot \left(-\frac{3000}{r^2} - \frac{\sqrt{5} \cdot \sqrt{-\pi^2 \cdot r^6 + 544500 \cdot r^2 - 2970000 \cdot r + 4050000}}{r^2} + \frac{1100}{r} \right)}{5 \cdot \pi}$$

$$h_2(r) := \frac{3 \cdot \left(-\frac{3000}{r^2} + \frac{\sqrt{5} \cdot \sqrt{-\pi^2 \cdot r^6 + 544500 \cdot r^2 - 2970000 \cdot r + 4050000}}{r^2} + \frac{1100}{r} \right)}{5 \cdot \pi}$$

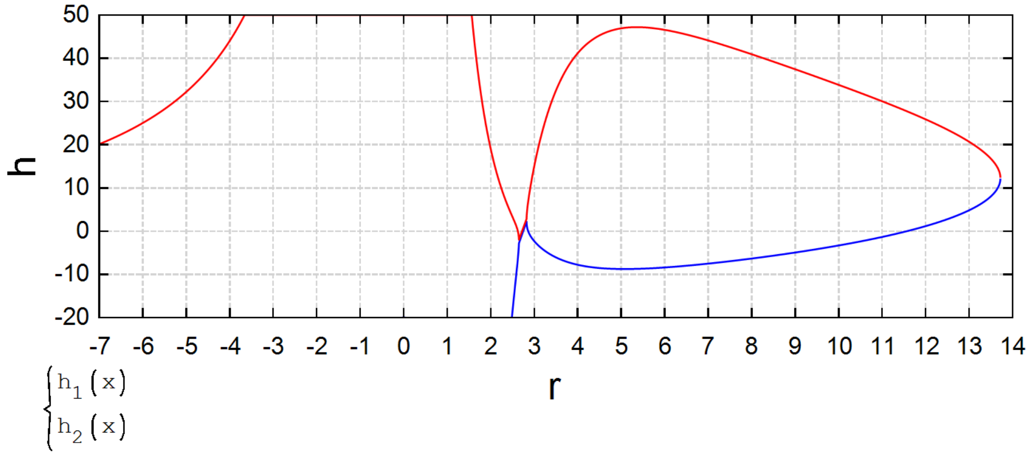

图 4.4 “鹦鹉螺号”尺寸问题的分析图解

事实证明，此欠定方程组有一个多余的解。真正的解就只有图 4.4 中右所示的由函数 H1 和 H2 的两个半组成的右闭曲线。图中左侧的开放曲线（仅显示其部分）是图 4.3[2,3]所示方程解析解的误差。如果您从“左”曲线中取任何一点，将其坐标替换为潜艇体积和表面的原始方程，并看到只有一个方程变成恒等式，而第二个方程则不成立-见图 4.5。事实是，每个函数 h1 和 h2 在参数 r 的某些值下给出正确的答案，而在其他值下给出错误的答案（见图 4.5）。这里的“左曲线”一词不仅可以从它在图表上的位置来理解，还可以从形容词“左”的另一含义——“捞外快”，即偷工减料。在图 4.5 中，正确的答案放在绿色框中，错误的答案放在红色框中。

$r := 2.6$ **从“左曲线”中取一个点**

$h := h_1(r) = -8.7545 \qquad l := \dfrac{V - \frac{2}{3}\cdot\pi\cdot r^2\cdot h}{\pi\cdot r^2} = 76.4673$

$\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot r^2\cdot h + \pi\cdot r^2\cdot l + \frac{1}{3}\cdot\pi\cdot r^2\cdot h = \boxed{1500} \qquad V = 1500$

$\pi\cdot r\cdot\sqrt{r^2+h^2} + 2\cdot\pi\cdot r\cdot l + \pi\cdot r\cdot\sqrt{r^2+h^2} = \boxed{1398} \qquad S = 1100$

$l := \dfrac{S - 2\cdot\pi\cdot r\cdot\sqrt{r^2+h^2}}{2\cdot\pi\cdot r} = 58.2023$

$\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot r^2\cdot h + \pi\cdot r^2\cdot l + \frac{1}{3}\cdot\pi\cdot r^2\cdot h = \boxed{1112} \qquad V = 1500$

$\pi\cdot r\cdot\sqrt{r^2+h^2} + 2\cdot\pi\cdot r\cdot l + \pi\cdot r\cdot\sqrt{r^2+h^2} = \boxed{1100} \qquad S = 1100$

$h := h_2(r) = 0.8439 \qquad l := \dfrac{V - \frac{2}{3}\cdot\pi\cdot r^2\cdot h}{\pi\cdot r^2} = 76.4673$

$\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot r^2\cdot h + \pi\cdot r^2\cdot l + \frac{1}{3}\cdot\pi\cdot r^2\cdot h = \boxed{1636} \qquad V = 1500$

$\pi\cdot r\cdot\sqrt{r^2+h^2} + 2\cdot\pi\cdot r\cdot l + \pi\cdot r\cdot\sqrt{r^2+h^2} = \boxed{1294} \qquad S = 1100$

$l := \dfrac{S - 2\cdot\pi\cdot r\cdot\sqrt{r^2+h^2}}{2\cdot\pi\cdot r} = 64.6013$

$\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot r^2\cdot h + \pi\cdot r^2\cdot l + \frac{1}{3}\cdot\pi\cdot r^2\cdot h = \boxed{1384} \qquad V = 1500$

$\pi\cdot r\cdot\sqrt{r^2+h^2} + 2\cdot\pi\cdot r\cdot l + \pi\cdot r\cdot\sqrt{r^2+h^2} = \boxed{1100} \qquad S = 1100$

图 4.5 揭露“左”倾曲线

笔者请一位数学老师求解图 4.3 所示的鹦鹉螺方程。这位物理和数学科学博士写了几张纸，但从未完成这件事。他只建议在某些阶段需要求解二次方程并从两个根中选择一个来进一步处理它。这位老师辩解说，他是数学这一狭窄领域的专家，与我们的任务相去甚远。

因此，解题的分析方法的无误性被动摇了。重复一遍，我们既要相信符号（分析）数学，也要查验！顺便说一下，这个错误存在于所有数学程序中-Maple、Mathematica、MathCAD 等。Wolframalpha.com 网站（图 4.3）是 Mathematica 软件包的云缩短版本，许

多人认为它被认为是符号数学的最佳工具。所有这些都迫使我们脱离上面所示的解析解，转而求助于数值方法（参见图 4.6）在 r 值的区域，方程的解是正确的，即在唯一封闭曲线的区域，该曲线上的一个点表示了一个可能的解，假设潜艇的直径为 6 米。图上没有“左”曲线。

顺便说一下，图 4.4 中打开的左侧曲线和封闭的右侧曲线之间的跳线（“管道”）不再是符号数学的错误，而是 Smath 包图形的错误。如果在图 4.5 所示的计算中，变量 R 的值不是 2.6，而是 2.7，那么函数 H1 和 H2 将产生不应在图表上显示的复数。让我们再说一遍——信任，但不仅要检查符号数学，还要检查显示解决方案的图形工具。

$$f(r, h) := \frac{V - \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h}{\pi \cdot r^2} - \frac{S - 2 \cdot \pi \cdot r \cdot \sqrt{r^2 + h^2}}{2 \cdot \pi \cdot r}$$

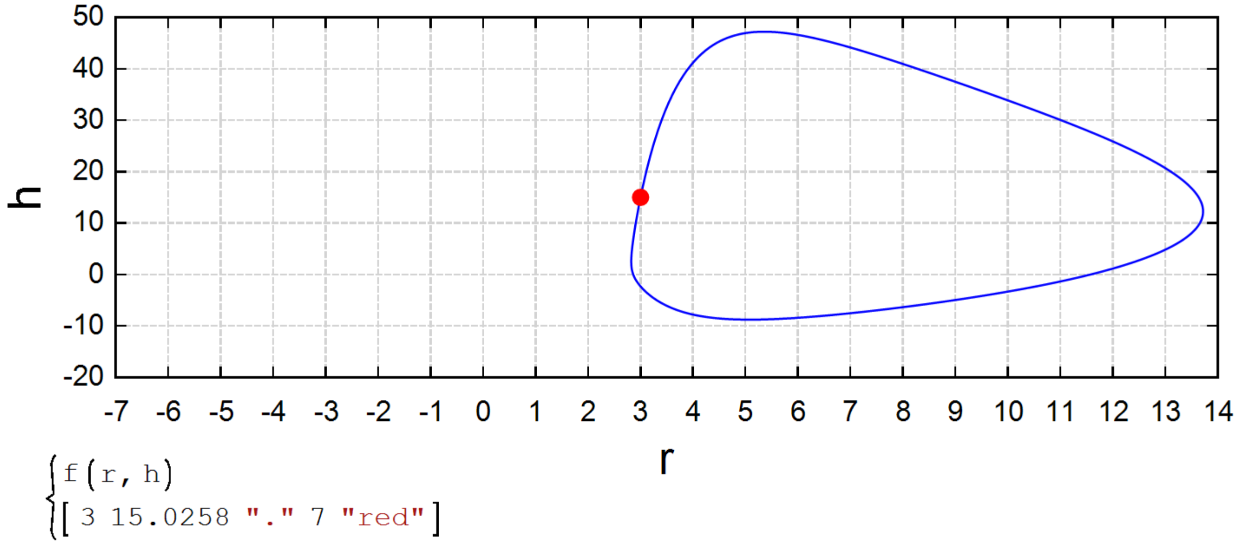

图 4.6 “鹦鹉螺号”问题隐函数的作图

数学包通过制表参数和函数的值，并用直线连接所得点或用某种插值曲线平滑它们来绘制函数图形。如果数学分析课上的学生开始以这种方式作图，那么要求高且情绪化的老师会将这样的学生踢出课堂，对他跺脚叫骂。我们通常更智能地构建此类图——定性，而不是定量：我们分析函数，寻找特殊点——零、极值、拐点、渐近线、断点等。这就是为什么学校和大学的许多数学教师有充分的理由认为机器分析和图形会让学生变愚钝，让他们用头脑工作......或者更确切地说：他们让大部分学生变愚钝，但他们丰富了聪明和认真的学生的知识。

图 4.7 显示了 Smath 包的 SOLVE 和 ROOTS 数值函数在计算方程根时的操作（图 4.2）。假设 r 等于三米（图 4.6 中右“正确”图形上的点之一）。

第一个 SOLVE 函数调用搜索船体积方程的根，在此基础上代入船体表面公式。船的表面方程见图 4.2 的解。如果我们不指定 h 值的第一个假设，那么我们得到负值 h=-2.2934，可以这样解释：船的船头和船尾不是从船体中凸出，而是压入其中。如果您使用 SOLVE 函数的第三个和第四个参数设置方程的求根区间，那么从船的几何角度来看，答案(h=15.0258)将是可以接受的。在这个版本中，SOLVE 函数没有替换公式而不是变量 l，而是引入了同名的局部变量并分配了表达式。

一个方程不能替换为另一个方程，而是使用 roots 函数求解一组方程而不是单个方程。如果您不设置第一个假设，那么 Smath 包将再次“将船头和船尾压入船体”，沿其长度拉伸(H=-2.2934，L=54.5806)。如果第三个参数以向量的形式设置合理的第一次近似，那么答案也将是“合理的”。它由图 4.6 曲线上的一个点显示。

$$r := 3$$

$$\mathrm{solve}\left(V = \frac{1}{3}\cdot\pi\cdot r^2\cdot h + \pi\cdot r^2\cdot\frac{S - 2\cdot\pi\cdot r\cdot\sqrt{r^2+h^2}}{2\cdot\pi\cdot r} + \frac{1}{3}\cdot\pi\cdot r^2\cdot h,\ h\right) = -2.2934$$

$$\mathrm{solve}\left(\left\| \begin{array}{l} l := \dfrac{S - 2\cdot\pi\cdot r\cdot\sqrt{r^2+h^2}}{2\cdot\pi\cdot r} \\ V = \dfrac{1}{3}\cdot\pi\cdot r^2\cdot h + \pi\cdot r^2\cdot l + \dfrac{1}{3}\cdot\pi\cdot r^2\cdot h \end{array}\right.,\ h,\ 10,\ 20\right) = 15.0258$$

$$\mathrm{roots}\left(\begin{bmatrix} V = \frac{1}{3}\cdot\pi\cdot r^2\cdot h + \pi\cdot r^2\cdot l + \frac{1}{3}\cdot\pi\cdot r^2\cdot h \\ S = \pi\cdot r\cdot\sqrt{r^2+h^2} + 2\cdot\pi\cdot r\cdot l + \pi\cdot r\cdot\sqrt{r^2+h^2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} h \\ l \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -2.2934 \\ 54.5806 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} h \\ l \end{bmatrix} := \mathrm{roots}\left(\begin{bmatrix} V = \frac{1}{3}\cdot\pi\cdot r^2\cdot h + \pi\cdot r^2\cdot l + \frac{1}{3}\cdot\pi\cdot r^2\cdot h \\ S = \pi\cdot r\cdot\sqrt{r^2+h^2} + 2\cdot\pi\cdot r\cdot l + \pi\cdot r\cdot\sqrt{r^2+h^2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} h \\ l \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 10 \\ 50 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 15.0258 \\ 43.0344 \end{bmatrix}$$

图 4.7 “鹦鹉螺号”潜艇尺寸问题的数值解法之一

图 4.8 显示了潜艇的轮廓，其参数由图 4.7 所示的最后一个算式找到。为了绘制潜艇的轮廓（由直线段组成的封闭折线曲线），创建了存储折线点坐标的船矩阵。矩阵的第一行是点的横坐标，第二行是纵坐标。矩阵是水平创建的，然后转置。这样做是为了节省空间。图形的网格间距为两米，比成年人的身高略高。这样做的目的是使我们计算的潜艇轮廓与图 4.1 所示的轮廓相比较，艺术家在图 4.1 中也绘制了人的轮廓。

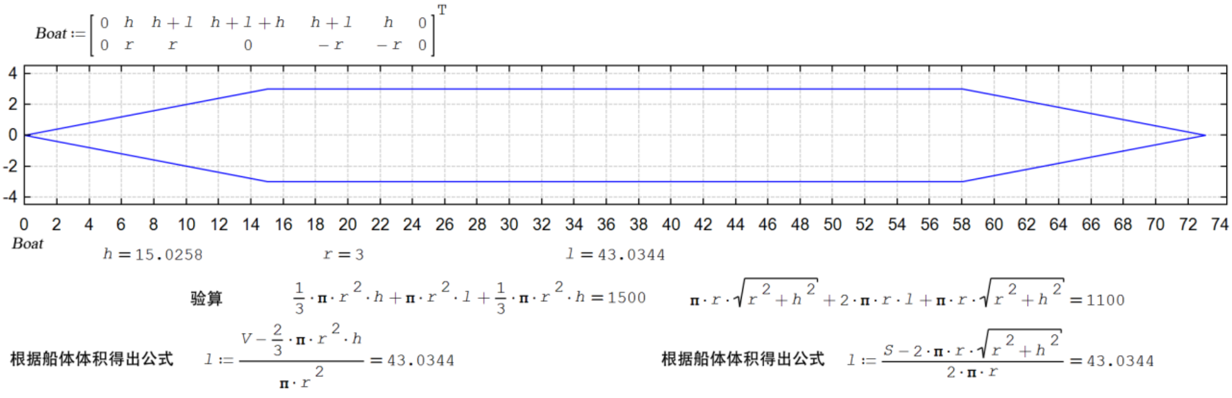

图 4.8 绘制“鹦鹉螺号”潜艇轮廓

在船的轮廓下放置了用于验证的算式。

在图 4.4 和 4.6 中，横坐标和纵坐标上的刻度是不同的，这不是很好。图 4.9 是我们在具有相同比例尺的坐标上的潜艇尺寸问题的一组解。这个轮廓本身就很漂亮。它可以被选为船本身的轮廓，当纵坐标为 10 时，在水面位置划出船的水线。这种剖面可以在飞机的机翼上，也可以在船本身的水平舵上，起到动态下潜或浮出水面的作用。

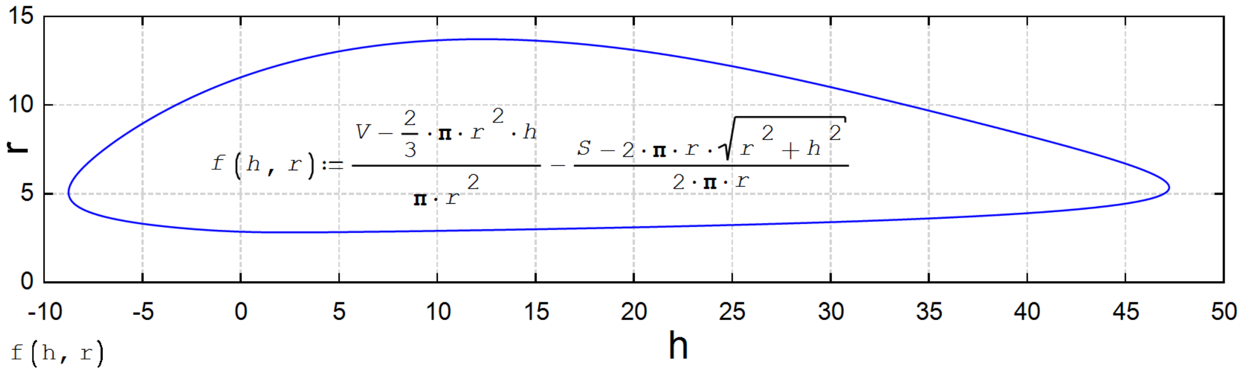

图 4.9 具有“数学”轮廓的潜艇

图 4.10 显示了我们潜艇方程解的三维空间中的点集。出于以下原因，这条曲线在这里会更合适。潜艇与普通水面舰艇的不同之处在于，它在移动时可以使用体积——水深，而不仅仅是平面——海面。

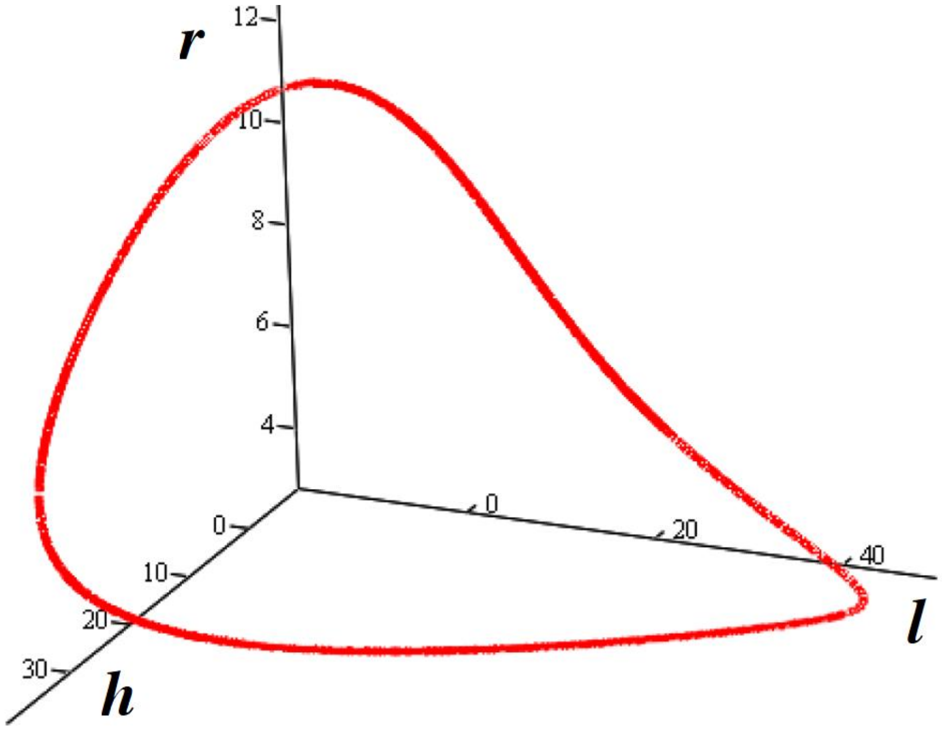

图 4.10 含三个未知数的“潜艇”两方程组的三维曲线解

早些时候，我们假设潜艇的船尾和船头的长度——两个直圆锥体的高度是相同的。如果去掉这个假设，方程组就会变得更加不明确。它将保留两个方程，未知的不再是三个，而是四个。这种系统的解决方案不是封闭曲线（见图 4.4 和 4.9），而是封闭曲面，如图 4.11 所示。我们有了一种飞翼形式的交通工具！

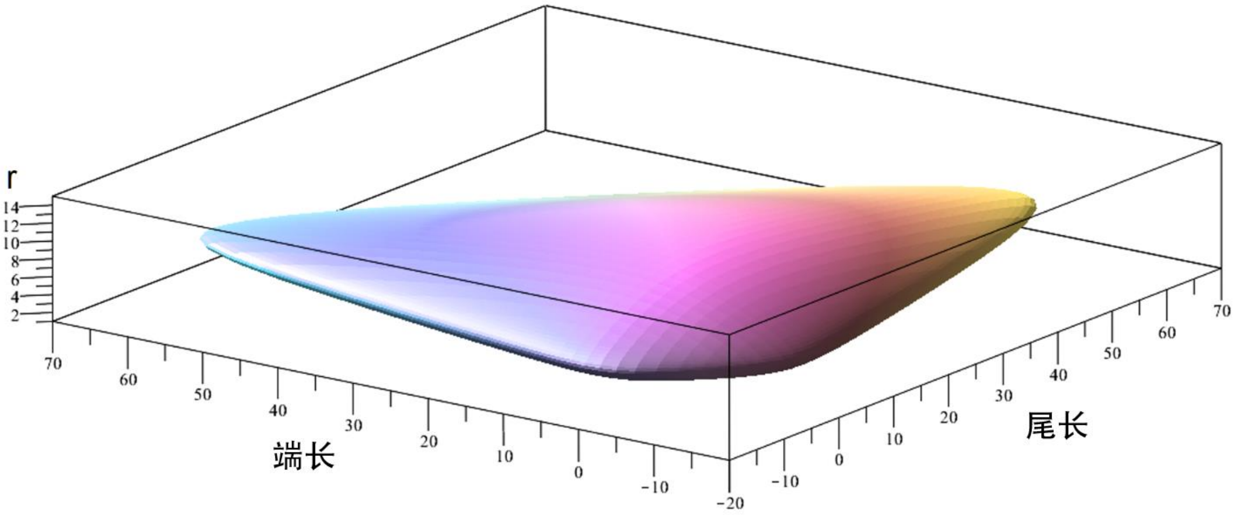

图 4.11 具有四个未知数的两方程组的“潜艇”解曲面

章后记

关于小说《海底两万里》，您可以在互联网上阅读以下内容。

第 4 章

朱尔斯·凡尔纳在创作这部小说的过程中，对 1863 年的波兰起义留下了深刻的印象，尼莫上尉最初是一位波兰贵族，与俄罗斯压迫者作战，俄罗斯压迫者杀死了他的整个家庭。但在他的出版商埃策尔的压力下，他不仅从政治局势出发，而且从波兰贵族根本没有足够的资金建造这样一艘潜艇的常识出发，儒勒·凡尔纳“剥夺”了尼莫的国籍，这仍然是阿罗纳斯教授和他的同伴所不知道的。只有船长舱里的革命者塔德乌斯·科斯秋什科的肖像让人想起他历史上的“波兰足迹”。后来，在小说《神秘岛》中，儒勒·凡尔纳将揭露尼莫船长的隐姓埋名，并将他描绘成逃亡的印度王子娜娜·萨吉巴，在西帕耶夫起义失败后出海，报复性的英格兰奴役了他的祖国。

法国在普法战争前夕积极寻求俄罗斯的支持，但在克里米亚战争失败后，俄罗斯对法国怀有极大的怨恨。这（俄罗斯的中立和英国女人的“堕落”）在很大程度上决定了法国在与普鲁士的战争中的失败以及阿尔萨斯和洛林的损失。在第一次世界大战之前，法国成功地获得了俄罗斯的支持，如果不是俄罗斯，德国军队在 1914 年就会再次穿过巴黎，就像他们在 1870 年和第二次世界大战开始时所做的那样。

俄罗斯和西方之间关系的这种起伏一直持续到 21 世纪，我们在第 1 章中指出了这一点。

习题：

1. 确定“鹦鹉螺”号潜艇的尺寸，前提是体积给定，表面积必须最小。
2. 确定“鹦鹉螺”号潜艇的尺寸，前提是表面积给定，体积必须最大。
3. 确定图 4.6 所示封闭曲线的最大点和最小点的坐标。
4. 确定船的最小和最大半径。
5. 在 Smath 环境中构建图 4.10 和 4.11 所示的图形对象。
6. 用解析法求解图 4.11 所示的问题。虚假（“左”）不再是曲线，而是表面会有解决方案吗？

参考文献：

1. Верн, Жюль. Двадцать тысяч льё под водой / пер. с фр. Н. Яковлева, Е. Корш. — М.: Государственное издательство художественной литературы, 1956. — 478 с. (http://www.lib.ru/INOFANT/VERN/20000lje.txt)

2. В. Ф. Очков, Ю. С. Федоров, Ю. С. Воронова, А. Д. Моисеева. Подводная лодка «Наутилус», и новые образовательные технологии // Cloud of Science. Том 5 № 1.2018. С. 5-39 (http://www.twt.mpei.ac.ru/ochkov/Nautilus.pdf)

第 4 章

3. Ochkov, V., Vasileva, I., Nori, M., Orlov, K., Nikulchev, E. Symbolic computation to solving an irrational equation on based symmetric polynomials method // Computation. Volume 8, Issue 2, 1 June 2020, Article number 40 (https://www.mdpi.com/2079-3197/8/2/40)

2.