

Эксперимент

Цифровой двойник эпидемии

Валерий Очков

Фауст

Что там белеет? Говори.

Мефистофель

Корабль испанский трёхмачтовый,
Пристать в Голландию готовый:
На нём мерзавцев сотни три,
Две обезьяны, бочки злата,
Да груз богатый шоколата,
Да модная болезнь: она
Недавно вам подарена.

А.С. Пушкин. Сцена из Фауста

В стотысячный город прибывают 300 человек, заражённых какой-то вирусной инфекцией. Тут, следуя эпиграфу¹, так и подмывает написать, что прибывают «мерзавцев сотни три». Но, во-первых, далеко не вся команда испанского корабля была заражена «модной болезнью», а во-вторых, далеко не все заражённые были мерзавцами. Просто пушкинские строки у многих на слуху в наши непростые коронавирусные времена, они так и просятся эпиграфом к статье о *математической модели эпидемии*, или, как сейчас принято говорить, о *цифровом двойнике эпидемии*.

Итак, в город с населением в сто тысяч человек в нулевой день² прибывают 300 зараженных. В Mathcad-расчёте на рисунке 1 этот момент зафиксирован тремя операторами первой строки: нулевым элементом

1 А.С. Пушкин в 1830 году во время эпидемии холеры, охватившей Москву, находился на трёхмесячном карантине и жил затворником в селе Большое Болдино. Болдинская осень – наиболее продуктивная творческая пора в жизни поэта. За это время он завершил работу над «Евгением Онегиным», циклами «Повести Белкина» и «Маленькие трагедии», написал поэму «Домик в Коломне» и 32 лирических стихотворения (Википедия).

2 Нумерация элементов векторов и матриц в среде Mathcad по умолчанию начинается с нуля. Это число хранит системная переменная ORIGIN. Математики вслед за программистами всё чаще и чаще начинают нумеровать элементы векторов и матриц не с единицы, а с нуля.

векторов *Здоровые*, *Заразившиеся* и *Больные* присваиваются значения 100 000, 300 и 300. Этими числами можно «поиграть»: задать иные значения и увидеть результат развития эпидемии. А для этого нужно заполнить остальные элементы трёх этих векторов, что мы и сделаем, и худо-бедно (модель, подчеркиваем, простейшая) решим поставленную задачу.

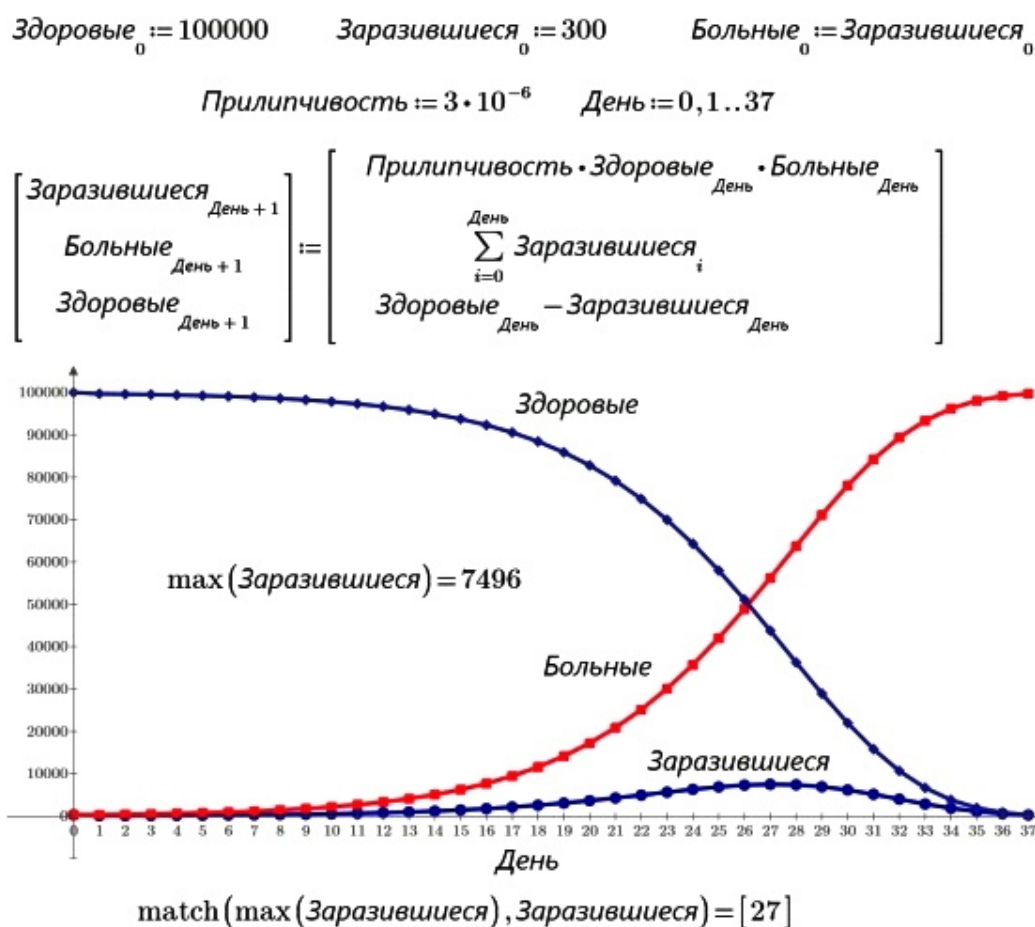


Рис. 1. Одна из простейших математических моделей развития эпидемии

Второй строкой расчёта на рисунке 1 задаётся значение переменной *Прилипчивость*³, во многом определяющей характер развития эпидемии. В расчёт также вводится переменная области (Range Variable) *День* для перебора дней развития эпидемии – с нулевого по тридцать седьмой (эту

³ Тут можно было бы подобрать более научный термин. Но, читаем у Чехова в рассказе «Гость»: «Болезнь опасная! Мало того, что я сам болен, но могу ещё и других заразить. Болезнь в высшей степени прилипчивая!»

цифру можно будет менять в расчёте). Переменная области – это некий протовектор, если так можно выразиться: в элементах полноценного вектора могут храниться значения в любом порядке, а в переменной области – значения, связанные арифметической прогрессией. При введении в расчёт переменной области задаются её первое, второе и последнее значения. Если второе значение не указать, то оно по умолчанию будет отличаться от первого на -1 или на $+1$. Переменная области была введена ещё в первые версии Mathcad, где не было инструментов программирования. Сейчас эти инструменты позволяют не вводить в расчёт переменные области.

Модель развития эпидемии такова: число заразившихся в текущий день (*День +1*) пропорционально произведению числа здоровых и числа больных в предыдущий день (*День*). Коэффициент пропорциональности и есть та самая величина *Прилипчивость*. Число больных в текущий день – это сумма заразившихся в каждый предыдущий день. Число здоровых в текущий день – это число здоровых минус число заразившихся в предыдущий день.

Векторами в среде Mathcad могут быть не только переменные, но в каком-то смысле и операторы: порядок выполнения операторов может определяться вектором. В нашем расчёте заполнение векторов *Здоровые*, *Заразившиеся* и *Больные* ведётся не тремя отдельными операторами присваивания, а одним оператором-вектором с тремя элементами. Такой приём позволяет выполнять эти операторы параллельно. Без этого выполнение первого отдельно стоящего оператора *Заразившиеся*_{День+1} := ... прерывалось бы сообщением об ошибке, так как вектор *Больные* ещё не заполнен, а заполнить его тоже нельзя. Разорвать этот замкнутый круг можно с помощью параллельного вычисления операторов⁴.

⁴ Часто в программировании нужно поменять местами значения у двух и более переменных. Тут обычно на помощь призывают вспомогательные переменные. Но в среде Mathcad можно поступить проще: воспользоваться матрицей с одной строкой и двумя столбцами. Об этой особенности – параллельном выполнении операторов – знает мало кто из пользователей Mathcad.

Графики на рисунке 1 визуализируют содержание трёх заполненных векторов. На 27-й день эпидемии фиксируется максимальное количество заразившихся за день – 7496 человек⁵ (функция `max`), см. нижнюю кривую. Этот день можно также рассчитать с помощью ещё одной встроенной в Mathcad функции – функции `match`, возвращающей индекс заданного элемента в векторе. Число 27 внизу на рисунке заключено в квадратные скобки. Они указывают на то, что это не скаляр, а вектор, но с одним элементом. Дело в том, что в векторе *Заразившиеся* может быть несколько элементов одного заданного значения. В этом случае функция `match` вернёт вектор с несколькими, а не с одним элементом.

Представленная на рисунке 1 математическая модель эпидемии, повторяем, максимально упрощена. Но её можно дополнять и развивать, вводя в расчёт новые векторы, учитывающие, например, смертность от вирусной болезни или (наоборот и к счастью) излечение от неё и приобретение иммунитета. Кого-то будут эвакуировать с заражённой территории и т. д. Да и величина *Прилипчивость* не может не меняться. Её тоже можно сделать вектором с разными значениями для разных дней.

На рисунке 2 показан такой расчёт: на седьмой день развития эпидемии власти города принимают превентивные меры – предписывают носить маски, вводят ограничения по передвижению людей (карантин) и прочее, тем самым резко (ступенькой) уменьшают значение переменной *Прилипчивость* с $2 \cdot 10^{-5}$ до $3 \cdot 10^{-6}$. За счёт этого удаётся не допустить взрывного характера развития эпидемии. Следует отметить, что описанная модель развития эпидемии очень чувствительна к значению переменной *Прилипчивость*. Стоит это значение слегка изменить – и можно получить отрицательные или недопустимо большие значения в векторах *Здоровые*, *Заразившиеся* и *Больные*.

⁵ Это число округлено до целого значения. В нашем расчёте следовало бы использовать встроенную в Mathcad функцию `round` (округляет свой аргумент до заданного значения).

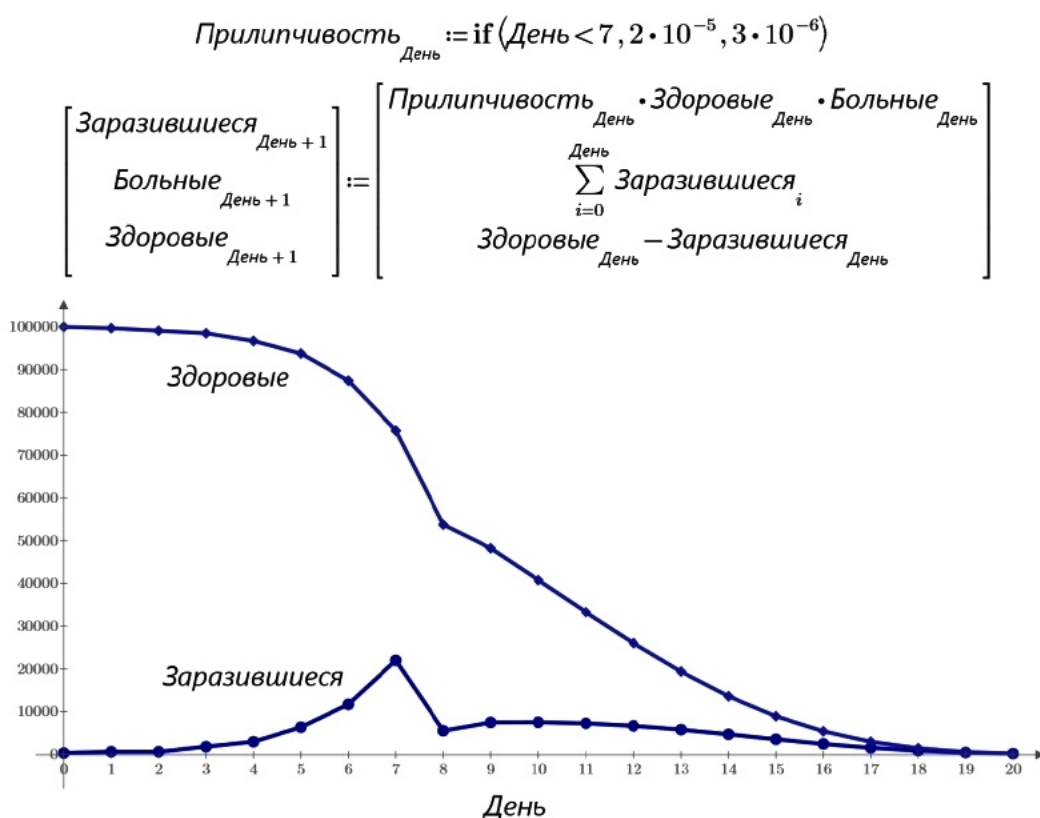


Рис. 2. Дополненная математическая модель развития эпидемии

От разностной схемы можно перейти к системе дифференциальных уравнений и генерировать не дискретные значения в векторах, а функции, возвращающие число здоровых, заразившихся и больных в разные моменты времени.

Следует также отметить, что представленные на рисунках 1 и 2 решения касались задачи с начальными условиями (задача Коши). Но в реальной жизни мы не можем знать число заражённых в начальный день. Мы можем знать только число здоровых в начальный день и число больных в какой-то конкретный день развития эпидемии. Тут уже нужно будет решать не задачу Коши, а краевую задачу. В нашей модели её можно решить методом стрельбы: задавать начальное значение больных, смотреть, как оно отличается от заданного значения больных на другом конце интервала (недолёт или перелёт) и корректировать «угол наклона пушки» – задавать новое начальное значение больных.

На сайте пользователей Mathcad можно увидеть более сложные модели развития эпидемии⁶.

Автор в своё время описал модель развития эпидемии в книге [1], воспользовавшись примером, приложенным к пакету Mathcad. В публикациях [2, 3] эта модель была расширена и приложена к описанию развития *финансовой пирамиды*, где число купивших акции компании-жулика в текущий день тоже пропорционально произведению числа купивших (больные) и числа не купивших акций (здоровые) в предыдущий день.

Источники

1. *Очков В.Ф.* Mathcad PLUS 6.0 для студентов и инженеров. – М.: КомпьютерПресс, 1996.
2. *Очков В.Ф., Богомолова Е.П., Иванов Д.А.* Физико-математические этюды с Mathcad и Интернет: Учебное пособие. – 2-е изд., испр. и доп. – СПб.: Лань, 2018.
См. <http://twf.mpei.ac.ru/ochkov/T-2018/PhysMathStudies.pdf>.
3. *Valery Ochkov.* 2⁵ Problems for STEM Education. Chapman and Hall/CRC, 2020.
См. <https://www.crcpress.com/2-Problems-for-STEM-Education/Ochkov/p/book/9780367345259>.

⁶ См. <https://community.ptc.com/t5/PTC-Mathcad/coronavirus-math/td-p/654378>.