Что нам стоит мост построить!
или
Знание – сила

«– Самолюбия, – сказал Левин, задетый за живое словами брата, – я не понимаю. Когда бы в университете мне сказали, что другие знают цепную функцию, а я не знаю, – тут самолюбие».

Лев Толстой. «Анна Каренина»

Когда-то не так уж давно в расчетах использовать синусы, косинусы, тангенсы, логарифмы и проч. было некой проблемой. Необходимо было отрываться от расчета и заглядывать в справочники – в знаменитые таблицы Брадиса, например, на которых выросло несколько поколений школьников. При этом часто нужно было проводить интерполяцию по дискретным справочным данным. Так поступали, делая вычисления на листочках бумаги, на арифмометрах, с помощью логарифмической линейки или простейшего электронного калькулятора. Потом появились так называемые научные (инженерные) калькуляторы, которые помимо сложения, вычитания, умножения, деления, извлечения квадратного корня и вычисления процентов, «научились» работать и с вышеперечисленными и другими подобными математическими функциями.

Сейчас появились так называемые компьютерные суперкалькуляторы (математические программы), которые дополнительно могут строить графики, работать с матрицами, искать пределы, брать производные и интегралы (см. эпиграф[1] и задачу ниже), решать уравнения – алгебраические и дифференциальные, вести оптимизацию и проводить другие операции, связанные уже не с элементарной (школьной), а с высшей (вузовской) математикой, с математическим анализом, например.

Давайте для иллюстрации этих особенностей суперкалькуляторов решим в среде Mathcad одну красивую инженерную задачу.

На двух берегах реки на расстоянии L друг от друга возвели два пилона будущего моста высотой h_1 и h_2, к которым прикрепили цепь длинной S и с линейной массой m_c. К цепи на расстоянии x_1 от левого пилона подвесили груз

---

[1] В романе Толстого упоминается не цепная линия, а интегральное исчисление, которое тоже напрямую связано с задачей статьи.

массой m_g (это, к примеру, элемент будущей проезжей части моста)[2]. На рисунке 1 показан расчет, где перечисленным переменным присваиваются численные значения с соответствующими единицами измерений. Это еще одно существенное отличие суперкалькуляторов от простых калькуляторов – суперкалькуляторы работают не с числами, а с физическими величинами! Это ускоряет расчеты, делает их удобными, исключает возможные ошибки пересчета единиц измерения.

[2] Задачу можно упростить – строить не мост, а подвесную канатную дорогу.

h_1 (m)	h_2 (m)	L (m)	S (m)	m_g (kg)	m_c ($\frac{gm}{cm}$)	x_1 (m)
4	3	6	8	1	3	2

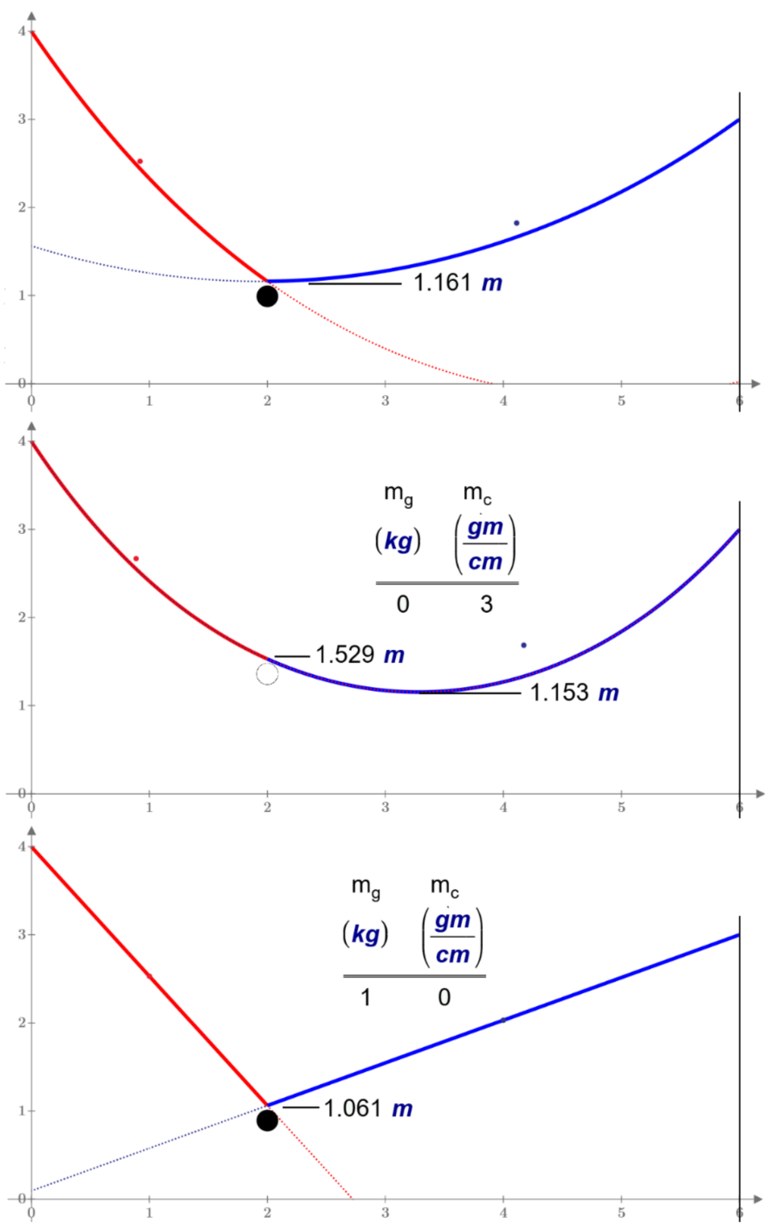

Рис. 1. Ввод исходных данных и вывод ответа в виде графика

За таблицей с исходными данными следует свернутая область расчетов – знак плюса в квадратике с прямой линией справа. Затем дан ответ в виде графика провисания цепи в трех вариантах: к цепи подвешен груз так, чтобы были видны провисания левого (индекс L) и правого (индекс R) участков цепи; цепь свободна от груза и её участки сливаются в одну провисающую цепь и третий вариант, когда масса цепи ничтожна мала по сравнением с массой груза и она натянута как струна.

Раскроем свернутую область расчета, и посмотрим, что в ней записано.

Считается, что создание и отладка *функций пользователя* – это наполовину решенная задача. На рисунке 2 показаны такие нужные нам функции:

1. Цепная линия с одним аргументом x и тремя параметрами.
2. Производная цепной линии по аргументу x.
3. Длина цепной линии на отрезке от x_1 до x_2. Переменная x_1 уже используется в нашем расчете, но в функции пользователя это локальная переменная, видимая только в самой функции.
4. Ордината центра тяжести цепной линии на отрезке от x_1 до x_2.
5. Абсцисса центра тяжести цепной линии на отрезке от x_1 до x_2.
6. Потенциальная энергия цепи с грузом.

Зависимости п.п. 1, 3, 4 и 5 несложно найти в Интернете, запустив поиск по соответствующим ключам. Функция абсциссы центра тяжести цепной линии (п. 5) в расчете не участвует, но она необходима для показа на графике провисания цепи центров тяжести двух участков цепи (см. эти центры на графиках рис. 1). В третьем варианте провисания цепи на рис. 1, как и ожидалось эти центры оказались в середине прямолинейных участков цепи. Один из действенных способов тестирования созданного расчета – это задание таких исходных данных, при которых ответ заранее известен.

$$y(x, a, x_0, h) := a \cdot \cosh\left(\frac{x - x_0}{a}\right) - a + h \qquad (1)$$

$$y'(x, a, x_0) := \frac{d}{dx} y(x, a, x_0, h) \rightarrow \sinh\left(\frac{x - x_0}{a}\right) \qquad (2)$$

$$L_c(x_1, x_2, a, x_0) := \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'(x, a, x_0)^2}\, dx \qquad (3)$$

$$y_{cg}(x_1, x_2, a, x_0, h) := \frac{\int_{x_1}^{x_2} y(x, a, x_0, h) \cdot \sqrt{1^2 + y'(x, a, x_0)^2}\, dx}{L_c(x_1, x_2, a, x_0)} \qquad (4)$$

$$x_{cg}(x_1, x_2, a, x_0) := \frac{\int_{x_1}^{x_2} x \cdot \sqrt{1^2 + y'(x, a, x_0)^2}\, dx}{L_c(x_1, x_2, a, x_0)} \qquad (5)$$

$$\begin{aligned} PE(y_1, a_L, x_{0L}, h_L, a_R, x_{0R}, h_R) := & L_c(0\, \boldsymbol{m}, x_1, a_L, x_{0L}) \cdot m_c \cdot \boldsymbol{g} \cdot y_{cg}(0\, \boldsymbol{m}, x_1, a_L, x_{0L}, h_L) \\ & + m_g \cdot \boldsymbol{g} \cdot y_1 \\ & + L_c(x_1, L, a_R, x_{0R}) \cdot m_c \cdot \boldsymbol{g} \cdot y_{cg}(x_1, L, a_R, x_{0R}, h_R) \quad (6) \end{aligned}$$

Рис. 2. Функции пользователя

Комментарии к рис. 1.

Если вы спросите друзей и знакомых, по какой функции провисает цепь, то 99% скажут, что это парабола. К такому ответу толкает и сам внешний вид параболы с вершиной в начале координат, но и тот факт, что камень, запущенный под углом к горизонту, летит по параболе. На висящую цепь и на летящий камень действует одна главная сила – сила притяжения. Поэтому-то в связке цепи и параболой нет ничего удивительного – даже великий Галилей так считал. Правда, в конце жизни он признался, что ошибся. Формулу цепной линии уже после Галилея почти одновременно и независимо друг от друга открыли три великих математика Бернулли, Гюйгенс и Лейбниц [1].

Цепная линия на рис. 2 в пункте 1 дана не в каноническом виде $a \cosh(x/a)$, когда её вершина находится в точке $x=0$, $y=a$, а в виде, при котором эта вершина будет находится в точке $x=x_0$, $y=h$. Это связано с тем, что в нашей задаче начало декартовых координат находится у основания левого пилона моста – см. рис 1, а не в той плавающей по вертикали точке, которую задает канонический вид цепной линии. Поэтому-то функция пользователя, записанная в пункте 1 на рис. 2, имеет один аргумент x и три параметра (a, x_0 и h), а не один (a). Вернее так! Функция с именем y имеет четыре аргумента, а не два. Это человек (пользователь компьютера) делит аргументы функции пользователя на собственно аргументы и на параметры. У компьютера же (у пакета Mathcad) они все равны.

Производная цепной линии (2) найдена средствами символьной математики Mathcad – с помощью оператора символьного преобразования «→». Это позволяет не высчитывать каждый раз производную численно, что само по себе считается довольно сомнительной операцией с позиций «чистой» математики. Кроме того, это преобразование – замена самой производной на ее выражение ускоряет расчеты.

Можно подобные преобразования применить и к функциям с интегралами, записанными в пунктах 3-5 на рис. 2. А можно этого не делать, тем более что выражения под номерами 4 и 5 не будут до конца избавлены от интегралов – от так называемых неберущихся интегралов, записанных в числителе дробей.

Функция потенциальной энергии нашей неподвижной механической системы (цепь с грузом) с семью аргументами, имеет три слагаемых, которые записаны столбиком, а не одной длинной линией. Это возможно делать в среде Mathcad. Забегая вперед, скажем, что решение нашей задачи будет опираться на частный случай принципа Д’Аламбера — Лагранжа, гласящий, что механическая система принимает в статике такое положение, при котором ее потенциальная энергия будет минимальна.

Итак, исходные данные и функции пользователя введены – можно решать задачу!

На рисунке 3 показан блок *решателя* Mathcad с тремя зонами – зона первых приближений переменных оптимизации, зона ограничений, где могут быть записаны не только равенства (как в нашем случае), но и неравенства, и зона, где может быть записана одна из четырех встроенных функций Mathcad – **Find**, **MinErr**, **Maximize** и **Minimize** [2]. Наша задача о провисающей цепи с грузом решается с помощью последней функции. Она по особому численному алгоритму меняет значения последних семи своих аргументов (первый аргумент с именем PE – это имя целевой функции оптимизации – см. п. 6 на рис 2) так, чтобы ограничения выполнялись, а целевая функция согласно вышеуказанного принципа приняла минимальное значение.

Решить

Начальные приближения

$$y_1 := 1\ m$$

$$a_L := 1\ m \qquad x_{0L} := 3\ m \qquad h_L := 1\ m$$

$$a_R := 1\ m \qquad x_{0R} := 3\ m \qquad h_R := 1\ m$$

Ограничения

$$h_1 = y(0\,m, a_L, x_{0L}, h_L) \quad (1)$$

$$h_2 = y(L, a_R, x_{0R}, h_R) \quad (2)$$

$$y_1 = y(x_1, a_L, x_{0L}, h_L) = y(x_1, a_R, x_{0R}, h_R) \quad (3)$$

$$S = L_c(0\,m, x_1, a_L, x_{0L}) + L_c(x_1, L, a_R, x_{0R}) \quad (4)$$

Решатель

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ a_L \\ x_{0L} \\ h_L \\ a_R \\ x_{0R} \\ h_R \end{bmatrix} := \mathbf{Minimize}(PE, y_1, a_L, x_{0L}, h_L, a_R, x_{0R}, h_R) = \begin{bmatrix} 1.161 \\ 3.441 \\ 4.915 \\ -0.15 \\ 4.752 \\ 1.944 \\ 1.161 \end{bmatrix} m$$

Рис. 3. Минимизация потенциальной энергии

В зоне ограничений языком математики записаны следующие условия задачи:

1. Левый конец цепи закреплен на высоте h_1.

2. Правый конец цепи закреплен на высоте h_2.

3. Два участка цепи сходятся в точке подвеса груза x_1-y_1. Здесь фактически (для экономии места) записаны не два уравнения, а одно. Значение x_1 задано, а значение x_2 нужно найти.

4. Длина цепи S величина постоянная. В принципе, цепь должна удлинится после ее подвеса на пилонах и прикрепления груза, и этот факт можно учесть.

По найденным функцией **Minimize** значениям строятся графики, показанные на рис. 1.

По этим данным также несложно рассчитать значения сил, растягивающих цепь, и построить соответствующие силовые *эпюры*.

Если у людей, знающих, по какому закону провисает цепь (см. выше), спросить, какой физический смысл заложен в параметр a функции цепной линии, то опять же образно говоря 99% скажут, что не знают этого или дадут неверный ответ. А правильный ответ таков.

Давайте в однородном гравитационном поле с ускорением свободного падения g, равном 9.807 метров, деленных на квадратные секунды, поместим цепочку с линейной массой m_C, равной семидесяти граммам на метр (см. первую строку расчета, показанного на рис. 5). И подвесим цепочку так, чтобы она провисала, как показано на графике рис. 5. Концы цепочки при этом окажутся в точках с координатами -1 m и 1.53 m и 1 m и 1.53 m. Длина такой цепочки будет равна примерно 2.69 метров, а масса 188 грамм.

$$g = 9.807\ \frac{m}{s^2} \qquad m_C := 70\ \frac{gm}{m} \qquad F := 0.5\ N$$

$$a := \frac{F}{g \cdot m_C} = 0.728\ m \qquad a = 0.728\ \frac{N}{\frac{m}{s^2} \cdot \frac{kg}{m}}$$

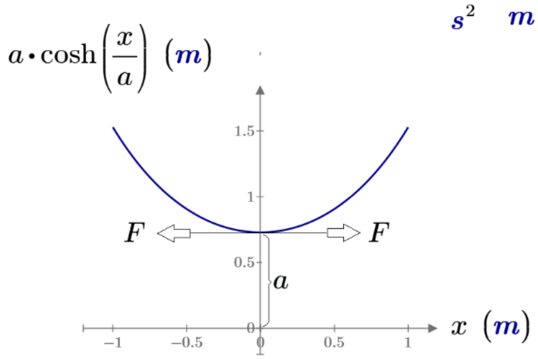

Рис. 5. Физический смысл параметра a цепной линии

Если замерить силу F, с какой наша цепочка будет растягиваться налево и направо в точке минимума, то она будет равна половине ньютона. Эту силу можно замерить и так – прицепить горизонтально к одному из концов цепочки динамометр и посмотреть, что он покажет. Сила F – это горизонтальная проекция силы, растягивающей цепочку в любом месте. Несложно доказать, что она постоянна по длине цепочки. На этом положении основано составление дифференциального уравнения, решением которого будет цепная функция. Вертикальная же проекция растягивающей силы величина переменная. Она меняется от нуля в самой нижней точке цепочки до значения половины веса цепочки на её краях. Эти три физические величины (F, g и m_C) и будут определять значение параметра a, входящего в формулу цепной линии. Но во всех справочниках по математике – бумажных и электронных эту константу упорно считают безразмерной. Но она имеет не только сокращенную размерность пространства (метры), но и полную размерность, показанную на рис. 5, возвращающую физический смысл формулы цепной линии.

При решении дифференциального уравнения константы F, g и m_C для простоты были объединены в одну константу (параметр) a. Вот это та самая простота, которая, согласно пословице, оказалась хуже воровства!

Опираясь на вышесказанное, о котором образно говоря знает только «один процент от одного процента», можно создать еще тройку функций пользователя (рис. 6), которые помогут нам построить эпюру сил, действующих на отдельные точки цепи с грузом (рис. 7). Вот оно то знание, которое эквивалентно силе – см. второе название статьи. Конкретнее, не просто силе, а эпюре сил, растягивающих цепочку.

$$F_x(x) := \boldsymbol{g} \cdot m_c \cdot \textbf{if}\left(x < x_1, a_L, a_R\right)$$

$$F(x) := \frac{F_x(x)}{\cos\left(\operatorname{atan}\left(\textbf{if}\left(x < x_1, y'\left(x, a_L, x_{0L}\right), y'\left(x, a_R, x_{0R}\right)\right)\right)\right)}$$

$$F_y(x) := \sqrt{F(x)^2 - F_x(x)^2}$$

Рис. 6. «Силовые» функции пользователя

Функции на рис. 6 имеют одно ограничения – они ошибочно выдадут нулевые значения сил, если цепь невесома (третий график на рис. 1), а груз имеется. Но этот экстремальный случай, который мы не должны рассматривать. Ошибка может иметь место и в том случае, когда вес цепочки очень маленький по сравнению с весом груза. Эта ошибка связана с точностью численных расчетов, которые также называют и приближенными расчетами.

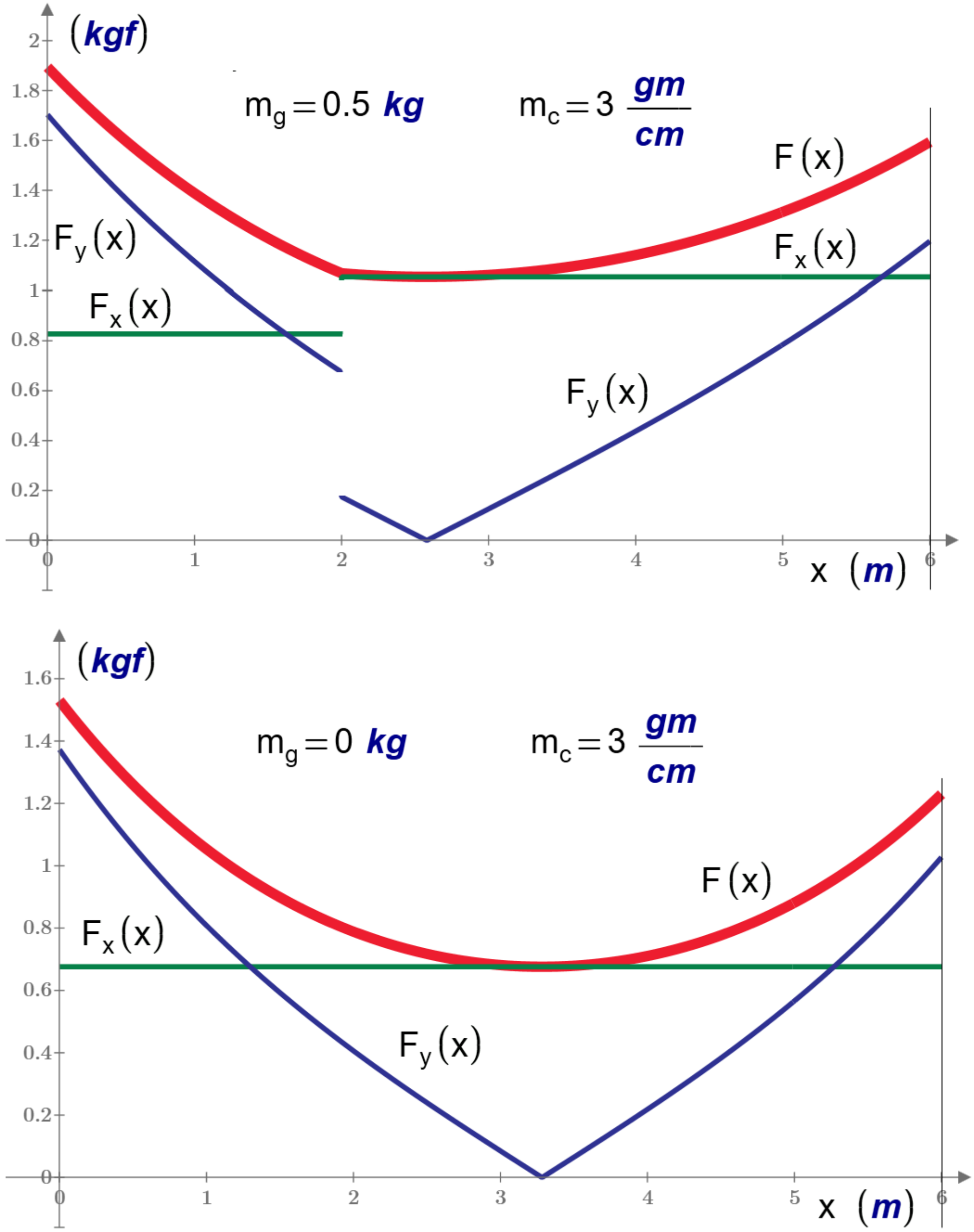

Рис. 7. Эпюра сил, действующих на подвешенную цепь с грузом

К цепи, кстати, можно вешать не только груз, но и своеобразный антигруз – см. рис 8 и 9, который отображает такую ситуацию. Через реку перекинут провод линии электропередачи (ЛЭП). По реке проплывает судно негабаритной высоты. Чтобы его пропустить, выключают напряжение, а провод временно приподнимают с помощью крана или вертолета.

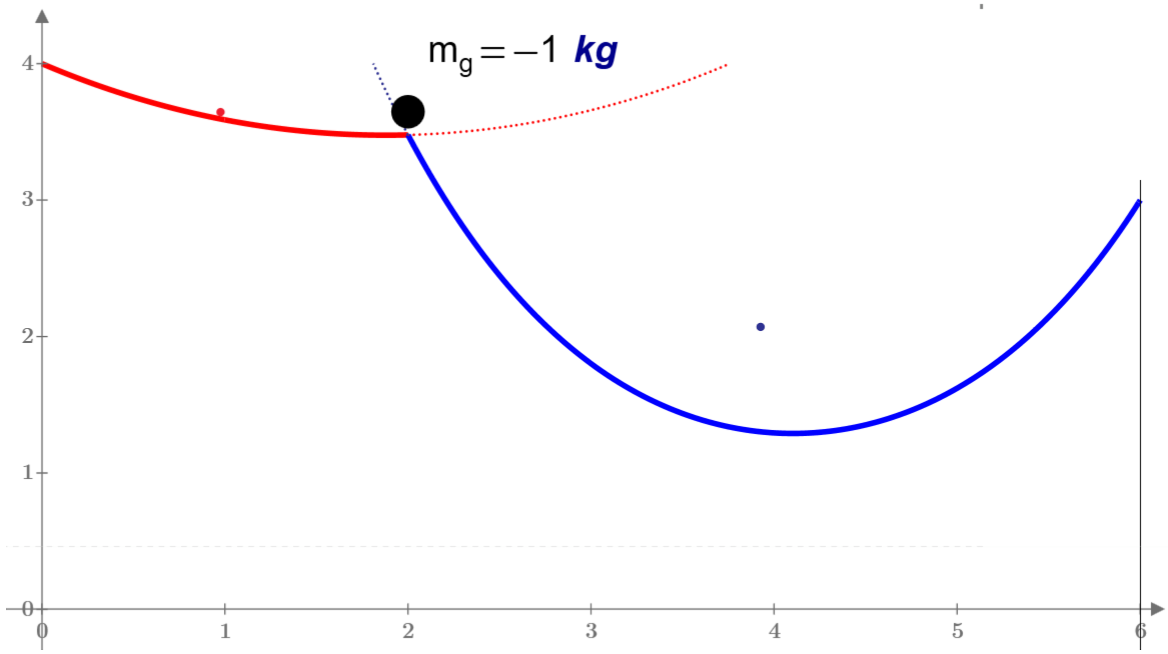

Рис. 8. Цепь с антигрузом

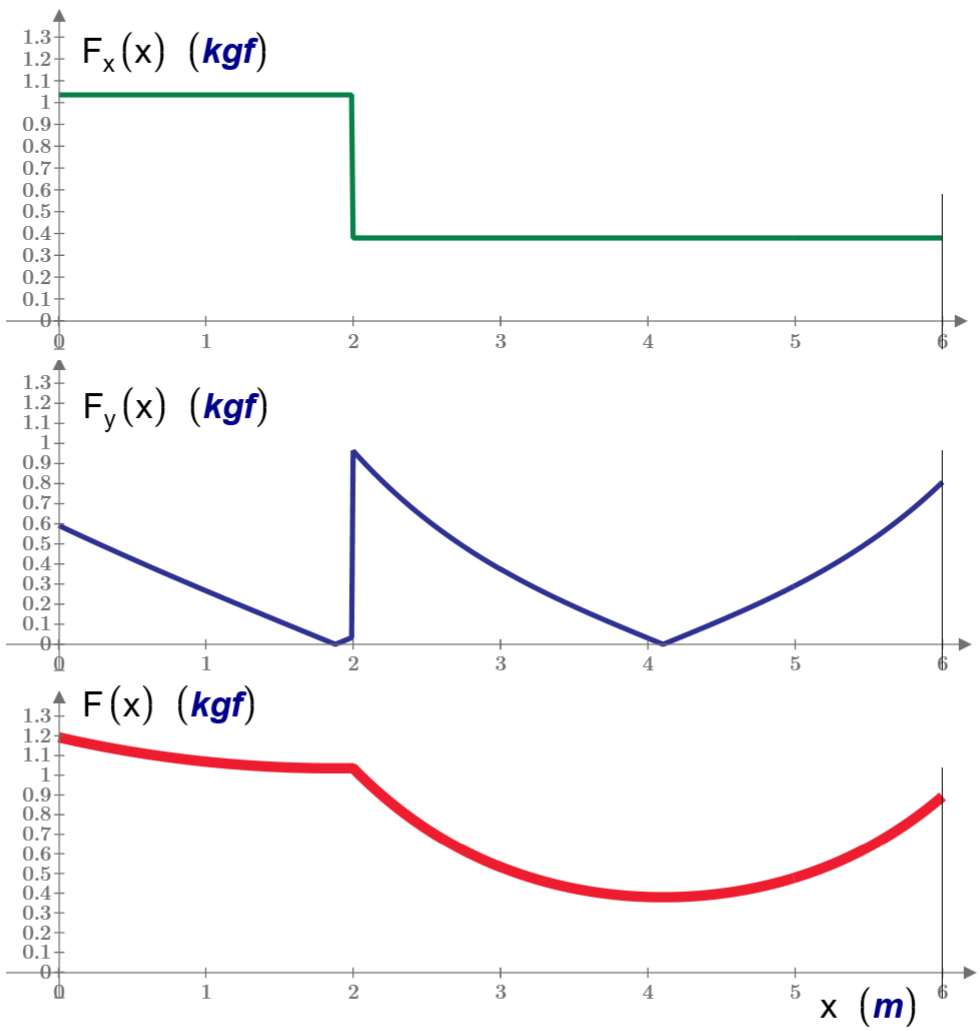

Рис. 7. Эпюра сил, действующих на подвешенную цепь с антигрузом

Напоследок можно упомянуть еще об одной особенности цепной линии, связанной с интересной константой – *цепное* π. Если цепь без груза подвесить концами на одинаковой высоте, то несложно найти отношение S/L, при котором сила F будет минимальной. Приближенное значение этой константы 1.258, и она связана с корнем уравнения $\coth(x)=x$ [3].

Литература.

1. Меркин Д. Р. Введение в механику гибкой нити. — М.: Наука, 1980 (https://dwg.ru/lib/1317).

2. Очков В.Ф., Богомолова Е.П., Мати Хейнлоо. Решатели или Великолепная семерка Mathcad // Открытое образование. № 3. 2015. С. 37–50 (http://www.twt.mpei.ac.ru/ochkov/Solvers-OE.pdf)

3. https://community.ptc.com/t5/PTC-Mathcad/Can-we-solve-it-symbolical/td-p/787902