

Автор д.т.н., профессор НИУ "МЭИ" Солодов А.П.

8 Нестационарная теплопроводность

8.1 Введение

Для оптимального управления пусковыми и переходными (т.е. *нестационарными*) режимами энергетических или теплотехнологических установок необходимо рассчитывать *нестационарные* температурные поля в элементах машин и оборудования. Прогнозирование температурного поля позволяет избежать недопустимого повышения температуры или возникновения слишком больших перепадов температуры. Характерным примером служит управление пуском мощной паровой турбины на тепловой электростанции. Естественное стремление оперативно ввести резервную энергетическую мощность наталкивается на ограничения – могут произойти недопустимые изменения осевых зазоров в проточной части турбины из-за неодинакового расширения или возникнуть недопустимые температурные напряжения в массивных деталях ротора и статора турбины.

Нестационарные задачи теплопроводности, связанные с расчетом времени нагрева или охлаждения различных объектов, оценкой скорости выравнивания температуры, определением количества аккумулируемой или отдаваемой теплоты, часто возникают в различных теплотехнологических процессах, при термической обработке материалов и т.д.

Математические модели для этого круга задач представляются дифференциальными уравнениями *в частных производных*, в отличие от ранее рассмотренных более простых одномерных стационарных задач, описываемых *обыкновенными* дифференциальными уравнениями. В данной главе предметом анализа будут классические линейные задачи теории теплопроводности для тел простой геометрии, допускающие аналитические решения.

8.2 Пластина

Рассмотрим процесс охлаждения пластины, первоначально нагретой до температуры t_0 , в среде с постоянной температурой t_f (Рис. 8.1).

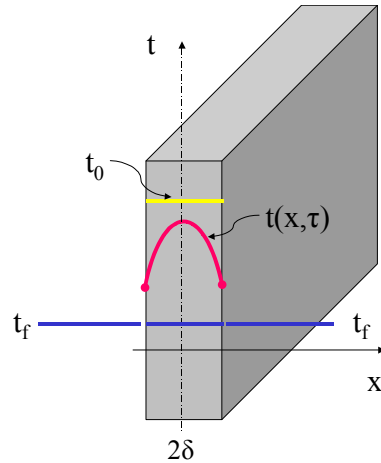


Рис. 8.1. Охлаждение пластины

Благодаря заранее принимаемой симметрии начального распределения и условий охлаждения относительно средней плоскости пластины, распределения температуры в различные моменты времени останутся симметричными. Ясно, что процесс охлаждения завершится установлением температуры на уровне окружающей среды.

Количественный анализ должен привести к некоторому конкретному выражению для температурного поля пластины:

$$t(x, \tau)$$

Эта запись предполагает, что температура зависит только от одной (поперечной) координаты x . В реальности поле будет одномерным,

- если пластина тонкая и, следовательно, можно пренебречь теплопроводом с ее торцов,
- если условия охлаждения не изменяются вдоль поверхностей пластины,
- если начальное распределение равномерное или по крайней мере одномерное, изменяющееся только вдоль координаты x .

При постановке задачи необходимо задать теплофизические свойства материала (коэффициент теплопроводности λ , плотность ρ , удельную теплоемкость c) и толщину пластины (2δ).

Условия охлаждения определим, указав значения коэффициента теплоотдачи α и температуры охлаждающей среды t_f .

Начальное тепловое состояние пластины охарактеризуем значением начальной температуры t_0 , одинаковым для всех точек пластины.

Имея в виду получение *аналитического* решения, упростим постановку задачи, полагая все указанные параметры постоянными величинами.

Математическая формулировка задачи

Дифференциальное уравнение теплопроводности для одномерной нестационарной задачи без внутренних источников теплоты и в предположении о постоянстве физических параметров записывается в следующем виде:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 t}{\partial x^2}; \quad a \equiv \frac{\lambda}{\rho c} \quad (8.1)$$

где a – коэффициент температуропроводности.

Благодаря симметрии, достаточно рассмотреть половину пластины, например, правую, заменив отброшенную левую половину формулировкой условия симметрии в виде граничного условия второго рода с нулевым тепловым потоком:

$$\left. \frac{\partial t}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 \quad (8.2)$$

Эту формулировку называют также условием адиабатичности поверхности. Для симметричной задачи центральная плоскость является, очевидно, адиабатической.

На правой поверхности ($x = \delta$) пластины происходит тепловое взаимодействие со средой, которое мы опишем граничным условием третьего рода:

$$-\lambda \left. \frac{\partial t}{\partial x} \right|_{x=\delta-0} = \alpha \cdot (t(x = \delta, \tau) - t_f). \quad (8.3)$$

В этом соотношении приравнены значения плотности теплового потока,

- подводимого изнутри тела к поверхности посредством теплопроводности и вычисляемого по закону Фурье (левая часть)
- отводимого в окружающую среду и вычисляемого по уравнению Ньютона–Рихмана (правая часть).

Начальное условие задает распределение температуры по толщине пластины для нулевого момента времени; в данном случае это равномерное распределение:

$$t(x, \tau = 0) = t_0 \quad (8.4)$$

Дифференциальное уравнение в частных производных (8.1) и краевые условия (8.2), (8.3) и (8.4) составляют математическое описание задачи об охлаждении пластины. Эти же уравнения описывают нагревание пластины, если задать температуру среды более высокой, чем начальная температура пластины.

Оценки порядка величин

Когда некоторая величина, например координата x , меняется в конкретной задаче в пределах $0 \div \delta$, говорят, что она порядка δ и записывают $O(x) = \delta$ (orde of value, англ.) или коротко $x \sim \delta$.

Температуру в рассматриваемой задаче удобно отсчитывать от уровня окружающей среды и называть поэтому избыточной температурой:

$$\vartheta(x, \tau) \equiv t(x, \tau) - t_f; \quad \vartheta_0 = t_0 - t_f \quad (8.5)$$

Очевидно, избыточная температура изменяется в пределах $0 \div \theta_0$.

Таким образом, в задаче об охлаждении пластины координата и избыточная температура есть величины порядка:

$$x \sim \delta; \quad \theta \sim \theta_0. \quad (8.6)$$

При оценке производной записывают отношение полного изменения функции к соответствующему интервалу изменения аргумента. Например:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial x} \sim \frac{\vartheta_0}{\delta}. \quad (8.7)$$

Условием применимости такой оценки является монотонность изменения функции на заданном интервале. Поэтому если рассматривается *периодическая* функция, то нужно разделить амплитуду на *период* изменения аргумента, но не на полный интервал наблюдения, который может составлять десятки и сотни периодов.

Иногда функция заметно изменяется на ограниченном отрезке, а затем остается почти постоянной, как это бывает при асимптотическом стремлении к стационарному состоянию. В таком случае следует взять отношение полного изменения функции к интервалу быстрого изменения. С такой ситуаций мы имеем дело при оценке временной производной в левой части дифференциального уравнения теплопроводности (8.1):

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} \sim \frac{\vartheta_0}{\tau_0}. \quad (8.8)$$

Здесь τ_0 – *оценочное* время установления теплового равновесия, неизвестная величина, которую мы надеемся определить из анализа дифференциального уравнения теплопроводности (8.1). Но это не тот очень большой промежуток времени, формально *бесконечно большой*, в течение которого избыточная температура будет *асимптотически* приближаться к нулевому значению.

При оценке второй производной исходят из того, что это производная от первой производной:

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} = \frac{\partial \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right)}{\partial x} \sim \frac{\vartheta_0}{\delta} \Rightarrow \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} \sim \frac{\vartheta_0}{\delta^2}. \quad (8.9)$$

Подставляя (8.8), (8.9) в (8.1), получают дифференциальное уравнение теплопроводности в символах порядка величин:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 t}{\partial x^2}; \quad \Rightarrow \quad \frac{\vartheta_0}{\tau_0} \sim a \frac{\vartheta_0}{\delta^2} \quad (8.10)$$

откуда следует оценка времени остывания пластины:

$$\tau_0 \sim \frac{\delta^2}{a} \quad (8.11)$$

Это замечательный результат: без решения сложной задачи интегрирования дифференциального уравнения в частных производных (8.1), а только с помощью элементарных операций получена приближенная оценка времени остывания по заданным значениям размера пластины (δ) и свойств материала (коэффициента теплопроводности a).

Соотношению (8.11) может быть придан более общий смысл. Это оценка времени τ_0 , в течение которого затухают (релаксируют) температурные возмущения с масштабом пространственной неоднородности δ . Мы видим, что *мелкомасштабные* неоднородности затухают существенно быстрее, чем *крупномасштабные*. Исходя из физического содержания дифференциального уравнения теплопроводности, это объясняется большими знакопеременными значениями *градиента температуры* для мелкомасштабных возмущений и, следовательно, большими значениями *тепловых потоков*, выравнивающих температурные неравномерности.

Важная информация получается из оценок граничного условия третьего рода (8.3) на поверхности пластины:

$$\lambda \frac{t(x=0, \tau) - t(x=\delta, \tau)}{\delta} \sim \alpha \cdot (t(x=\delta, \tau) - t_f). \quad (8.12)$$

Заменяя обозначения температур более наглядными, с индексами *centre* (центр пластины) и *surface* (поверхность пластины) и перегруппируя члены в (8.20), получим соотношение:

$$\frac{t_{centre} - t_{surface}}{t_{surface} - t_f} \sim \frac{\alpha \delta}{\lambda} \equiv \frac{\frac{\delta}{\lambda}}{\frac{1}{\alpha}} \equiv Bi, \quad (8.13)$$

согласно которому отношение перепада температур внутри пластины к перепаду снаружи определяется новым безразмерным параметром – числом Био Bi , равным отношению характерных термических сопротивлений. Рассматривая совместно оценки для дифференциального уравнения (см. (8.10), (8.11)) и для граничного условия (8.13), нетрудно видеть, что полученное значение для τ_0 справедливо, если $Bi \sim 1$ или $Bi \gg 1$. Подробнее о влиянии безразмерного параметра Bi см. пункт «Асимптотический анализ решения».

Математическое описание в безразмерной форме

Для координаты x полутолщина пластины δ служит естественным масштабом, с помощью которого получают нормированную, безразмерную координату X :

$$X \equiv \frac{x}{\delta}; \quad 0 \leq X \leq 1. \quad (8.14)$$

Для температуры сначала выбирают специальную точку отсчета – температуру окружающей среды и вводят избыточную температуру

$$\vartheta(x, \tau) \equiv t(x, \tau) - t_f, \quad (8.15)$$

а затем нормируют эту величину, относя ее к максимальному перепаду:

$$\vartheta_0 \equiv t_0 - t_f. \quad (8.16)$$

В результате вводится безразмерная избыточная температура:

$$\Theta \equiv \frac{\vartheta(x, \tau)}{\vartheta_0}. \quad (8.17)$$

Для независимой переменной – времени – нет непосредственно заданного характерного масштаба, как это имеет место для пространственной координаты (δ) или для избыточной температуры (θ_0). Однако такой масштаб диктуется дифференциальным уравнением теплопроводности при его приведении к безразмерному виду.

Произведем замену переменных в (8.1) по формулам (8.14), (8.17):

$$\begin{aligned} \frac{\vartheta_0 \partial \left(\frac{\vartheta}{\vartheta_0} \right)}{\partial \tau} &= \frac{a}{\delta^2} \frac{\vartheta_0 \partial^2 \left(\frac{\vartheta}{\vartheta_0} \right)}{\partial \left(\frac{x}{\delta} \right) \partial \left(\frac{x}{\delta} \right)} \Rightarrow \frac{\partial \Theta}{\partial \tau} = \frac{1}{\left(\frac{\delta^2}{a} \right)} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial X^2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{\partial \Theta}{\partial \left(\frac{\tau}{\left(\frac{\delta^2}{a} \right)} \right)} = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial X^2} \end{aligned} \quad (8.18)$$

Ясно, что время τ , сек, и постоянная δ^2/a , сек, должны быть скомбинированы с образованием *безразмерного времени*, называемого числом Фурье Fo :

$$Fo \equiv \frac{\tau}{\left(\frac{\delta^2}{a}\right)} \quad (8.19)$$

Величина δ^2/a , сек, является «внутренним» масштабом времени, не заданным непосредственно в списке определяющих параметров, но получающимся при анализе математической формулировки задачи. Полезно сопоставить этот результат с соотношением (8.11), полученным при оценках порядка величин.

В безразмерных переменных дифференциальное уравнение теплопроводности для задачи об охлаждении пластины запишется в следующем виде:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial Fo} = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial X^2}. \quad (8.20)$$

Граничное условие (8.2) переписется в безразмерной форме как

$$\left. \frac{\partial \Theta}{\partial X} \right|_{X=0} = 0. \quad (8.21)$$

Граничное условие (8.3) на поверхности пластины преобразуется следующим образом:

$$\begin{aligned} -\lambda \frac{\vartheta_0 \partial \left(\frac{\vartheta}{\vartheta_0} \right)}{\delta \partial \left(\frac{x}{\delta} \right)} \Bigg|_{X=1} &= \alpha \vartheta_0 \frac{\vartheta(x=\delta, \tau)}{\vartheta_0} \Rightarrow \\ -\frac{\lambda}{\delta} \frac{\partial \Theta}{\partial X} \Bigg|_{X=1} &= \alpha \Theta(X=1, Fo) \Rightarrow -\frac{\partial \Theta}{\partial X} \Bigg|_{X=1} = \left(\frac{\alpha \delta}{\lambda} \right) \cdot \Theta(X=1, Fo) \end{aligned} \quad (8.22)$$

Размерные величины α , δ и λ составляют безразмерный комплекс – число Био Bi :

$$Bi \equiv \frac{\alpha \delta}{\lambda} \equiv \frac{\frac{\delta}{\lambda}}{\frac{1}{\alpha}} \quad (8.23)$$

Число Био является заданным параметром и характеризует отношение внутреннего термического сопротивления теплопроводности к внешнему термическому сопротивлению теплоотдачи. Подчеркнем, что параметр Bi появляется при анализе граничного условия третьего рода, физическое

содержание которого раскрыто выше в комментарии к уравнению (8.3). Безразмерная форма граничного условия (8.3), как следует из (8.22) и (8.23), есть

$$-\left. \frac{\partial \Theta}{\partial X} \right|_{X=1} = \text{Bi} \cdot \Theta(X=1, \text{Fo}). \quad (8.24)$$

Начальное условие (8.4) в безразмерной виде записывается следующим образом:

$$\Theta(X, \text{Fo} = 0) = 1. \quad (8.25)$$

Соберем вместе безразмерные соотношения, составляющие математическое описание задачи об охлаждении пластины:

Дифференциальное уравнение теплопроводности:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \text{Fo}} = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial X^2}. \quad (8.20)$$

Граничное условие симметрии на центральной плоскости пластины:

$$\left. \frac{\partial \Theta}{\partial X} \right|_{X=0} = 0. \quad (8.21)$$

Граничное условие третьего рода на поверхности:

$$-\left. \frac{\partial \Theta}{\partial X} \right|_{X=1} = \text{Bi} \cdot \Theta(X=1, \text{Fo}). \quad (8.24)$$

Начальное условие:

$$\Theta(X, \text{Fo} = 0) = 1. \quad (8.25)$$

Искомое решение Θ является функцией от независимых переменных – координаты X и времени Fo , а также от числового параметра Bi :

$$\Theta(X, \text{Fo}; \text{Bi}). \quad (8.26)$$

Решение методом разделения переменных

Решение линейного однородного дифференциального уравнения в частных производных (8.20) можно искать в виде произведения двух функций, каждая из которых зависит только от одной независимой переменной:

$$\Theta(X, \text{Fo}) = \Psi(X) \cdot \Phi(\text{Fo}). \quad (8.27)$$

При подстановке предполагаемого решения (8.27) в дифференциальное уравнение (8.20) получают:

$$\Psi(X)\Phi_{Fo}(Fo) = \Phi(Fo)\Psi_{XX}(X), \quad (8.28)$$

где символьные индексы означают дифференцирование по времени Fo (в левой части) и двукратное дифференцирование по координате X . Поделив обе части (8.28) на произведение $\Psi\Phi$, получают следующее уравнение с *разделенными переменными*:

$$\frac{\Phi_{Fo}(Fo)}{\Phi(Fo)} = \frac{\Psi_{XX}(X)}{\Psi(X)}. \quad (8.29)$$

Поскольку левая часть уравнения (8.29) зависит только от переменной Fo , а правая часть – только от X , то равенство обеих частей возможно, только если каждая из них есть константа:

$$\frac{\Phi_{Fo}(Fo)}{\Phi(Fo)} = \frac{\Psi_{XX}(X)}{\Psi(X)} = -\varepsilon^2, \quad (8.30)$$

которую мы обозначили как существенно отрицательную величину ($-\varepsilon^2$), поскольку избыточная температура в задаче об охлаждении (нагревании) пластины убывает, стремясь к нулю.

Соотношение (8.30) с разделенными переменными можно записать как два обыкновенных дифференциальных уравнения:

$$\frac{\Phi_{Fo}(Fo)}{\Phi(Fo)} = -\varepsilon^2 \Rightarrow \Phi_{Fo}(Fo) = -\varepsilon^2 \Phi(Fo) \quad (8.31)$$

$$\frac{\Psi_{XX}(X)}{\Psi(X)} = -\varepsilon^2 \Rightarrow \Psi_{XX}(X) = -\varepsilon^2 \Psi(X). \quad (8.32)$$

Таким образом, исходное уравнение в частных производных (8.20) расщепляется на два обыкновенных дифференциальных уравнения: (8.31) – относительно времени Fo и (8.32) – относительно координаты X .

Оба уравнения классифицируются как линейные однородные с постоянными коэффициентами. Решения каждого такого уравнения отыскивают, составляя характеристическое уравнение, соответственно для (8.31):

$$k^1 = -\varepsilon^2 k^0 \Rightarrow k = -\varepsilon^2 \quad (8.33)$$

и для (8.32):

$$k^2 = -\varepsilon^2 k^0 \Rightarrow k_{1,2} = \pm\varepsilon\sqrt{-1}. \quad (8.34)$$

Согласно известному правилу, если корни действительные, то решения – это экспоненты, а если мнимые – то синусы и косинусы. Для дифференциального уравнения (8.31) получают:

$$\Phi(F_0) = C_1 \exp(-\varepsilon^2 \cdot F_0), \quad (8.35)$$

а для (8.32):

$$\Psi(X) = C_2 \cos(\varepsilon X) + C_3 \sin(\varepsilon X). \quad (8.36)$$

Подстановка в (8.27) дает решение исходного дифференциального уравнения в частных производных (8.20):

$$\Theta(X, F_0) = (C_2 \cos(\varepsilon X) + C_3 \sin(\varepsilon X)) \cdot (C_1 \exp(-\varepsilon^2 \cdot F_0)). \quad (8.37)$$

Произвольные константы интегрирования C и ε должны быть найдены при подстановке решений (8.37) в выражения для краевых условий. Заметим, что благодаря *линейности* дифференциального уравнения (8.20) *сумма решений* вида (8.37) с различными наборами произвольных пока констант также будет решением (8.20). Это проявление *принципа суперпозиции* для линейных систем.

Определение констант интегрирования

Условие симметрии

Можно избежать формальных подстановок, сразу заметив, что для представления симметричного решения, т.е. для *четной* функции Θ , нечетные функции \sin не годятся. Поэтому должно быть $C_3 = 0$; объединяя константы C_1 и C_2 , получим:

$$\Theta(X, F_0) = A \cdot \cos(\varepsilon X) \cdot \exp(-\varepsilon^2 \cdot F_0). \quad (8.38)$$

Граничное условие третьего рода на поверхности

Подстановка решения (8.38) в граничное условие (8.24) приводит к следующему результату:

$$\begin{aligned} A \cdot \varepsilon \cdot \sin(\varepsilon) \cdot \exp(-\varepsilon^2 \cdot F_0) &= Bi \cdot A \cdot \cos(\varepsilon) \cdot \exp(-\varepsilon^2 \cdot F_0) \Rightarrow \\ \Rightarrow \varepsilon \cdot \sin(\varepsilon) &= Bi \cdot \cos(\varepsilon) \end{aligned}$$

или

$$\frac{\varepsilon}{Bi} = \operatorname{ctg}(\varepsilon). \quad (8.39)$$

Получившееся трансцендентное уравнение определяет собственные числа ε как функцию от числового параметра Bi (числа Био). Графически решение представлено на Рис. 8.2.

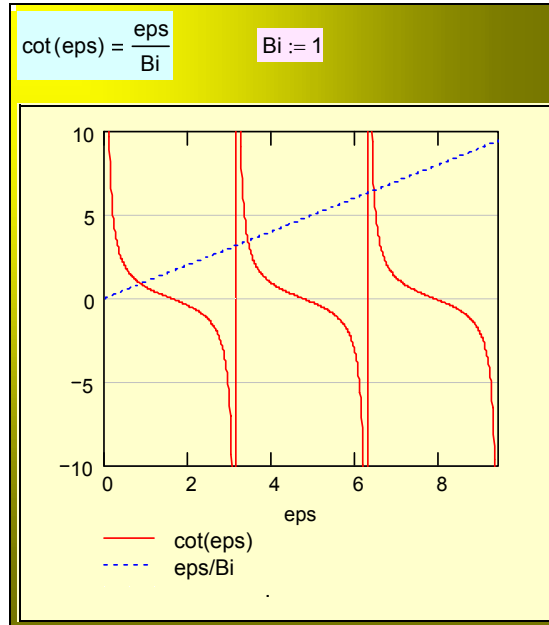


Рис. 8.2. Решение трансцендентного уравнения (8.39) для определения собственных чисел задачи

Имеется бесконечное множество значений ε , удовлетворяющих уравнению (8.39). Мы пронумеруем их индексами i , $i = 1 \div \infty$ в порядке возрастания:

$$\varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \varepsilon_3 < \varepsilon_4 < \dots \quad (8.40)$$

В предельных случаях $Bi \rightarrow 0$ и $Bi \rightarrow \infty$ последовательности чисел ε будут такими (см. построения на Рис. 8.2):

Таблица 8-1

	1	2	3	4	5	6
$Bi \rightarrow 0$	0	π	2π	3π	4π	5π
...
$Bi \rightarrow \infty$	$\pi/2$	$3\pi/2$	$5\pi/2$	$7\pi/2$	$9\pi/2$	$11\pi/2$

Численное решение (8.39) для определения ε с необходимой для практических расчетов точностью приведено ниже (см. Рис. 8.6).

Итак, на данном этапе получен набор решений

$$\Theta_i(X, Fo) = A_i \cdot \cos(\varepsilon_i X) \cdot \exp(-\varepsilon_i^2 \cdot Fo), \quad (8.41)$$

удовлетворяющих дифференциальному уравнению и граничным условиям. Значения констант ε определяются уравнением (8.39). Константы A остаются пока неопределенными величинами.

Начальное условие

Равномерное распределение температуры, заданное начальным условием (8.25) для момента времени, не может быть удовлетворено никаким отдельно взятым косинусоидальным решением вида (8.41) (за исключением асимптотического случая $Bi \rightarrow 0$, см. ниже). Однако можно воспользоваться суперпозицией решений (8.41) для начального момента времени $Fo = 0$ и построить разложение начального распределения (8.25), т.е. единичной функции в нашей задаче, в ряд Фурье на отрезке $0 \div 1$:

$$\Theta(X, Fo = 0) = 1 = \sum_{i=1}^{\infty} A_i \cdot \cos(\varepsilon_i X). \quad (8.42)$$

Поясним, что экспоненциальные множители $\exp(-\varepsilon_i^2 Fo)$ в (8.41) обращаются в 1 при $Fo = 0$.

Коэффициенты разложения Фурье A_i легко определяются благодаря свойству ортогональности системы функций $\cos(\varepsilon_i X)$, т.е.:

$$\int_0^1 \cos(\varepsilon_m X) \cos(\varepsilon_n X) dX \begin{cases} = 0 & \text{if } m \neq n \\ \neq 0 & \text{if } m = n \end{cases}. \quad (8.43)$$

Это свойство нетрудно проверить в пакете Mathcad в режиме символьных вычислений (аналитических преобразований), как показано на Рис. 8.3. Подстановки (substitute) взяты из уравнения (8.39).

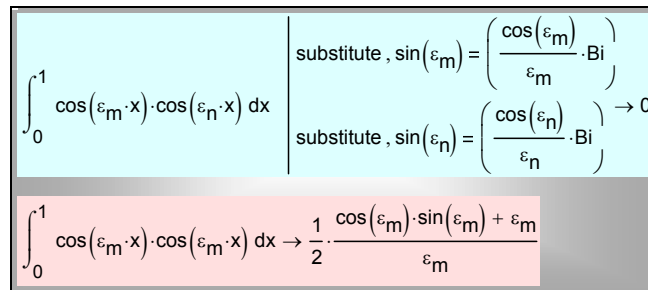


Рис. 8.3. Ортогональность функций: иллюстрация в Mathcad

Для вычисления коэффициента A с заданным номером m необходимо умножить обе части (8.42) на $\cos(\varepsilon_m X)$ и проинтегрировать:

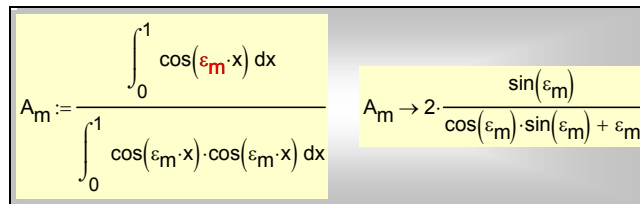
$$\begin{aligned} \int_0^1 1 \cdot \cos(\varepsilon_m X) dX &= \sum_{i=1}^{\infty} A_i \cdot \int_0^1 \cos(\varepsilon_m X) \cdot \cos(\varepsilon_i X) dX \Rightarrow \\ \Rightarrow \int_0^1 1 \cdot \cos(\varepsilon_m X) dX &= A_m \int_0^1 \cos(\varepsilon_m X) \cdot \cos(\varepsilon_m X) dX \end{aligned} \quad (8.44)$$

Мы сохранили множитель «1» в левой части с целью показать, что при другом (но по-прежнему симметричном) начальном распределении температуры на этом месте будет располагаться соответствующая, не обязательно единичная функция.

Благодаря свойству ортогональности (8.43), все члены ряда в правой части (8.44) с номерами $i \neq m$ обращаются в ноль, и для коэффициентов A_m получается следующая формула:

$$A_m = \frac{\int_0^1 1 \cdot \cos(\varepsilon_m X) dX}{\int_0^1 \cos(\varepsilon_m X) \cdot \cos(\varepsilon_m X) dX} = \frac{2 \sin(\varepsilon_m)}{\varepsilon_m + \sin(\varepsilon_m) \cos(\varepsilon_m)}. \quad (8.45)$$

Эти выкладки продублированы в пакете Mathcad в режиме символьных (аналитических) преобразований, как показано на Рис. 8.4.



$$A_m := \frac{\int_0^1 \cos(\varepsilon_m \cdot x) dx}{\int_0^1 \cos(\varepsilon_m \cdot x) \cdot \cos(\varepsilon_m \cdot x) dx}$$

$$A_m \rightarrow 2 \cdot \frac{\sin(\varepsilon_m)}{\cos(\varepsilon_m) \cdot \sin(\varepsilon_m) + \varepsilon_m}$$

Рис. 8.4. Вычисление коэффициентов A в Mathcad

Результаты решения

Окончательно, решение задачи об охлаждении пластины представляется соотношениями:

$$\Theta(X, Fo; Bi) = \sum_{i=1}^{\infty} A_i \cdot \cos(\varepsilon_i X) \cdot \exp(-\varepsilon_i^2 \cdot Fo);$$

$$A_i = \frac{2 \sin(\varepsilon_i)}{\varepsilon_i + \sin(\varepsilon_i) \cos(\varepsilon_i)}; \quad (8.46)$$

$$\frac{\varepsilon_i}{Bi} = \text{ctg}(\varepsilon_i).$$

Как организовать вычисления по этим формулам, показано в Mathcad-программе на Рис. 8.6. Собственные числа задачи представлены как функция $\varepsilon(Bi, i)$ от числа Био и номера i . Решение уравнения (8.39) производится посредством встроенной функции root, два последних аргумента которой задают левую и правую границы отрезка, где отыскивается корень. Далее вычисляются коэффициенты A и безразмерная избыточная температура Θ . В список аргументов функции Θ включено число удерживаемых в разложении

членов ряда $Nser$. Это важный параметр при практических расчетах. При *малых* значениях числа Fo , т.е. безразмерного времени охлаждения, сходимость ряда очень медленная. Поэтому могут потребоваться десятки членов ряда, чтобы обеспечить нужную точность. Возможно, лучшим решением в этом случае будет переход к специальным, *асимптотическим* решениям.

```

ε(Bi, N) := γ ← 10-12
           for i ∈ 1.. N
             εi ← root [cot(eps) -  $\frac{eps}{Bi}$ , eps, (i - 1)·π + γ, i·π - γ]
           ε

Θ(X, Fo, Bi, Nser) := ε ← ε(Bi, Nser)
                    A ←  $\frac{2 \cdot \sin(\epsilon)}{\epsilon + \sin(\epsilon) \cdot \cos(\epsilon)}$ 
                     $\sum_{i=1}^{Nser} A_i \cdot \cos(\epsilon_i \cdot X) \cdot \exp[-(\epsilon_i)^2 \cdot Fo]$ 

```

Рис. 8.5. Mathcad-программа для расчета температурного поля при охлаждении (нагревании) пластины (аналитическое решение)

В справочных пособиях приводятся таблицы собственных чисел ϵ , чтобы упростить «ручные» вычисления температурного поля пластины. Фрагмент Mathcad-программы на Рис. 8.6 показывает, как можно построить такую или еще более подробную таблицу с помощью функции $\epsilon(Bi, N)$ из фрагмента программы на Рис. 8.5.

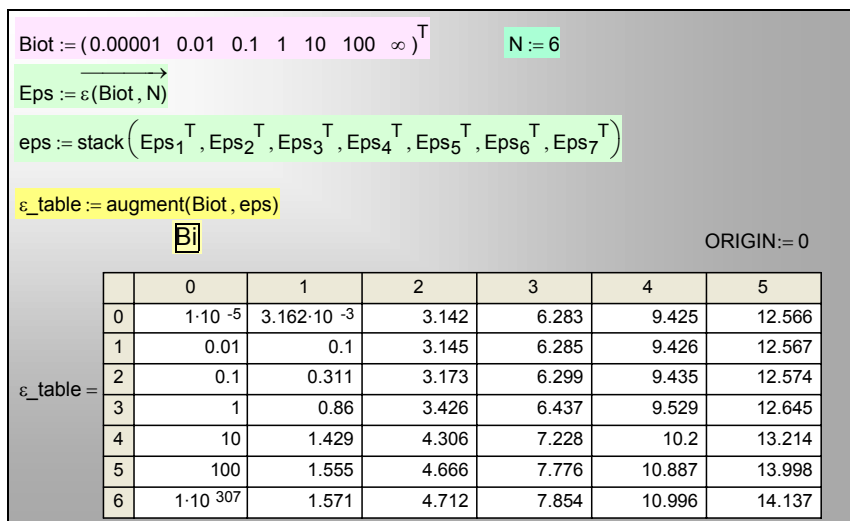


Рис. 8.6. Вычисление и табличное представление собственных чисел для задачи об охлаждении пластины (столбец с номером 0 – значения числа Био, столбцы с номерами 1..5 – числа $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots$)

Результаты расчета температурного поля пластины по аналитическим решениям (8.46) при значении параметра Био, равном 1, показаны на Рис. 8.7 как серия распределений по толщине пластины для различных моментов времени. Отметим ряд важных особенностей решения.

- Видно, что почти полное охлаждение и выравнивание температуры потребовало промежутка времени в несколько единиц числа Fo – безразмерного времени. Соответствующее физическое время (в единицах времени, например, секундах) можно получить из формулы (8.19).
- На начальной стадии (при $Fo = 0.01$ на Рис. 8.7) охлаждение затронуло только узкую приповерхностную зону, называемую *температурным пограничным слоем*, а в центральной части температура осталась еще неизменной (единичной в безразмерном выражении, или равной t_0 в градусах столбчатой шкалы). Только по прошествии времени $Fo \approx 0.1$ утолщающиеся пограничные слои смыкаются в центре и охлаждение становится заметным по всей толщине пластины.
- Скорость охлаждения убывает со временем, что объясняется уменьшением перепада температур, под действием которого теплота отводится в окружающую среду.
- Перепады температур *внутри* пластины «середина пластины – поверхность» и *снаружи* «поверхность – окружающая среда» соизмеримы, что определяется значением параметра Био: $Bi = 1$ (см. соотношения (8.13)).

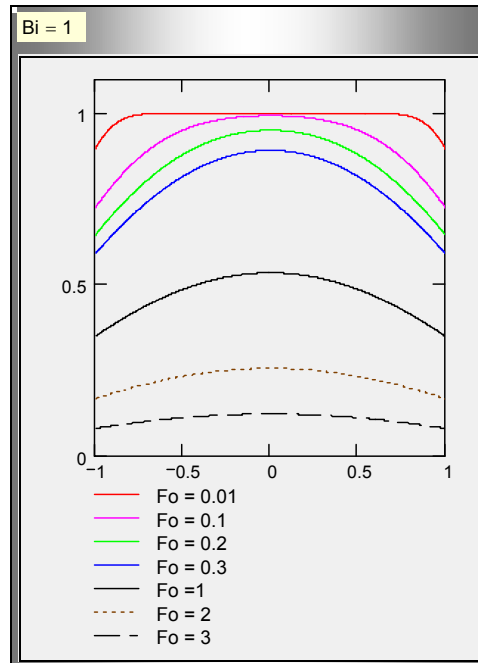


Рис. 8.7. Нестационарное температурное поле пластины при $Bi = 1$

Асимптотический анализ решения

Поведение решения при больших значениях времени

Для каждого члена ряда (8.46) (см. также (8.41)) зависимость от времени определяется экспоненциальными множителями $\exp(-\varepsilon_i^2 Fo)$. При этом собственные числа ε_i образуют возрастающую последовательность чисел (8.40). Следовательно, чем больше номер i члена ряда, тем быстрее убывание во времени, как показано на Рис. 8.8.

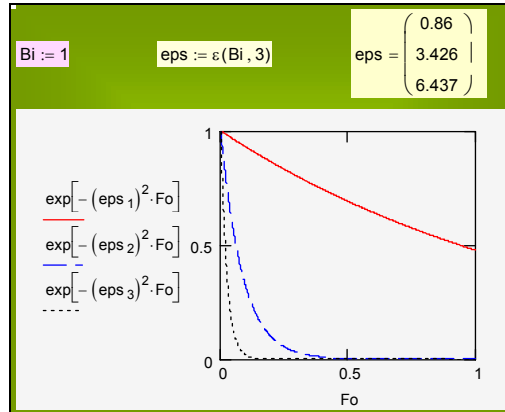


Рис. 8.8. Экспоненциальные множители для 1-го, 2-го, 3-го членов ряда (8.46) при $Bi = 1$

С приемлемой для большинства инженерных расчетов точностью, можно сохранить в разложении только первый член ряда для *больших значений времени* $Fo \geq 0.3$ и записать вместо (8.46):

$$\Theta(X, Fo; Bi) \Big|_{Fo \geq 0.3} \cong A_1 \cdot \cos(\varepsilon_1 X) \cdot \exp(-\varepsilon_1^2 \cdot Fo);$$

$$A_1 = \frac{2 \sin(\varepsilon_1)}{\varepsilon_1 + \sin(\varepsilon_1) \cos(\varepsilon_1)}; \quad (8.47)$$

$$\frac{\varepsilon_1}{Bi} = \text{ctg}(\varepsilon_1).$$

Получившееся простое предельное решение для больших значений времени характерно тем, что избыточная температура во всех точках пластины убывает во времени по единому *экспоненциальному* закону $\Theta \sim \exp(-\varepsilon_1^2 Fo)$, а распределение по толщине пластины описывается косинусоидой $\Theta \sim \cos(\varepsilon_1 X)$ (см. Рис. 8.7, кривые для $Fo \geq 0.3$). Простые формулы (8.47) находят важное применение как теоретическая основа для экспериментальных методов измерения теплофизических свойств веществ (т.н. метод регулярного режима).

Поведение решения при больших Bi

Пользуясь Mathcad-программой (Рис. 8.5), мы можем провести математический эксперимент, чтобы исследовать влияние параметра Bi на процесс охлаждения (нагрева) пластины.

Результаты расчета при больших значениях числа Био, $Bi \gg 1$, показаны на Рис. 8.9. Главная непосредственно наблюдаемая особенность температурного поля – резкое падение температуры поверхности до температуры окружающей среды в самом начале процесса охлаждения и затем постепенное остывание середины пластины.

Объяснение этого эффекта дается ранее полученным соотношением (8.13). При больших Bi внутреннее термическое сопротивление теплопроводности δ/λ намного больше внешнего $1/\alpha$, поэтому и перепад температуры внутри пластины намного больше разности температур между поверхностью и окружающей средой. В таких случаях говорят об остывании *термически толстых* объектов. Образом этой задачи может быть остывание очень толстой бетонной стены (толщина δ велика, теплопроводность λ мала) при интенсивном внешнем охлаждении в скоростном потоке среды (коэффициент теплоотдачи α велик).

Так как при больших Bi (при относительно больших α) температура поверхности сразу становится равной самому низкому значению – температуре охлаждающей среды, то достигается наибольшая возможная скорость охлаждения, которая определяется исключительно «внутренними» свойствами объекта: размером (толщиной) пластины и ее теплофизическими свойствами.

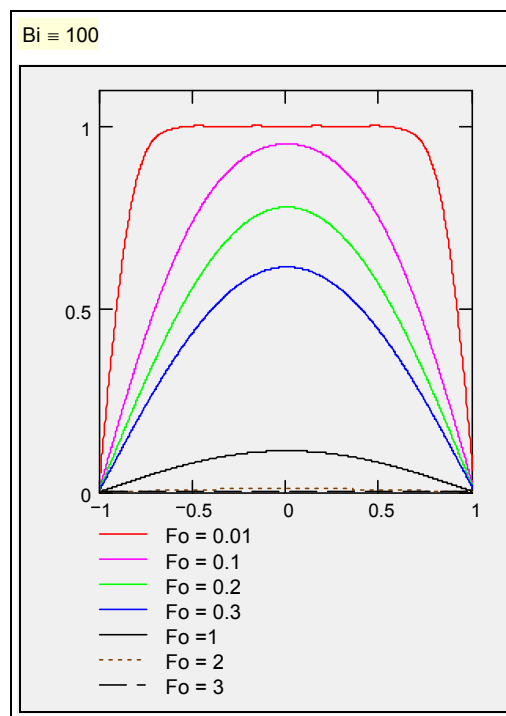


Рис. 8.9. Охлаждение пластины при больших Bi , $Bi \gg 1$

Аналитическое представление для случая больших Bi получают, подставляя предельные значения собственных чисел ϵ из таблицы Таблица

8-1 в общие формулы (8.46). Выпишем результат, принимая дополнительно условие $Fo \geq 0.3$:

$$\Theta(X, Fo; Bi) \cong \frac{4}{\pi} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} X\right) \cdot \exp\left(-\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \cdot Fo\right) \quad (8.48)$$

$Fo \geq 0.3$
 $Bi \gg 1$

Формула (8.48) служит теоретической основой экспериментального определения коэффициента теплопроводности методом регулярного режима. Перепишем ее в размерном виде, прологарифмируем и затем продифференцируем по времени:

$$\begin{aligned} \vartheta(x, \tau) &\cong \frac{4}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{2} \frac{x}{\delta}\right) \cdot \exp\left(-\frac{\pi^2}{4} \frac{a}{\delta^2} \tau\right) \Rightarrow \\ \Rightarrow m &\equiv \frac{1}{\vartheta} \frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} = -\left(\frac{\pi^2}{4} \frac{1}{\delta^2}\right) a \end{aligned} \quad (8.49)$$

Результат формулируется следующим образом: относительная скорость охлаждения пропорциональна коэффициенту теплопроводности a материала пластины. Относительную скорость охлаждения m (часто говорят, *температура охлаждения*) нетрудно определить в эксперименте, измеряя термопарой избыточную температуру во времени. Подчеркнем, что такой эксперимент следует проводить, обеспечив соотношение $Bi \gg 1$.

Поведение решения при малых числах Био

Результаты расчета по Mathcad-программе (Рис. 8.5) при малых значениях числа Био, $Bi \ll 1$, показаны на Рис. 8.10. Главная особенность температурного поля – практически равномерное распределение температуры по толщине пластины для любого фиксированного момента времени. Кроме того, следует отметить большую длительность процесса охлаждения, измеряемого в единицах безразмерного времени Fo .

При малых Bi *внутреннее* термическое сопротивление теплопроводности δ/λ намного меньше *внешнего* $1/a$, поэтому перепад температуры внутри пластины намного меньше разности температур между поверхностью и окружающей средой (см. соотношение (8.13)). В таких случаях говорят об остывании *термически тонких* объектов. Подходящим примером является остывание тонкой медной пластины (фольги) (толщина δ мала, теплопроводность λ велика) в спокойной воздушной атмосфере (коэффициент теплоотдачи a мал).

Поскольку при $Bi \ll 1$ внутреннее термическое сопротивление пренебрежимо мало, скорость охлаждения контролируется (относительно малыми) значениями коэффициента теплоотдачи.

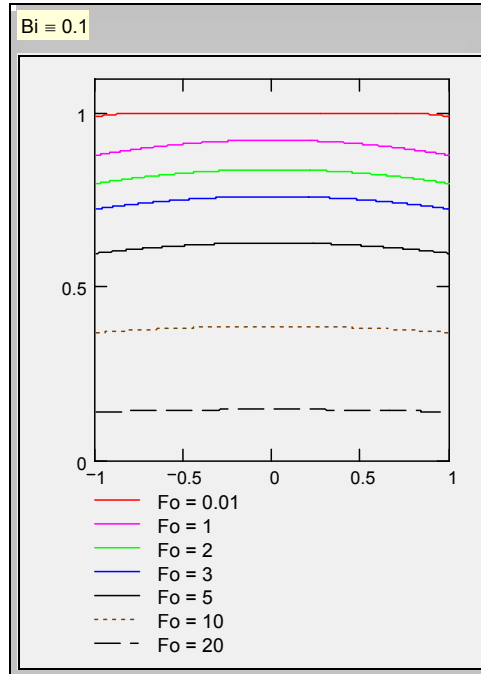


Рис. 8.10. Охлаждение пластины при малых Bi , $Bi \ll 1$

Аналитическое представление для случая малых Био получают, подставляя предельные значения собственных чисел ε из таблицы Таблица 8-1 в общие формулы (8.46). Очевидно, коэффициенты A_i , начиная со второго, обращаются в ноль, а при вычислении первого коэффициента возникает неопределенность, которая раскрывается как показывает фрагмент символьных вычислений в Mathcad:

$$A_1 := \frac{2 \cdot \sin(\varepsilon_1)}{\varepsilon_1 + \sin(\varepsilon_1) \cdot \cos(\varepsilon_1)} \quad \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} A_1 \rightarrow 1 \quad (8.50)$$

В следующем блоке преобразуется характеристическое уравнение (8.39) с учетом $Bi \rightarrow 0$, $\varepsilon_1 \rightarrow 0$:

$$\varepsilon_1 \cdot \tan(\varepsilon_1) = Bi \quad \varepsilon_1 \cdot \tan(\varepsilon_1) \text{ series, } \varepsilon_1, 3 \rightarrow 1 \cdot \varepsilon_1^2 \quad (8.51)$$

где *series* – оператор Mathcad разложения в ряд вблизи нуля. В результате получаются асимптотические представления:

$$Bi \rightarrow 0: \quad \varepsilon_1^2 = Bi; \quad \varepsilon_1 = \sqrt{Bi}, \quad (8.52)$$

а общие формулы (8.46) для температурного поля переписываются в следующем образом:

$$\Theta(X, Fo; Bi) \Big|_{Bi \ll 1} \cong \exp(-Bi \cdot Fo);$$

$$Bi \cdot Fo \cong \frac{\alpha \delta}{\lambda} \frac{a\tau}{\delta^2} \cong \frac{\alpha \delta}{\lambda} \frac{\lambda \tau}{\rho c_p \delta^2} \cong \frac{\tau}{\left(\frac{\rho c_p \delta}{\alpha} \right)}. \quad (8.53)$$

Таким образом, в пределе $Bi \rightarrow 0$ скорость охлаждения перестает зависеть от коэффициента теплопроводности материала, а определяется теплоемкостью, плотностью, размерами объекта и значением коэффициента теплоотдачи на его поверхности.

Замечание о представлении решения в виде ряда

Выше мы констатировали тот факт, что собственные числа образуют возрастающую последовательность (8.40) и что благодаря этому старшие по номеру члены ряда (8.46) затухают во времени существенно быстрее, чем младшие (см. Рис. 8.8). Однако физическое содержание этого явления осталось необъясненным.

На первом шаге мы должны в явной форме указать, *чем* различаются частные температурные распределения, соответствующие отдельным членам ряда. Из вида гармонических множителей $\cos(\epsilon_i X)$ следует, что ϵ_i есть *частота* гармоник пространственного распределения. Поэтому старшие по номеру члены ряда – это пространственные гармоники с все большей частотой и с все *меньшей длиной волны*.

Теперь можно переформулировать эффект затухания следующим образом: *мелкомасштабные* неоднородности температурного поля затухают во времени существенно быстрее чем *крупномасштабные*. Объяснение этому эффекту следует искать в дифференциальном уравнении теплопроводности (8.1). Главный результат уже получен при оценках порядка величин и выражен формулой (8.11), согласно которой время затухания (релаксации) пропорционально квадрату пространственного масштаба (см. также комментарий к формуле (8.11)).

Располагая вычислительной программой (Рис. 8.5), можно поэкспериментировать с разложениями, содержащими различное число членов ряда, и проследить за поведением частных решений во времени. К самой программе можно перейти по ссылке:

[..\Mathcad_HMT\8_Nonstat_HeatCond\Plate_Transient_Analyt_1.mcd](#)

$Fo := 0.001$

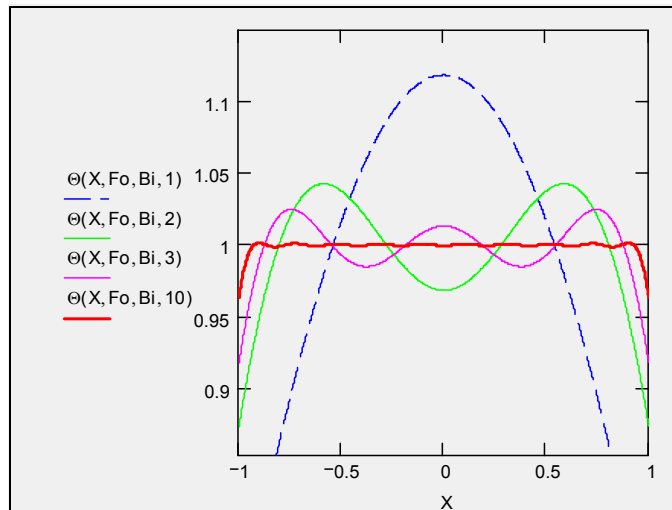


Рис. 8.11. Распределение температуры, рассчитанное по разложениям с одним, двумя, тремя и десятью членами ряда

Результаты можно увидеть на Рис. 8.11 и анимациях:

[..\Mathcad_HMT\8_Nonstat_HeatCond\Plate_Trans_Analyt.avi](#)

[..\Mathcad_HMT\8_Nonstat_HeatCond\Plate_Harmonics.avi](#)

[..\Mathcad_HMT\8_Nonstat_HeatCond\Plate_Harmonics_unit.avi](#)

На первой из них видно, как исчезают высшие гармоники из решения по мере временной эволюции. На второй анимации показана эволюция отдельных членов ряда, т.е. отдельных гармоник. На третьей в искусственном примере демонстрируется затухание высших гармоник с одинаковыми начальными амплитудами.

8.3 Цилиндр

Задача об охлаждении (нагревании) цилиндра (Рис. 8.12) решается аналогично тому, как это было сделано для пластины в параграфе 8.2. Решение получается в виде бесконечного ряда, структура каждого члена которого такая же, как в соотношениях для пластины (8.46) – это произведение коэффициента разложения, функции координат и экспоненциального временного фактора:

$$\Theta(R, Fo; Bi) = \sum_{i=1}^{\infty} B_i \cdot J_0(\mu_i R) \cdot \exp(-\mu_i^2 \cdot Fo);$$

$$B_i = \frac{2J_1(\mu_i)}{\mu_i (J_0^2(\mu_i) + J_1^2(\mu_i))};$$

$$\frac{\mu_i}{Bi} = \frac{J_0(\mu_i)}{J_1(\mu_i)}.$$
(8.54)

Однако функции от координаты (собственные функции) другие, а именно, функции Бесселя, или цилиндрические функции (см. также Рис. 8.13).

Собственные числа задачи μ определяются уравнением, получающимся из формулировки граничного условия третьего рода на поверхности цилиндра и представленном на Рис. 8.14 графически.

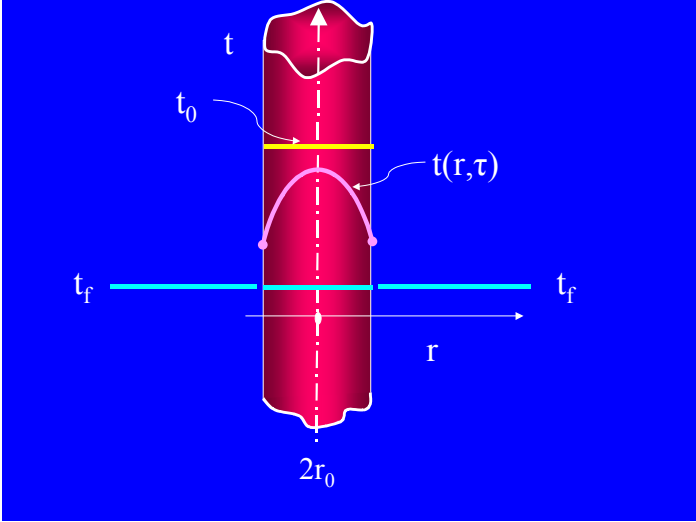


Рис. 8.12. Задача об охлаждении цилиндра

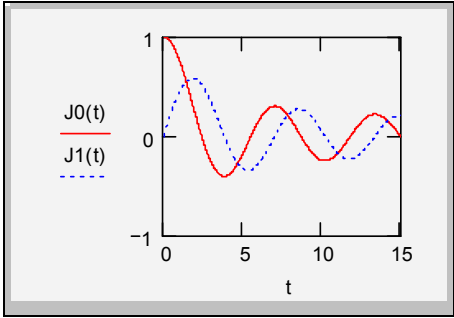


Рис. 8.13. Функции Бесселя первого рода нулевого (J_0) и первого (J_1) порядка от действительного аргумента

Расчеты температурного поля проводятся по Mathcad-программе (Рис. 8.15), построенной на основе аналитического решения:

[..\Mathcad_HMT\8_Nonstat_HeatCond\Cylinder_Transient_Analyt.mcd](#)

Программ включает блоки для вычисления корней функций Бесселя, которые являются предельными значениями для асимптотик $Bi \rightarrow 0$ (z_{ero_J0}) и $Bi \rightarrow \infty$ (z_{ero_J1}) и задают интервал локализации для корней μ при конечных значениях числа Био.

В последнем блоке программы формируется сумма членов ряда. Число удерживаемых членов ряда задается параметром $Nser$.

Формирование таблицы собственных чисел представлено на Рис. 8.16.

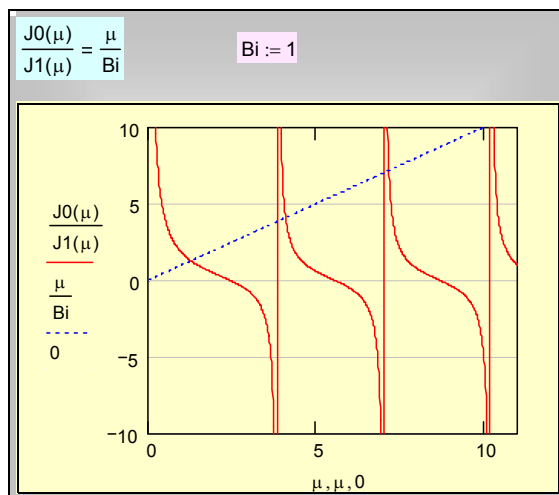


Рис. 8.14. Собственные числа для задачи об охлаждении цилиндра

TOL := 10⁻⁶ CTOL := 10⁻⁶ ORIGIN := 1

zero_J0(N) :=
$$\begin{cases} \text{for } j \in 1..N \\ z \leftarrow \frac{\pi}{4} \cdot (4j - 1) + \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot (4j - 1)} \\ z0_j \leftarrow \text{root}(J0(z), z) \\ z0 \end{cases}$$

zero_J0(6) =
$$\begin{pmatrix} 2.405 \\ 5.52 \\ 8.654 \\ 11.792 \\ 14.931 \\ 18.071 \end{pmatrix}$$

zero_J1(N) :=
$$\begin{cases} z1_1 \leftarrow 0 \\ z0 \leftarrow \text{zero_J0}(N) \\ \text{if } N = 1 \\ \quad z1_N \leftarrow 0 \\ \quad \text{return } z1 \\ \text{for } j \in 2..N \\ \quad z1_j \leftarrow \text{root}(J1(z), z, z0_{j-1}, z0_j) \\ z1 \end{cases}$$

zero_J1(6) =
$$\begin{pmatrix} 0 \\ 3.832 \\ 7.016 \\ 10.173 \\ 13.324 \\ 16.471 \end{pmatrix}$$

$\mu(Bi, N) := \begin{cases} \gamma \leftarrow 10^{-12} \\ z0 \leftarrow \text{zero_J0}(N) \\ z1 \leftarrow \text{zero_J1}(N) \\ \text{for } j \in 1..N \\ \quad \mu_j \leftarrow \text{root}\left(\frac{J0(z)}{J1(z)} - \frac{z}{Bi}, z, z1_j + \gamma, z0_j - \gamma\right) \\ \mu \end{cases}$

$\Theta(R, Fo, Bi, Nser) := \begin{cases} \mu \leftarrow \mu(Bi, Nser) \\ B \leftarrow \left(\frac{2}{\mu} \cdot \frac{J1(\mu)}{J0(\mu)^2 + J1(\mu)^2} \right) \\ \sum_{j=1}^{Nser} B_j \cdot J0(\mu_j \cdot R) \cdot \exp[-(\mu_j)^2 \cdot Fo] \end{cases}$

Рис. 8.15. Mathcad-программа для расчета температурного поля при охлаждении (нагревании) бесконечного цилиндра (аналитическое решение)

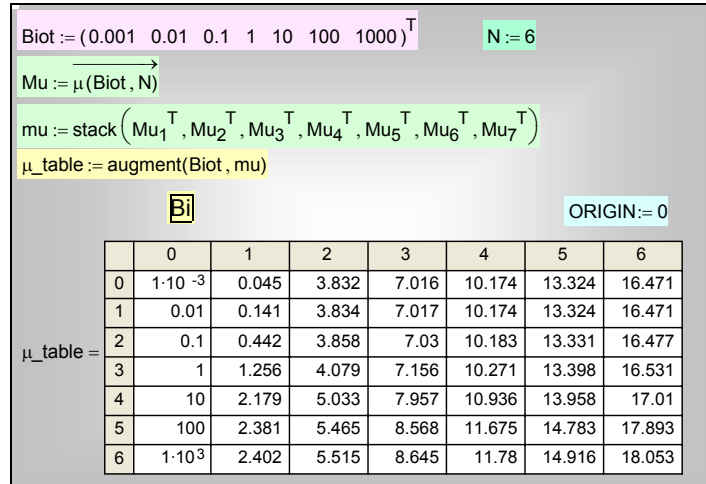


Рис. 8.16. Вычисление и табличное представление собственных чисел для задачи об охлаждении бесконечного цилиндра (столбец с номером 0 – значения числа Био, столбцы с номерами 1..6 – числа $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots$)

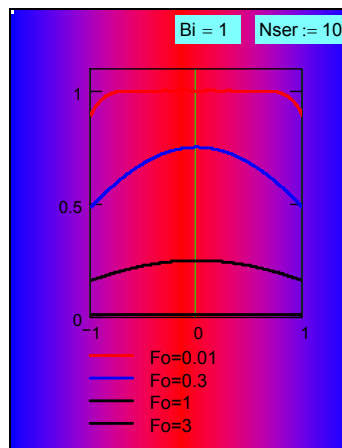


Рис. 8.17. Распределение температуры по радиусу цилиндра для различных моментов времени (аналитическое решение)

Распределение температуры по радиусу бесконечного цилиндра (Рис. 8.17) и во времени, вычисленное по программе на Рис. 8.15, качественно аналогично распределениям для пластины. Результаты асимптотического анализа для больших значений числа Fo , малых и больших чисел Био также полностью аналогичны полученным ранее для пластины.

8.4 Задача о прогреве полуограниченного массива

Полуограниченный массив (Рис. 8.18) простирается в бесконечность в положительном направлении оси x . Начальная температура установлена на уровне t_∞ . На поверхности раздела $x = 0$ происходит внезапный контакт со средой, имеющей температуру t_0 . Предполагается, что благодаря интенсивному теплообмену температура поверхности массива сразу устанавливается и поддерживается далее на уровне t_0 . Происходит постепенный прогрев массива на все большую глубину $\delta(\tau)$, которую мы назовем толщиной температурного пограничного слоя. За пределами этого слоя температура тела остается на уровне t_∞ .

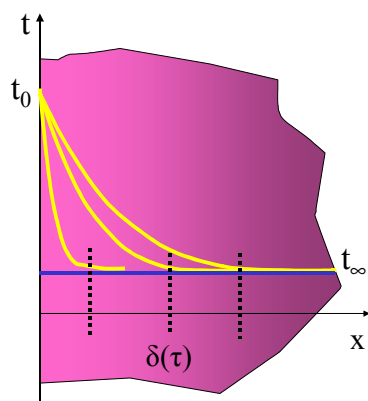


Рис. 8.18. Задача о полуограниченном массиве

Задача состоит в определении нестационарного одномерного температурного поля в полуограниченном массиве $t(x, \tau)$.

Математическая формулировка задачи

Примем в качестве искомой функции избыточную температуру массива, отсчитанную от уровня t_∞ :

$$\vartheta(x, \tau) \equiv t(x, \tau) - t_\infty$$

Дифференциальное уравнение теплопроводности для одномерной нестационарной задачи без внутренних источников теплоты и в предположении о постоянстве физических параметров запишется в следующем виде:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} \quad (8.55)$$

где a – коэффициент температуропроводности.

Начальное условие задает распределение температуры по глубине полугограниченного массива для нулевого момента времени:

$$\vartheta(x, \tau = 0) = t_\infty - t_\infty \equiv 0 \quad (8.56)$$

На поверхности $x = 0$ ставится *граничное условие первого рода*

$$\vartheta(x = 0, \tau) = t_0 - t_\infty \equiv \vartheta_0 \quad (8.57)$$

На удалении от поверхности, за пределами температурного пограничного слоя избыточная температура остается нулевой:

$$\vartheta(x \rightarrow \infty, \tau) = t_\infty - t_\infty \equiv 0 \quad (8.58)$$

Дифференциальное уравнение в частных производных (8.55), начальное (8.56) и граничные условия (8.57), (8.58) составляют математическое описание задачи о прогреве полугограниченного массива.

Решение методом оценки порядка величин

Для дифференциального уравнения (8.55) оценки порядка производятся аналогично тому, как это делалось в задаче об охлаждении пластины (см. соотношения (8.6)–(8.10)):

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2}; \quad \Rightarrow \quad \frac{\vartheta_0}{\tau} \sim a \frac{\vartheta_0}{\delta(\tau)^2} \quad (8.59)$$

Отличие состоит в том, что обозначение δ применяется теперь для *толщины пограничного слоя* – неизвестной заранее и изменяющейся во времени величины, а обозначение τ – для текущего момента времени (времени прогрева на глубину δ).

Из (8.59) получаем для глубины прогрева:

$$\delta(\tau) \approx \sqrt{a\tau} \quad (8.60)$$

Теперь можно оценить также плотность теплового потока на поверхности раздела:

$$\begin{aligned} q_w(\tau) &= -\lambda \frac{\partial \vartheta(x, \tau)}{\partial x} \Big|_{x=+0} \Rightarrow \\ \Rightarrow q(\tau) &\approx \frac{\lambda}{\delta(\tau)} \vartheta_0 \approx \frac{\lambda}{\sqrt{\frac{\lambda}{\rho c_p} \tau}} \vartheta_0 \approx \frac{\sqrt{\lambda \rho c_p}}{\sqrt{\tau}} \vartheta_0 \end{aligned} \quad (8.61)$$

Полученные оценки отражают основные закономерности прогрева массива. При полном решении далее будут получены конкретные числовые

множители (порядка единицы) в формулах вида (8.60), (8.61), однако характер функциональных зависимостей останется таким же:

- глубина прогрева увеличивается пропорционально корню квадратному из времени
- тепловой поток q_w пропорционален температурному перепаду θ_0 ; коэффициент пропорциональности между этими величинами (тепловая проводимость) убывает обратно пропорционально корню из времени:

$$\frac{\lambda}{\delta(\tau)} \approx \frac{\sqrt{\lambda \rho c_p}}{\sqrt{\tau}} \quad (8.62)$$

Согласно (8.61), при заданном перепаде температур θ_0 тепловой поток q_w на поверхности раздела может быть очень большим в начальный период, когда время контакта и глубина прогрева еще невелики, а *градиент температуры достигает очень больших значений*. Можно сказать, что интенсивность теплоотвода внутрь массива будет очень большой, благодаря большой термической проводимости (8.62) тонкого пограничного слоя.

С определенными оговорками эти результаты можно применить для качественного анализа теплоотдачи при обтекании поверхностей, понимая теперь под «массивом» объем жидкости, которая контактирует со стенкой протяженностью x . Если *скорость движения жидкости U* высока, то время контакта

$$\tau \approx \frac{x}{U}$$

будет малым и интенсивность теплообмена – высокой.

Можно также в общих чертах понять роль турбулентности, которая обеспечивает *интенсивное перемешивание* и, следовательно, *обновление контактов* между объемами жидкости с различной температурой (между так называемыми *турбулентными молями*).

Автомоделные переменные

Подобно тому как в задаче о пластине вводилась безразмерная координата посредством отнесения к *заранее заданному масштабу* – толщине пластины, мы отнесем теперь координату к *толщине пограничного слоя* – внутреннему масштабу, определившемуся при предварительном анализе задачи в предыдущем параграфе:

$$\eta \equiv \frac{x}{\delta(\tau)} \equiv \frac{x}{2\sqrt{a\tau}} \quad (8.63)$$

Дополнительный множитель 2 несуществен с принципиальной точки зрения; его введение связано с традицией и соображениями удобства промежуточных вычислений.

Безразмерная координата η показывает, в какой части пограничного слоя находится выбранная точка. Например, значение $\eta = 0.5$ указывает, что точка находится в середине пограничного слоя (на расстоянии от стенки, равном половине толщины пограничного слоя). Естественно предположить, что в этой точке избыточная температура будет иметь *фиксированное* значение, равное примерно половине от общего перепада θ_0 , независимо от того, какова толщина пограничного слоя. Сказанное можно выразить короче:

$$\frac{\vartheta}{\vartheta_0} \equiv \frac{t(x, \tau) - t_\infty}{t_0 - t_\infty} = \Theta\left(\frac{x}{2\sqrt{a\tau}}\right) \equiv \Theta(\eta) \quad (8.64)$$

т.е. относительная (безразмерная) избыточная температура Θ есть функция одной – *автомодельной* – переменной η .

Далее необходимо произвести замену переменных в дифференциальном уравнении (8.55). Если высказанное предположение (8.64) о форме решения верно, то должно получиться *обыкновенное* дифференциальное уравнение с единственной независимой переменной η вместо исходного уравнения в *частных производных* с переменными x, τ . Эти вычисления эффективно выполняются в математическом пакете Maple.

Решение в Maple

Для дифференциального уравнения в частных производных *PDE* (см. (8.65)) преобразования *tr* (*transformation*) задают выражения

- старых независимых переменных x, τ через новые: η и $t \equiv \tau$,
- старой зависимой переменной $\theta(x, \tau)$ как функции двух переменных через новую зависимую переменную $\Theta(\eta)$ как функцию одной *автомодельной* переменной.

Функция Maple *dchange* проводит замены переменных, результатом которых является обыкновенное дифференциальное уравнение относительно $\Theta(\eta)$. Действительно, время t , содержащееся в *явной форме* в последнем уравнении блока (8.65)), сокращается, и остаются только переменные η и $\Theta(\eta)$.

```
restart
> with(PDEtools, dchange)
                                [dchange]
> PDE := (∂/∂τ θ(x, τ)) - a (∂²/∂x² θ(x, τ)) = 0
                                PDE := (∂/∂τ θ(x, τ)) - a (∂²/∂x² θ(x, τ)) = 0
> tr := {x = η √(4 a t), τ = t, θ(x, τ) = Θ(η)}
                                tr := {x = 2 η √(a t), τ = t, θ(x, τ) = Θ(η)}
```

(8.65)

> dchange(tr, PDE, params = a, simplify)

$$\frac{1}{4} \frac{2 \eta \left(\frac{d}{d\eta} \Theta(\eta) \right) + \left(\frac{d^2}{d\eta^2} \Theta(\eta) \right)}{t} = 0$$

В блоке (8.66) отыскивается аналитическое решение для $\Theta(\eta)$. Последовательность выражений *bvp* (*boundary value problem*, краевая задача) задает краевые условия (8.57), (8.58). Обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка *deq* для $\Theta(\eta)$ решается аналитически с применением встроеной функции *dsolve*.

> *bvp* := $\Theta(0) = 1, \Theta(\infty) = 0$

$$bvp := \Theta(0) = 1, \Theta(\infty) = 0$$

> *deq* := $\left(\frac{d^2}{d\eta^2} \Theta(\eta) \right) + 2 \eta \left(\frac{d}{d\eta} \Theta(\eta) \right)$

$$deq := 2 \eta \left(\frac{d}{d\eta} \Theta(\eta) \right) + \left(\frac{d^2}{d\eta^2} \Theta(\eta) \right) \quad (8.66)$$

> *dsolve*({ *deq*, *bvp* }, $\Theta(\eta)$)

$$\Theta(\eta) = 1 - \operatorname{erf}(\eta)$$

Температурное поле в полуограниченном массиве выражается через функцию ошибок $\operatorname{erf}(\eta)$. Напомним, что автомодельная переменная η связана с физическими переменными (x, τ) соотношением (8.63).

График решения (см. Рис. 8.19) удобно рассматривать как распределение температуры по глубине массива для некоторого фиксированного момента времени. Решение асимптотически стремится к нулю, поэтому в качестве толщины температурного пограничного слоя условно принимают такое значение координаты, при котором перепад температуры внутри пограничного слоя составляет 99% от максимального значения. Соответствующие вычисления проведены в Mathcad (Рис. 8.19). В размерном виде, привлекая (8.63), получают:

$$\eta_{99} \equiv \frac{\delta_{99}}{2\sqrt{a\tau}} \quad \Rightarrow \quad \delta_{99} = \eta_{99} 2\sqrt{a\tau} \equiv 3.6\sqrt{a\tau} \quad (8.67)$$

Полезно сопоставить этот строгий количественный результат с полученной ранее оценкой (8.60).

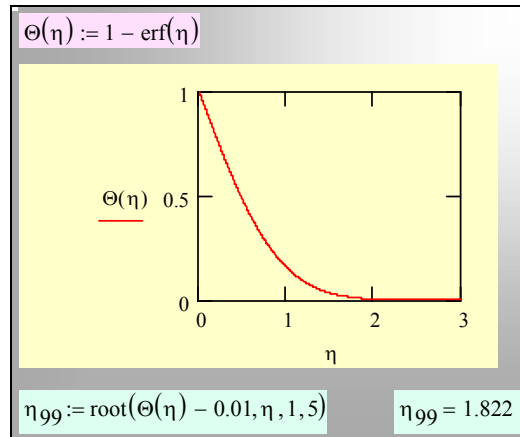


Рис. 8.19. Решение о прогреве полуограниченного массива в автоматических переменных

Температурное поле полуограниченного массива при заданном тепловом потоке на поверхности

Математическое описание этой задачи задается следующими уравнениями:

Дифференциальное уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} \quad (8.68)$$

Граничное условие второго рода на поверхности

$$q_w = -\lambda \left. \frac{\partial \vartheta(x, \tau)}{\partial x} \right|_{x=+0} = const \quad (8.69)$$

где q_w – заданное значение плотности теплового на поверхности, постоянная величина

Граничное условие на бесконечном удалении от поверхности

$$\vartheta(x \rightarrow \infty, \tau) = t_\infty - t_\infty \equiv 0 \quad (8.70)$$

Начальное условие

$$\vartheta(x, \tau = 0) = t_\infty - t_\infty \equiv 0 \quad (8.71)$$

Как и ранее, температура отсчитывается от начального уровня t_∞ . Однако, в отличие от рассмотренной выше задачи с заданной температурой поверхности, теперь не существует заранее определенного фиксированного масштаба для избыточной температуры ϑ . Более того, ясно, что температура поверхности $\vartheta(x = 0, \tau)$ будет возрастать с течением времени.

Для оценки избыточной температуры на поверхности используем граничное условие на поверхности:

$$\begin{aligned}
 q_w &= -\lambda \frac{\partial \vartheta(x, \tau)}{\partial x} \Big|_{x=+0} \Rightarrow \\
 \Rightarrow q_w &\approx \frac{\lambda}{\delta(\tau)} \vartheta_{scale}(\tau) \approx \frac{\lambda}{2\sqrt{a\tau}} \vartheta_{scale}(\tau) \Rightarrow \quad (8.72) \\
 \Rightarrow \vartheta_{scale}(\tau) &\approx \frac{q_w}{\lambda} 2\sqrt{a\tau}
 \end{aligned}$$

При переходе к безразмерному описанию мы отнесем координату x к толщине пограничного слоя:

$$\eta \equiv \frac{x}{\delta(\tau)} \equiv \frac{x}{2\sqrt{a\tau}} \quad (8.73)$$

а избыточную температуру – к определенному в (8.72) масштабу:

$$\frac{\vartheta(x, \tau)}{\vartheta_{scale}(\tau)} \equiv \frac{\vartheta(x, \tau)}{\frac{q_w}{\lambda} 2\sqrt{a\tau}} \quad (8.74)$$

Предполагая подобие такого нормированного профиля температуры, мы будем искать решение в виде:

$$\frac{\vartheta(x, \tau)}{\frac{q_w}{\lambda} 2\sqrt{a\tau}} = \Theta(\eta) \quad (8.75)$$

Таким образом, замены переменных в дифференциальном уравнении и граничных условиях будут следующими:

- для независимых переменных – см. уравнение (8.73)
- для зависимой переменной:

$$\begin{aligned}
 \vartheta(x, \tau) &= \Theta(\eta) \frac{q_w}{\lambda} 2\sqrt{a\tau} \\
 \vartheta(x, \tau) &= \Theta(\eta) C \sqrt{\tau}; \quad C \equiv \frac{q_w}{\lambda} 2\sqrt{a}
 \end{aligned} \quad (8.76)$$

Дальнейшие вычисления выполняются в математическом пакете Maple. Аналитические преобразования (8.77) описывают замены переменных, в результате которых получается обыкновенное дифференциальное уравнение для $T(\eta)$, где T – другое обозначение для Θ .

```

> restart
> with(PDEtools, dchange)
[ dchange ]
(8.77)

```

```

> PDE := (∂/∂τ θ(x, τ)) - a (∂²/∂x² θ(x, τ)) = 0
      PDE := (∂/∂τ θ(x, τ)) - a (∂²/∂x² θ(x, τ)) = 0
> tr := {x = η √(4 a t), τ = t, θ(x, τ) = T(η) C √t}
      tr := {τ = t, x = 2 η √(a t), θ(x, τ) = T(η) C √t}
> dchange(tr, PDE, params = [a, C], simplify)
      1 C (2 η (d/dη T(η)) - 2 T(η) + (d²/dη² T(η))) / (4 √t) = 0

```

В блоке (8.78) ставится краевая задача (*bvp*) с граничным условием второго рода (оператор $D(T)(0)$ означает дифференцирование в точке $\eta = 0$) и выписывается дифференциальное уравнение (*deq*). Функция Maple *dsolve* выводит аналитическое решение, которое преобразуется в функцию $\Theta(\eta)$ посредством оператора *unapply*.

```

>
      bvp := D(T)(0) = -1, T(∞) = 0
      deq := 2 η (d/dη T(η)) - 2 T(η) + (d²/dη² T(η))
> dsolve({deq, bvp}, T(η)); expand(%)
      T(η) = -η + 1/√π e(-η²) + erf(η) η
> Θ := unapply(-η + 1/π(1/2) e(-η²) + η erf(η), η)
      Θ := η → -η + 1/√π e(-η²) + erf(η) η
> Θ(0)
      1/√π

```

(8.78)

Выпишем результаты решения в следующем виде:

$$\frac{\vartheta(x, \tau)}{\vartheta_0(\tau)} = \exp(-\eta^2) - \sqrt{\pi} \eta (1 - \operatorname{erf}(\eta))$$

$$\vartheta_0(\tau) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{q_w}{\lambda} \sqrt{a\tau}$$
(8.79)

где $\theta_0(\tau)$ – избыточная температура поверхности, возрастающая пропорционально корню квадратному из времени.

Пример расчета (см. Рис. 8.20, Рис. 8.21) относится к высокотемпературным технологиям. Стальной образец подвергается воздействию мощного теплового потока. Видно, что в течение короткого промежутка времени (десятка миллисекунд) температура поверхности поднимается до очень высоких значений (несколько тысяч градусов) в тонком приповерхностном слое (доли миллиметра). Математическое моделирование таких экстремальных режимов важно для проблем термоядерного синтеза, термической обработки материалов с целью поверхностного упрочнения и т.п.

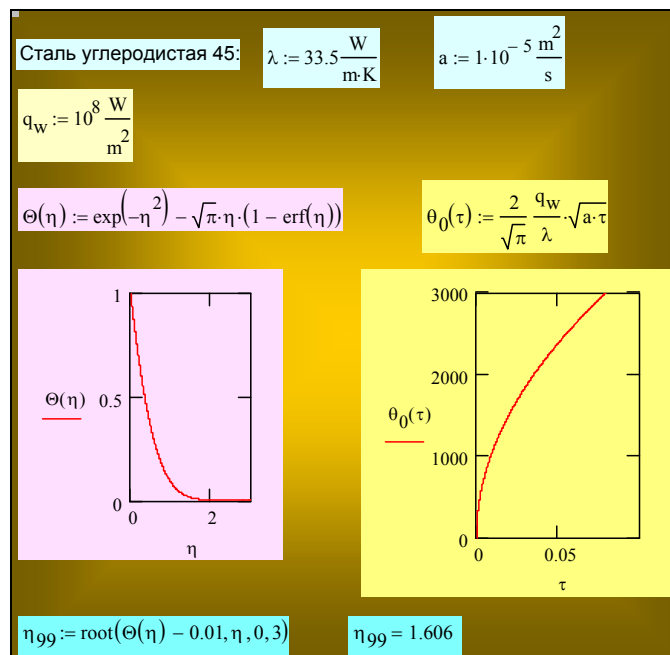


Рис. 8.20. Воздействие мощного теплового потока на стальной образец

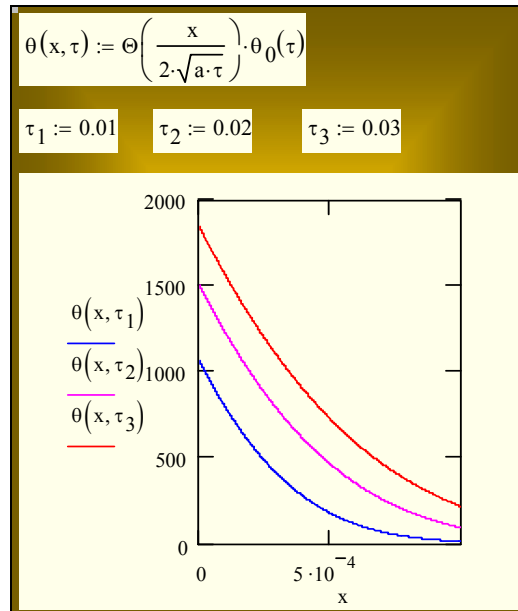


Рис. 8.21. Распределение температуры для различных моментов времени при воздействии мощного теплового потока на стальной образец

Если на поверхности раздела ставятся *граничные условия третьего рода*, т.е. заданы значения коэффициента теплоотдачи α на поверхности и температура среды t_f , то температурное поле рассчитывается по формуле:

$$\frac{t(x, \tau) - t_\infty}{t_f - t_\infty} = [1 - \operatorname{erf}(\eta)] - \exp[\operatorname{Bi}_\delta(2\eta + \operatorname{Bi}_\delta)][1 - \operatorname{erf}(\eta + \operatorname{Bi}_\delta)] \quad (8.80)$$

$$\operatorname{Bi}_\delta \equiv \frac{\alpha\sqrt{a\tau}}{\lambda}$$

где Bi_δ – модифицированный параметр Био (в качестве характерного размера выступает величина, пропорциональная толщине пограничного слоя).

Задача Томсона об остывании Земли

В историческом масштабе времени совсем недавно, примерно 150 лет назад, английский физик Уильям Томсон (Кельвин) разрушил господствовавшую в то время *стационарную* модель Земли, указав, что Земля должна остывать, отдавая в космос тепловую энергию, выделившуюся первоначально при гравитационном объединении и сжатии исходных компонентов. Томсон рассчитал время охлаждения от момента затвердевания Земли до ее современного состояния и, таким образом, получил оценку для времени существования Земли в пределах 20 – 400 млн. лет.

Идея вычислений состоит в том, чтобы зная современное тепловое состояние Земли и располагая расчетной моделью теплоотвода, определить время, которое потребовалось для эволюции из начального в сегодняшнее состояние.

Современное тепловое состояние задается следующими параметрами. Средняя температура поверхности Земли оценивается примерно как 0° . Градиент температуры у поверхности Земли, согласно измерениям температуры в шахтах на разных глубинах, составляет примерно 0.037 К/м, причем температура повышается с глубиной. Ранее, в геологическом масштабе времени, градиент был более высоким.

В начальном состоянии Земля рассматривалась как расплавленная сфера при температуре примерно 2000°C . Температура поверхности, благодаря интенсивному радиационному теплоотводу в Космос, должна была за короткое время снизиться до современного уровня, т.е. 0°C .

Ясно, что эта словесная формулировка приводит к классической задаче о прогреве (охлаждении) полуограниченного массива, если предположить дополнительно, что толщина температурного пограничного слоя мала по сравнению с радиусом Земли, величиной примерно равной 6400 км.

Коэффициент температуропроводности земной коры можно оценить как 10^{-6} м²/с.

Решение задачи о том, за какое время τ_c приповерхностный температурный градиент $gradt$, первоначально очень большой, снизился до современного уровня, выполнено в Mathcad (Рис. 8.22). Сначала, в режиме символьных вычислений, дифференцируется распределение температуры (8.66) и выводится формула для градиента температуры на поверхности:

$$\left. \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right|_{x=0} = \frac{-\vartheta_0}{\sqrt{\pi a \tau}} \quad (8.81)$$

Далее в вычислительном блоке Given ... Find формулируется и решается уравнение, согласно которому в современных условиях, спустя время τ_c с начала охлаждения, значение градиента составляет 0.037 К/м. В результате получается время охлаждения τ_c примерно 30 млн. лет.

Глубина температурного пограничного слоя, согласно (8.67), составляет примерно 110 км, что существенно меньше радиуса Земли. Этот относительно тонкий приповерхностный слой сферы большого радиуса допустимо рассматривать как плоский слой.

$$\Theta(\eta) := 1 - \operatorname{erf}(\eta)$$

$$\theta(x, \tau, a, \theta_0) := \theta_0 \cdot \Theta\left(\frac{x}{2\sqrt{a \cdot \tau}}\right)$$

$$\operatorname{gradt}(x, \tau, a, \theta_0) := \frac{d}{dx}\theta(x, \tau, a, \theta_0)$$

$$\operatorname{gradt}(0, \tau, a, \theta_0) \text{ simplify} \rightarrow \frac{-\theta_0}{\frac{1}{\pi^2} \cdot \frac{1}{(a \cdot \tau)^2}}$$

$$a := 1 \cdot 10^{-6} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$$

$$\theta_0 := -2000\text{K}$$

$$\tau := 10^6 \text{yr}$$

Given $\operatorname{gradt}(0, \tau, a, \theta_0) = 0.037 \frac{\text{K}}{\text{m}}$ $\tau_c := \operatorname{Find}(\tau)$ $\tau_c = 2.947 \times 10^7 \text{yr}$

$$\delta_{99} := 3.6 \cdot \sqrt{a \cdot \tau_c}$$

$$\delta_{99} = 109.788 \text{ km}$$

Рис. 8.22. Задача Томсона об остывании Земли

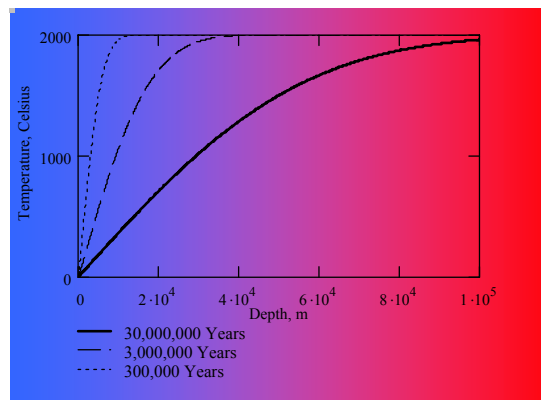


Рис. 8.23. Распределение температуры по глубине Земли в задаче Томсона для трех моментов времени: 30 млн. лет, 3 млн. лет, 300 тыс. лет

Распределение температуры по глубине для трех моментов времени показано на Рис. 8.23. Наклон кривых в начале координат представляет градиент температуры у поверхности Земли.

Сейчас мы знаем, что возраст Земли составляет примерно 4500 млн. лет. Это существенно больше, чем полученная оценка в 30 млн. лет. Тепловое состояние Земли определяется продолжающимся действием *внутренних источников тепла*, имеющих *радиоактивную* природу, о чем не мог знать Томсон, поскольку до открытия радиоактивности оставалось еще примерно полвека. Однако теория Томсона как одна из первых космогонических *количественных* моделей представляет для нас большой интерес, тем более что она базируется на классической задаче теории теплообмена. К Mathcad-программе, реализующей модель Томсона, можно обратиться по ссылке: ..\Mathcad_HMT\8_Nonstat_HeatCond\Semi_Infin_Thomson_Earth_Model.mcd

8.5 Двух- и трехмерные нестационарные температурные поля

Полученные выше аналитические решения описывают одномерные нестационарные поля в идеализированных объектах – *бесконечной* пластине (8.46), *бесконечном* цилиндре (8.54), *полуограниченном* массиве (8.66), (8.79), (8.80). Однако реальные тела, в которых приходится рассчитывать температурные поля, трехмерны. Простейшие реальные геометрические объекты получаются при пересечении указанных выше идеализированных *примитивов* (прототипов, базисных элементов).

Примером является цилиндр конечных размеров, образованный пересечением бесконечной пластины и бесконечного цилиндра (Рис. 8.24).

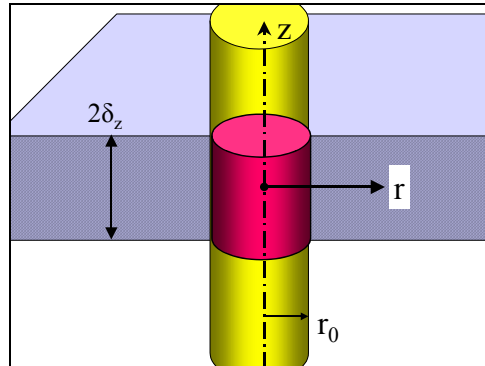


Рис. 8.24. Цилиндр конечных размеров как пересечение бесконечной пластины и бесконечного цилиндра

Замечательным результатом теории теплопроводности является тот факт, что *безразмерное* температурное поле сложного объекта равно произведению *безразмерных* температурных полей соответствующих примитивов. Это утверждение может быть доказано прямой подстановкой предполагаемого вида решения в дифференциальное уравнение теплопроводности и краевые условия.

Для примера с цилиндром конечных размеров имеем:

$$\underbrace{\frac{t(z, r, \tau) - t_f}{t_0 - t_f}}_{\text{Цилиндр конечных размеров}} = \underbrace{\frac{t(z, \tau) - t_f}{t_0 - t_f}}_{\text{Бесконечная пластина}} \cdot \underbrace{\frac{t(r, \tau) - t_f}{t_0 - t_f}}_{\text{Бесконечный цилиндр}} \quad (8.82)$$

Пример расчета температурного поля цилиндра конечных размеров приведен на Рис. 8.25. Доступ к Mathcad-программе обеспечивается по ссылке

[..Mathcad_HMT\8_Nonstat_HeatCond\Plate_Cyl_multy_Heating_2.mcd.](#)

Решается следующая задача. Стальной цилиндр длиной $2\delta_{\text{plate}}$ и радиусом r_{Cyl} нагревается в высокотемпературной ванне ($t_f = 1000\text{K}$). Технология нагрева такова, что на торцевых поверхностях обеспечивается высокое значение коэффициента теплоотдачи, в то время как на боковой поверхности коэффициент теплоотдачи относительно невысок. Требуется построить графики временного изменения температур в трех характерных точках: в центре цилиндра, в центре торцевой поверхности и в середине боковой поверхности. Подробности вычислений ясны из текста программы. Оценивая результаты расчета, следует обратить внимание на быстрый рост температуры на торцах цилиндра. Полезно дать объяснение этому эффекту. Поскольку имеется доступ к Mathcad-программе, можно провести вычислительные эксперименты при вариациях параметров и получить документированный ответ.

Описанный метод перемножения решений применим для следующих конфигураций

- Бесконечно длинный брус как пересечение двух пластин
- Параллелепипед как пересечение трех пластин
- Конечный цилиндр как пересечение бесконечной пластины и бесконечного цилиндра
- Двумерный угол как пересечение двух полуограниченных массивов
- Трехмерный угол как пересечение трех полуограниченных массивов
- Полуограниченная пластина как пересечение бесконечной пластины и полуограниченного массива
- Полуограниченный брус как пересечение бесконечно длинного бруса и полуограниченного массива
- Полуограниченный цилиндр как пересечение бесконечного цилиндра и полуограниченного массива

Plate x Cylinder

$$\lambda := 33.5 \frac{\text{W}}{\text{m} \cdot \text{K}} \quad c := 450 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}} \quad \rho := 7900 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \quad a := \frac{\lambda}{c \cdot \rho} \quad a = 9.423 \times 10^{-6} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$$

$$\alpha_{\text{Plate}} := 1000 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}} \quad \alpha_{\text{Cyl}} := 100 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}}$$

$$\delta_{\text{Plate}} := 0.10 \text{m} \quad r_{\text{Cyl}} := 0.10 \text{m}$$

$$T_0 := 300 \text{K} \quad T_f := 1000 \text{K}$$

$$N_{\text{ser}} := 6$$

Teta.Plate(X,Fo,Bi,Nser)

Teta.Cyl(R,Fo,Bi,Nser)

$$T(x, r, \tau) := \left[\left(X \leftarrow \frac{x}{\delta_{\text{Plate}}} \right) \left(R \leftarrow \frac{r}{r_{\text{Cyl}}} \right) \right]$$

$$\left[\left(F_{o\text{Plate}} \leftarrow \frac{a \cdot \tau}{\delta_{\text{Plate}}^2} \right) \left(F_{o\text{Cyl}} \leftarrow \frac{a \cdot \tau}{r_{\text{Cyl}}^2} \right) \right]$$

$$\left[\left(Bi_{\text{Plate}} \leftarrow \frac{\alpha_{\text{Plate}} \cdot \delta_{\text{Plate}}}{\lambda} \right) \left(Bi_{\text{Cyl}} \leftarrow \frac{\alpha_{\text{Cyl}} \cdot r_{\text{Cyl}}}{\lambda} \right) \right]$$

$$\Theta_P \leftarrow \Theta_{\text{Plate}}(X, F_{o\text{Plate}}, Bi_{\text{Plate}}, N_{\text{ser}})$$

$$\Theta_C \leftarrow \Theta_{\text{Cyl}}(R, F_{o\text{Cyl}}, Bi_{\text{Cyl}}, N_{\text{ser}})$$

$$\Theta \leftarrow \Theta_P \cdot \Theta_C$$

$$T \leftarrow T_f + (T_0 - T_f) \cdot \Theta$$

$$T$$

$$T(0\text{m}, 0\text{m}, 1000\text{s}) = 858.772 \text{K}$$

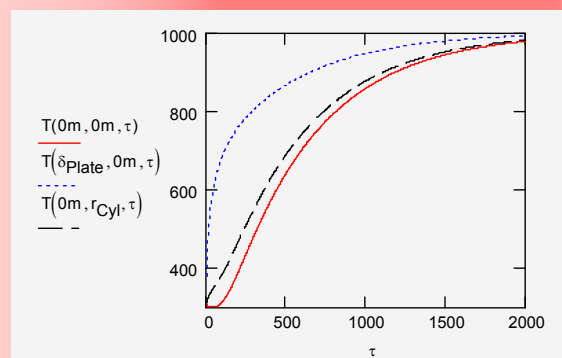


Рис. 8.25. Расчет температурного поля цилиндра конечных размеров

8.6 Температурные поля, создаваемые точечными и линейными источниками тепла.

