Проблема трёх тел
или
Розеттский камень программирования

(статья с эпиграфом в виде комикса – рисованной истории)

Валерий Очков

Вячеслав Петухов

«– Ну, что проблема трёх тел? – прошептал еще Крыльцов и трудно, тяжело улыбнулся. – Мудреное решение? Нехлюдов не понял, но Марья Павловна объяснила ему, что это знаменитая математическая проблема определения отношения трех тел: солнца, луны и земли, и что Крыльцов шутя придумал это сравнение с отношением Нехлюдова, Катюши и Симонсона. Крыльцов кивнул головой в знак того, что Марья Павловна верно объяснила его шутку».

Лев Толстой «Воскресение»

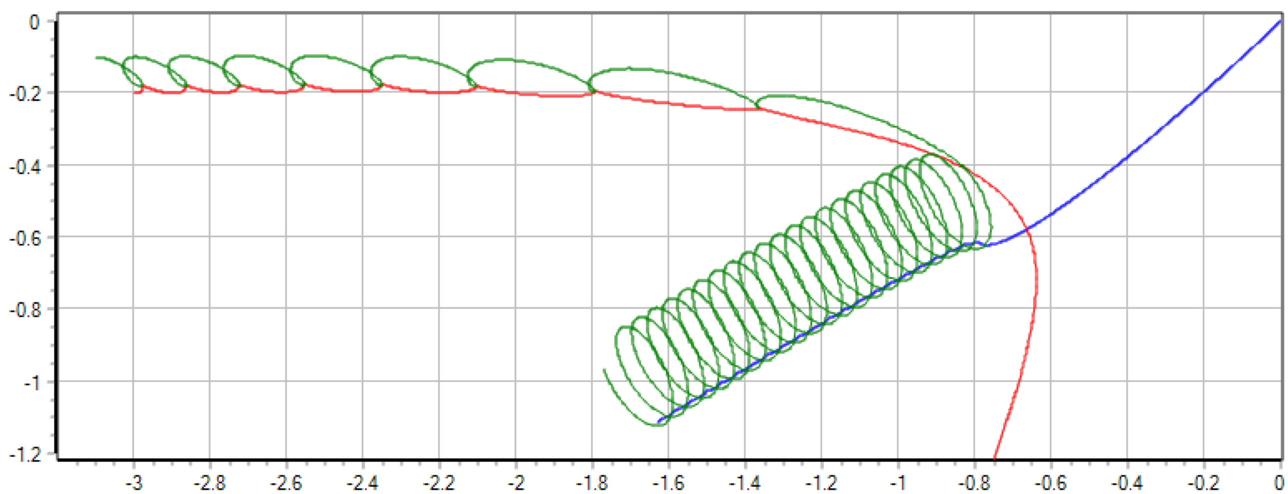

Рис. 1. Слева летит красная планета с зелёным спутником. Справа к ним приближается синяя планета и перехватывает спутник. Как такую занимательную картинку получили на компьютере?

$$\ddot{\mathbf{r}}_1 = -Gm_2\frac{\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|^3} - Gm_3\frac{\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_3}{|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_3|^3}$$

$$\ddot{\mathbf{r}}_2 = -Gm_3\frac{\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_3}{|\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_3|^3} - Gm_1\frac{\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1|^3}$$

$$\ddot{\mathbf{r}}_3 = -Gm_1\frac{\mathbf{r}_3-\mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_3-\mathbf{r}_1|^3} - Gm_2\frac{\mathbf{r}_3-\mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_3-\mathbf{r}_2|^3}$$

Рис. 1а. На сайте https://ru.wikipedia.org/wiki/Задача_трёх_тел можно найти такие формулы математического описания этой задачи. Движение $r_i=(x_i, y_i, z_i)$ с массами m_i описывается совокупностью трех дифференциальных уравнений второго порядка, где G — гравитационная постоянная.

$$m_1\cdot\frac{d^2}{dt^2}x_1(t) = \frac{G\cdot m_1\cdot m_2}{\sqrt{\left(x_2(t)-x_1(t)\right)^2+\left(y_2(t)-y_1(t)\right)^2}^{\,2}}\cdot\frac{x_2(t)-x_1(t)}{\sqrt{\left(x_2(t)-x_1(t)\right)^2+\left(y_2(t)-y_1(t)\right)^2}} + \frac{G\cdot m_1\cdot m_3}{\sqrt{\left(x_3(t)-x_1(t)\right)^2+\left(y_3(t)-y_1(t)\right)^2}^{\,2}}\cdot\frac{x_3(t)-x_1(t)}{\sqrt{\left(x_3(t)-x_1(t)\right)^2+\left(y_3(t)-y_1(t)\right)^2}}$$

Рис. 2. Перепишем то, что на рис. 1а для пакета SMath/ Задача о трёх небесных телах решается через составление системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, в которые заложены: второй закон Ньютона, закон всемирного тяготения и принцип суперпозиций – разложение векторных величин по оси абсцисс и по оси ординат. Задача у нас плоская, но несложно ввести в расчёт и третье измерение – аппликату. Левая часть уравнения – это произведение массы материальной точки на её ускорение, а правая – это сумма сил, действующих на точку. Сила притяжения двух небесных тел пропорциональна произведению их масс, делённому на квадрат расстояния между ними. Константа G – это гравитационная постоянная, которую мы примем равной единице. Дробь, описывающая закон всемирного тяготения, умножается на дробь, определяющую проекцию силы по оси абсцисс.

$$\frac{d}{dt}v_{x1}(t)=\frac{m_2\cdot\left(x_2(t)-x_1(t)\right)}{\sqrt{\left(x_2(t)-x_1(t)\right)^2+\left(y_2(t)-y_1(t)\right)^2}^{\,3}}+\frac{m_3\cdot\left(x_3(t)-x_1(t)\right)}{\sqrt{\left(x_3(t)-x_1(t)\right)^2+\left(y_3(t)-y_1(t)\right)^2}^{\,3}}$$

$$\frac{d}{dt}v_{y1}(t)=\frac{m_2\cdot\left(y_2(t)-y_1(t)\right)}{\sqrt{\left(x_2(t)-x_1(t)\right)^2+\left(y_2(t)-y_1(t)\right)^2}^{\,3}}+\frac{m_3\cdot\left(y_3(t)-y_1(t)\right)}{\sqrt{\left(x_3(t)-x_1(t)\right)^2+\left(y_3(t)-y_1(t)\right)^2}^{\,3}}$$

$$\frac{d}{dt}v_{x2}(t)=\frac{m_1\cdot\left(x_1(t)-x_2(t)\right)}{\sqrt{\left(x_2(t)-x_1(t)\right)^2+\left(y_2(t)-y_1(t)\right)^2}^{\,3}}+\frac{m_3\cdot\left(x_3(t)-x_2(t)\right)}{\sqrt{\left(x_3(t)-x_2(t)\right)^2+\left(y_3(t)-y_2(t)\right)^2}^{\,3}}$$

$$\frac{d}{dt}v_{y2}(t)=\frac{m_1\cdot\left(y_1(t)-y_2(t)\right)}{\sqrt{\left(x_2(t)-x_1(t)\right)^2+\left(y_2(t)-y_1(t)\right)^2}^{\,3}}+\frac{m_3\cdot\left(y_3(t)-y_2(t)\right)}{\sqrt{\left(x_3(t)-x_2(t)\right)^2+\left(y_3(t)-y_2(t)\right)^2}^{\,3}}$$

$$\frac{d}{dt}v_{x3}(t)=\frac{m_1\cdot\left(x_1(t)-x_3(t)\right)}{\sqrt{\left(x_3(t)-x_1(t)\right)^2+\left(y_3(t)-y_1(t)\right)^2}^{\,3}}+\frac{m_2\cdot\left(x_2(t)-x_3(t)\right)}{\sqrt{\left(x_3(t)-x_2(t)\right)^2+\left(y_3(t)-y_2(t)\right)^2}^{\,3}}$$

$$\frac{d}{dt}v_{y3}(t)=\frac{m_1\cdot\left(y_1(t)-y_3(t)\right)}{\sqrt{\left(x_3(t)-x_1(t)\right)^2+\left(y_3(t)-y_1(t)\right)^2}^{\,3}}+\frac{m_2\cdot\left(y_2(t)-y_3(t)\right)}{\sqrt{\left(x_3(t)-x_2(t)\right)^2+\left(y_3(t)-y_2(t)\right)^2}^{\,3}}$$

Рис. 3. Вот как после некоторых преобразований будут выглядеть дифференциальные уравнения плоской задачи движения трех небесных тел. Расстояния между планетами (материальными точками) возводятся не во вторую, а в третью степень (см. также рис. 1а), что заставляет вспомнить такой анекдот: «Что бы было, если б Ньютону на голову упало бы не яблоко, а кокосовый орех! Ответ – тогда бы в знаменателе формулы всемирного тяготения была бы тройка, а не двойка». Шутки-шутками, но можно попробовать решить нашу задачу не с квадратом, а с кубом расстояний.

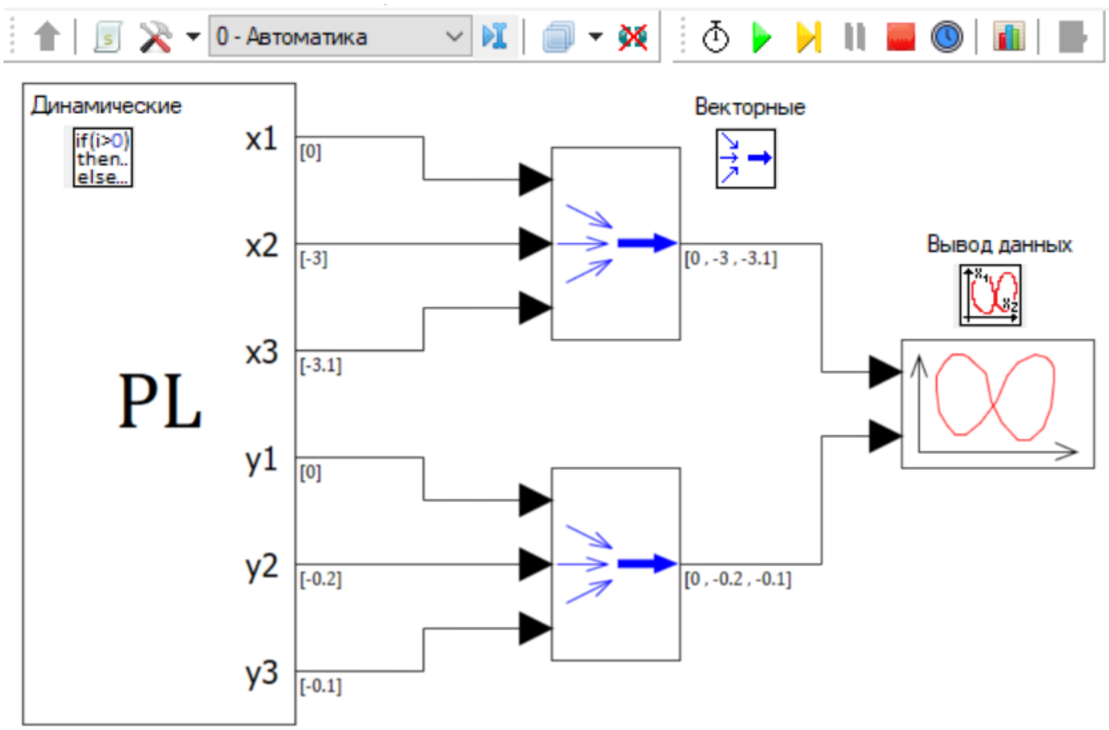

Рис. 4. Попытаемся решить численно нашу систему дифференциальных уравнений в среде SimInThech (решение, показанное на рис. 1а, получено в среде SMath – см.). Символьно (аналитически) это сделать нельзя. Наверное, лучший компьютерный инструмент для этой работы – это российская среда динамического моделирования SimInTech, где время – это не аргумент функций, задающих положение планет и спутников (рис. 2 и 3), а некая физическая субстанция, задающая значения расчетных параметров, текущих по связям между отдельными блоками

Параметры проекта:

Название	Значение
Основные параметры	
Минимальный шаг	0.001
Максимальный шаг	0.001
Метод интегрирования	Эйлера
Конечное время расчёта	3

Рис. 5. Прежде, чем нажимать на кнопку Пуск (зеленый треугольник вверху рис. 4), нужно нажать на кнопку Параметры расчёта… (кнопка с изображением молотка и отвёртки) и установить время полета наших трёх небесных тел – 3 секунды. Кроме того, в блок программирования PL нужно будет записать такой текст – рис. 6.

Блок "Язык программирования": LangBlock_1

Файл Правка Поиск Расчёт Справка Инструменты

```
const m1=30, m2=2, m3=0.5;
init  x1=0,     x2=-3,     x3=-3.1,
      y1=0,     y2=-0.2,   y3=-0.1,
      vx1=-1,   vx2=1,     vx3=2,
      vy1=-1,   vy2=0,     vy3=0;

ax1=m2*(x2-x1)/sqrt((x2-x1)^2+(y2-y1)^2)^3+
    m3*(x3-x1)/sqrt((x3-x1)^2+(y3-y1)^2)^3;
ay1=m2*(y2-y1)/sqrt((x2-x1)^2+(y2-y1)^2)^3+
    m3*(y3-y1)/sqrt((x3-x1)^2+(y3-y1)^2)^3;

ax2=m1*(x1-x2)/sqrt((x2-x1)^2+(y2-y1)^2)^3+
    m3*(x3-x2)/sqrt((x3-x2)^2+(y3-y2)^2)^3;
ay2=m1*(y1-y2)/sqrt((x2-x1)^2+(y2-y1)^2)^3+
    m3*(y3-y2)/sqrt((x3-x2)^2+(y3-y2)^2)^3;

ax3=m1*(x1-x3)/sqrt((x3-x1)^2+(y3-y1)^2)^3+
    m2*(x2-x3)/sqrt((x3-x2)^2+(y3-y2)^2)^3;
ay3=m1*(y1-y3)/sqrt((x3-x1)^2+(y3-y1)^2)^3+
    m2*(y2-y3)/sqrt((x3-x2)^2+(y3-y2)^2)^3;

vx1'=ax1;    vx2'=ax2;  vx3'=ax3;
vy1'=ay1;    vy2'=ay2;  vy3'=ay3;

x1'=vx1;     x2'=vx2;   x3'=vx3;
y1'=vy1;     y2'=vy2;   y3'=vy3;

output x1, x2, x3, y1, y2, y3;
```

Рис. 6. Задаем массы наших трех планет (m1, m2 и m3), их стартовые положения и стартовые скорости – проекции этих величин по оси абсцисс (x) и оси ординат (y), а далее записываем формулы для определения ускорения (a). Эти формулы взяты из рис. 3. Штрихи (знак взятия первой производной) у имён переменные позволяют численным интегрирование по ускорению найти скорость, а по скорости пройденный. Ниже показана это программа не картинкой, а текстом для того, чтобы её можно было скопировать в создаваемый расчёт.

```
const m1=30, m2=2, m3=0.5;
init x1=0,   x2=-3,   x3=-3.1,
     y1=0,   y2=-0.2,  y3=-0.1,
     vx1=-1,  vx2=1,   vx3=2,
     vy1=-1,  vy2=0,   vy3=0;
ax1=m2*(x2-x1)/sqrt((x2-x1)^2+(y2-y1)^2)^3+m3*(x3-x1)/sqrt((x3-x1)^2+(y3-y1)^2)^3;
ay1=m2*(y2-y1)/sqrt((x2-x1)^2+(y2-y1)^2)^3+m3*(y3-y1)/sqrt((x3-x1)^2+(y3-y1)^2)^3;
ax2=m1*(x1-x2)/sqrt((x2-x1)^2+(y2-y1)^2)^3+m3*(x3-x2)/sqrt((x3-x2)^2+(y3-y2)^2)^3;
```

```
ay2=m1*(y1-y2)/sqrt((x2-x1)^2+(y2-y1)^2)^3+m3*(y3-y2)/sqrt((x3-x2)^2+(y3-y2)^2)^3;
ax3=m1*(x1-x3)/sqrt((x3-x1)^2+(y3-y1)^2)^3+m2*(x2-x3)/sqrt((x3-x2)^2+(y3-y2)^2)^3;
ay3=m1*(y1-y3)/sqrt((x3-x1)^2+(y3-y1)^2)^3+m2*(y2-y3)/sqrt((x3-x2)^2+(y3-y2)^2)^3;
vx1'=ax1;    vx2'=ax2;  vx3'=ax3;
vy1'=ay1;    vy2'=ay2;  vy3'=ay3;
x1'=vx1;     x2'=vx2;   x3'=vx3;
y1'=vy1;     y2'=vy2;   y3'=vy3;
output x1, x2, x3, y1, y2, y3;
```

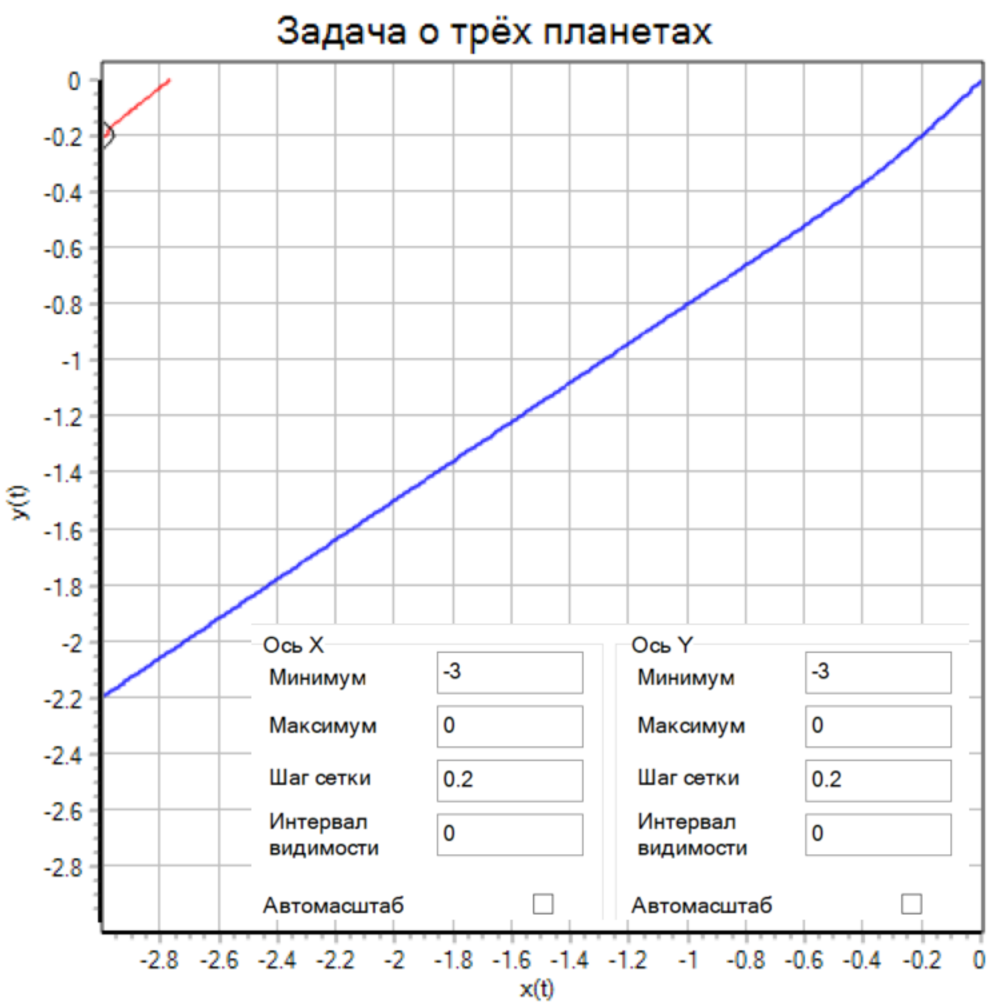

Рис. 7. Нажали на кнопку Пуск и получили вот такой график, никак не похожий на то, что было показано на рис. 1. В чём дело?


Параметры проекта:

Название	Значение
Основные параметры	
Минимальный шаг	1E-6
Максимальный шаг	0.001
Метод интегрирования	ARK21(Адаптивный 1)

Рис. 8. Если заменить некоторые параметры расчета – выбрать иной метод численного интегрирования и уменьшить минимальный шаг, то… см. рис. 9.

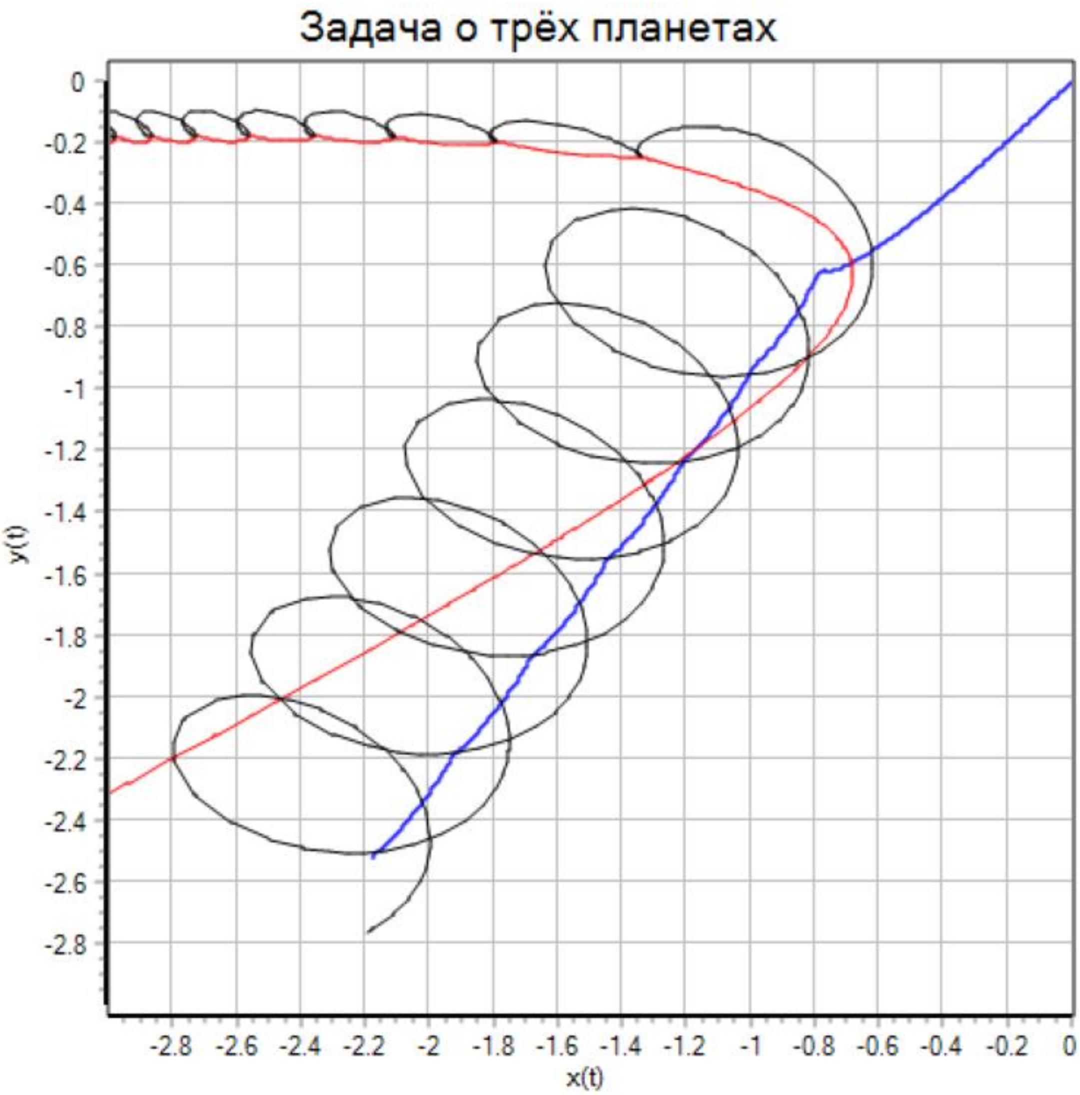

Рис. 9. Данный график получатся после двойного щелчка по изображению иконки со знаком бесконечности. Но рано радоваться. Если изменить некоторые параметры расчета – задать, например, иной метод интегрирования и/или другой минимальный шаг, то картина будет совсем иная. Это говорит о том, что данная задача не имеет не только аналитического, но и численного решения.

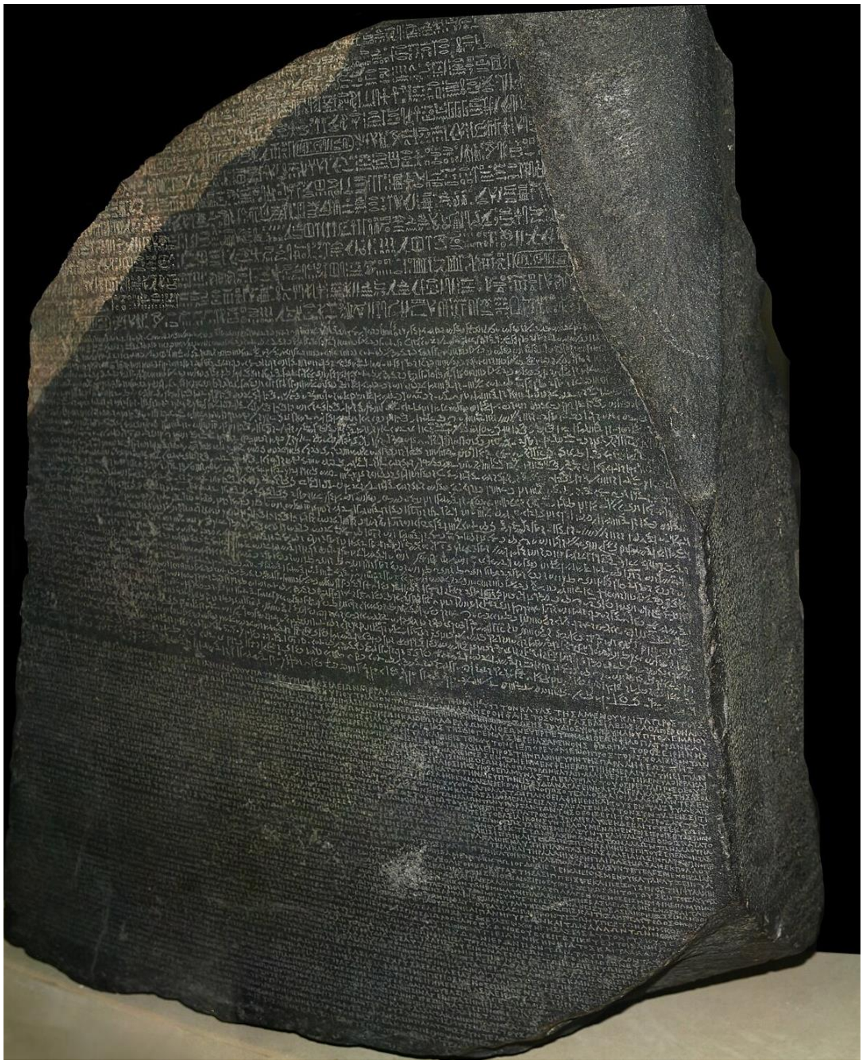

Рис. 10. Розеттский камень, был найден в 1799 году в Египте. Он послужил ключом к расшифровке древнеегипетских иероглифов. На нём выбит текст в трёх вариантах – вверху иероглифами, в середине демотическим письмом (скоропись эпохи позднего Египта) и внизу на древнегреческом языке.

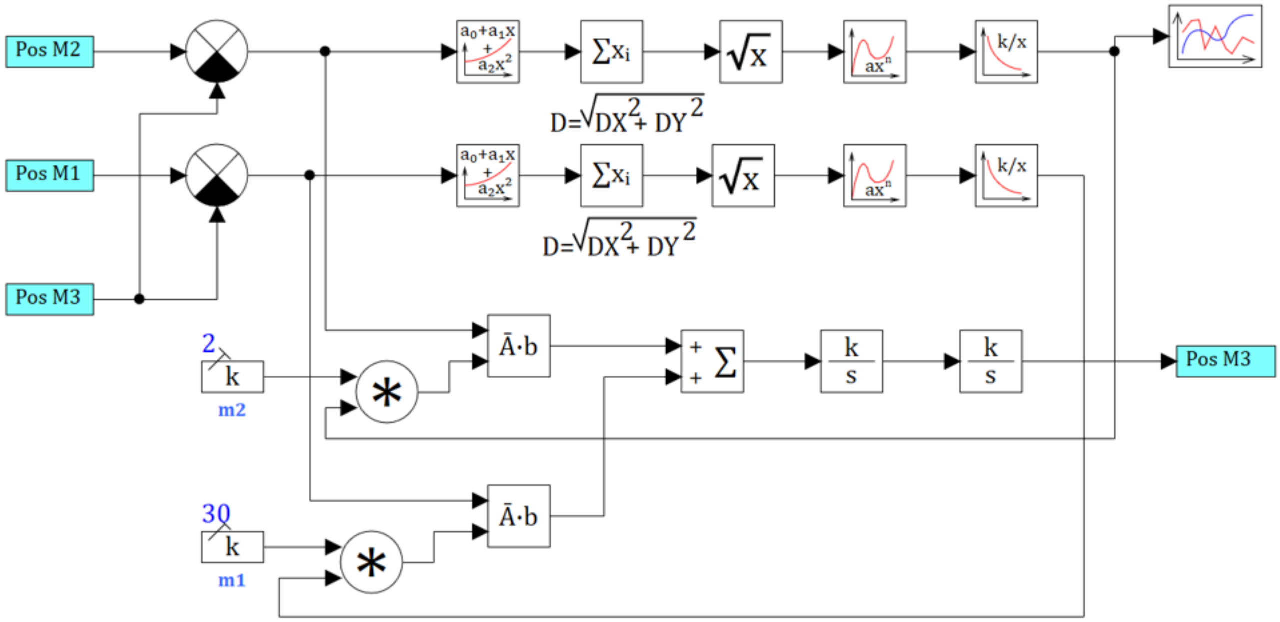

Рис. 11. Это запись уравнений для первого небесного тела «иероглифическим письмом» – структурной диаграммой пакета SimInTech. Рисунок 6 – это «демотическое письмо», а рисунок 2 – это «древнегреческая запись», опираясь на которую, можно понять, что записано на рисунках 6 и 11. Вот так в наше время загадка древнеегипетских иероглифов вернулась к нам в искусстве программирования. С другой стороны, мы говорим про непонятный текст, что это китайская грамота (иероглифы). Англичане же в таких случаях говорят так: «It's a Greek for me».

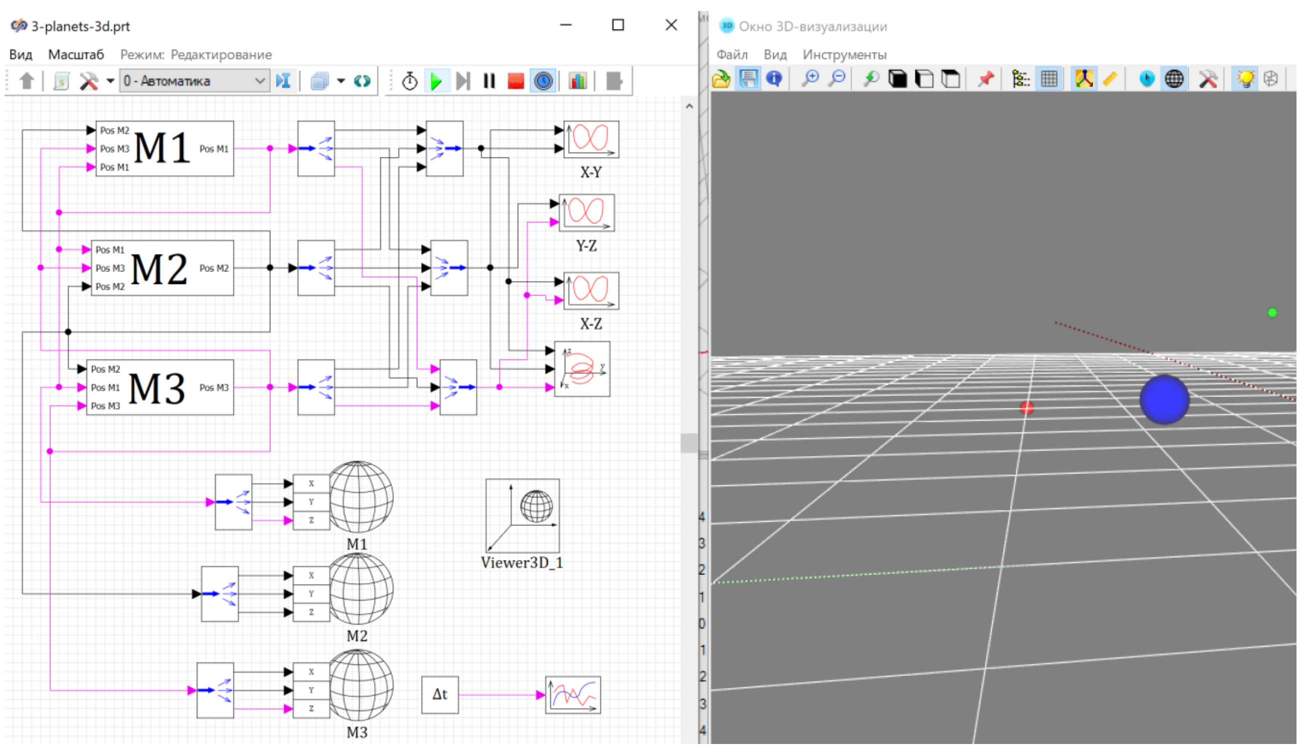

Рис. 12. А это визуализация трёхмерной задачи о трех планетах