

## Дизайнерско-математический анализ

Валерий Очков

*Профессор на первой лекции по математическому анализу показывает студентам учебник и говорит: «Первые двадцать страниц этой книги вы изучали в школе одиннадцать лет. Последние же триста страниц вам нужно будет пройти за этот семестр».*

Студенческий анекдот.

С статье рассказано, как с помощью математики и компьютера можно не только проектировать железную дорогу, например, но и создавать объекты дизайнерского искусства. Затронут вопрос дизайна при создании расчётов методом визуального динамического моделирования. Статью можно также рассматривать как... предмет развлечения. Устал делать на компьютере серьёзную работу – отвлечись! Но не раскладывай пасьянс или не разминируй поле, а реши на компьютере какую-нибудь задачу – построй, например, необычную математическую кривую!

Во многих мегаполисах мира на улице можно услышать примерно такой диалог:

– *Извините, как пройти к метро?*

– *Идите до угла вон того здания, затем поверните налево, а там увидите букву М!*

В Нью-Йорке даже поставлен памятник одному из участников такого диалога (рис. 1<sup>1</sup>).



Рис. 1. Памятник человеку, указывающему дорогу к метро

---

<sup>1</sup> Это, честно, говоря памятник человеку, ловящему такси. Но автор иначе интерпретировал этот арт-объект, когда искал одну фирму в Нью-Йорке.

В мире насчитывается более двухсот метрополитенов (<https://mic-ro.com/metro/metrologos.html>). Из них у семидесяти семи (почти магическое число) в логотипах прописана буква М (рис. 2). Правда, не везде её можно сразу увидеть.

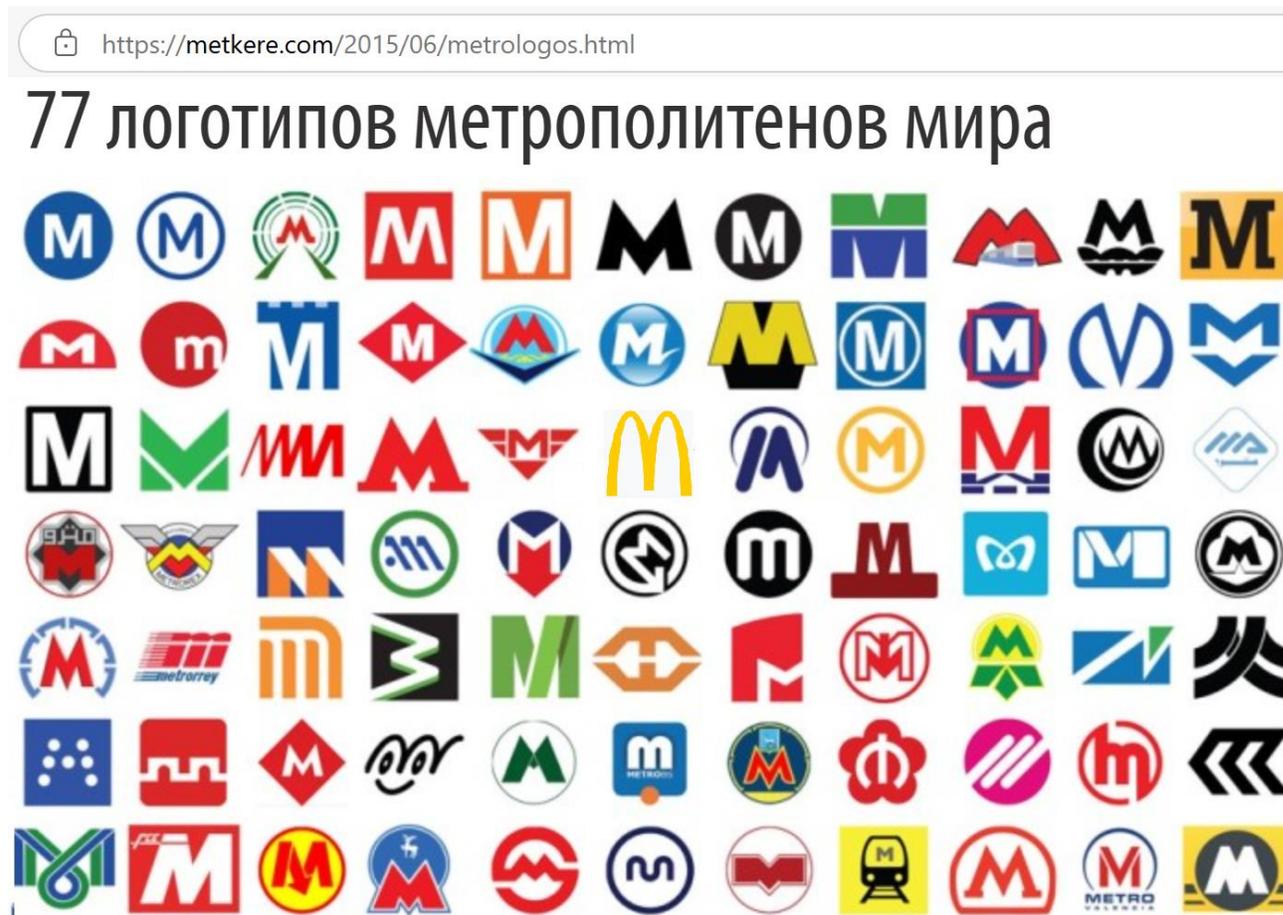


Рис. 2. Сайтов интернета с информацией о метро

Но буквой М отмечают и другие городские объекты. Автор намерено в матрицу на рис. 2 вставил логотип одной организации, не имеющей никакого отношения к метрополитену. Читатель, найди его! Мужские уличные туалеты тоже обычно помечаются буквой М. Вспомним классический уличный кино-диалог, начинающийся со слов «Папаша, огоньку не найдется?». Можно также упомянуть печально известную фирму «МММ».

Одна из целей этой статьи – показать, как можно математико-дизайнерскими средствами отделить знаки метро от других, тоже содержащих букву М.

Знак метрополитена на улице города – это по своей сути дорожный информационный знак. Такой, например, как знак парковки: белая буква Р на синем квадрате. Давно уже пора знак, указывающий на вход в метро, унифицировать. Можно представить себе, что бы случилось, если бы каждый город создавал бы свой собственный знак парковки! Какие бы замысловатые «ребусы» с буквой Р напридумывали бы тут дизайнеры!? А им только дай волю!

С другой стороны, символ метро – это не просто дорожный знак-указатель, но одновременно и логотип организаций, владеющей и/или управляющей метрополитеном. Отсюда и такой разноразбой, зафиксированный на рис. 2. Не дай бог, чтобы логотип одного метрополитена походил на другой! Тут и на судебные разбирательства можно нарваться.

Если говорить о фирменных знаках вообще, то среди них особо можно выделить те, в которых зашифровано некое техническое решение, связанное с фирмой. Два таких наиболее известных логотипа показаны на рис. 3.



Рис. 3. Два примечательных логотипа с отражением технических устройств и решений

Логотип БМВ напоминает о том, что эта фирма на заре эры авиации начинала свою работу с выпуска поршневых авиадвигателей. Круг с четырьмя секторами – это условное изображение пропеллера, рассекающего голубые небеса с белыми облаками.

Французская автомобилестроительная компания Ситроен стала первой применять шевронную зубчатую передачу. Прямые шестерни при работе сильно шумят. Косозубые зубчатые колёса работают гораздо тише, но создают большое осевое усилие. Шевронная шестеренка (рис. 3, справа) устраняет эти две проблемы<sup>2</sup>. В старых поездах метро Москвы можно услышать вой под полом вагонов, особенно в начале движения. Это «поют» прямые шестерни редуктора, передающего вращение от электродвигателя к колесам поезда. Им на поворотах «подпевают» колесные пары, катящиеся по рельсам. Причина этого скрежета в том, что на этих участках пути угловая скорость колёс в колёсных парах одинаковая, а она должна быть разная. Возникает пробуксовка, издающая этот неприятный звук. Вот мы и добрались до рельсов!

Водитель автомобиля при повороте сначала плавно поворачивает рулевое колесо на определенный угол, затем некоторое время выдерживает его, заставляя машину двигаться по дуге окружности, а потом опять же плавно возвращает руль в исходное положение для прямолинейного движения, но уже в другом направлении.

А как поворачивает поезд метро? У машиниста нет рулевого колеса – поезд метро движется по жёстким рельсам. Если на повороте их сделать в виде дуги окружности, то это приведет к тому, что в начале поворота и в его конце будут происходить боковые толчки. Представьте себе, что водитель автомобиля предельно резко дёрнул руль на повороте. Так и машину опрокинуть можно! Такие толчки приводят к ускоренному износу и рельс, и самого транспортного средства. Да и пассажирам это не понравится: «Эй, водитель, не картошку везешь!». Причина такого толчка – резкое изменение кривизны пути с нулевого значения до значения, равного обратной величине радиуса поворота.

Можно, конечно, при проектировании рельсового пути просто скопировать след автомобиля на повороте. А можно поступить иначе и вспомнить о царице наук – о математике, в частности, о математическом анализе функции одного аргумента – см. эпиграф.

Рельсы для поворотов изготавливают в виде дуги окружности, у которой на концах имеются вставки, кривизна которых плавно меняется от нуля (прямолинейный участок пути) до нужного значения.

---

<sup>2</sup> Тема очень близка автору – он после школы поработал фрезеровщиком-зуборезчиком в ремонтно-механическом цехе московского завода «Серп и молот».

Такую кривую называют *переходной* ([https://ru.wikipedia.org/wiki/Переходная\\_кривая](https://ru.wikipedia.org/wiki/Переходная_кривая)). Есть много кривых, обладающих таким свойством. Простейшая из них – это кубическая парабола  $x^3$ . Давайте всё это нарисуем на графиках в среде динамического моделирования SimInTech<sup>3</sup> и получим удовольствие, о котором упоминалось в abstract!

Честно говоря, это программное средство не очень-то подходит для решения задачи о переходной кривой. В среде SimInTech главным параметром является время, определяющее динамику моделируемых процессов. У нас же исходным параметром будет не время, а расстояние. Не беда – мы время превратим в расстояние. По древнегреческой легенде, Хаос породил самое древнее, что было в нашей начинающейся Вселенной — Время. Эллина звали его Хронос. Затем всё стало происходить во времени, так как пространство ещё только зарождалось (<https://ru.wikipedia.org/wiki/Хронос>). Мы тоже вслед за Хроносом породим пространство из времени.

На рисунке 4 показано, как в среде SimInTech запускается линейный сигнал (поезд метро выезжает из депо – см. стрелочку, выходящую из левого прямоугольника) – генерируются значения аргумента  $x$ , по которому строится два графика – график самой кубической параболы и график её кривизны (рис. 5).

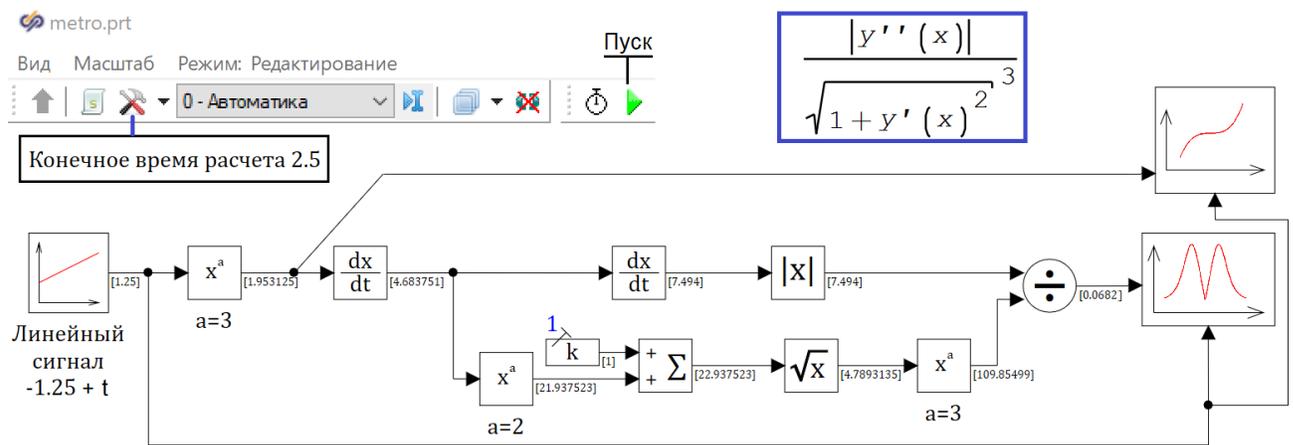


Рис. 4. Блок-схема построения графика кривизны кубической параболы

Линейный сигнал возводится в третью степень (наша кубическая парабола), потом вычисляется<sup>4</sup> первая производная, далее вычисляется ещё одна первая производная (получается вторая производная), по которой находится абсолютное значение. Получается числитель дроби, задающей кривизну функции одного аргумента – см. формулу в голубой рамочке на рис. 4 ([https://ru.wikipedia.org/wiki/Кривизна#Кривые\\_на\\_плоскости](https://ru.wikipedia.org/wiki/Кривизна#Кривые_на_плоскости)). Параллельно вычисляется знаменатель этой дроби: первая производная возводится в квадрат, далее к квадрату производной прибавляется единица, затем берётся квадратный корень, который возводится в куб. В итоге числитель делится на знаменатель (элемент со знаком деления в кружочке) и получается искомая кривизна кубической параболы, которая отображается на графике. (рис. 5, справа). Квадратики и кружочки, а также соединительные линии связи (рис. 4), человек рисует сам, выбирая мышкой нужные инструменты из

<sup>3</sup> Этот компьютерный пакет (Симуляция В Технике) можно в пробной версии скачать с сайта [www.simintech.ru](http://www.simintech.ru).

<sup>4</sup> Здесь обычно говорят, что первую производную находят (аналитически), а не вычисляют. Но пакет SimInTech – это не символьная, а численная математика. Когда-то давно – во времена появления цифровых ЭВМ говорили так: «Численное взятие производной – это некорректно поставленная математическая задача. Другое дело – это численное определение интеграла!». В наше время при бурном развитии прикладной математики вычисление производной стало не просто корректной, а вполне рутинной операции. Но всегда нужно помнить о том, что численная математика в отличие от компьютерной математики аналитических преобразований имеет «ахиллесову пята» – ошибку вычислений.

палитры элементов, о которой будет сказано ниже (рис. 17). Нажатие на кнопку пуск запускает расчёт – открывает гипотетическую задвижку, пускающую в расчёт поток времени, которое преобразуется в пространство, в производные и в прочие величины, текущие значения которых отображаются в квадратных скобках на линиях связи (зафиксированы конечные значения при  $x=1.25$ ). Эти числа можно убрать, нажав на особую кнопку. Щелчок мышкой по иконкам графиков, показанных справа на рис. 4, вызывает окна с этими графиками (рис. 5).

Квадратики и кружочки на рис. 4 можно уподобить дорожным знакам, предписывающим потоку числовых значений изменяться по определённым законам. Кстати, в среде SimInTech есть явный, а не завуалированный дорожный знак «Стоп» («кирпич» – см. предпоследний ряд иконок на рис. 17), отмечающий, что дальше движение запрещено. Можно также заметить, что рисунки 4 и 11 (см. ниже) подобны... схемам метрополитена со станциями, переходами и перегонами.

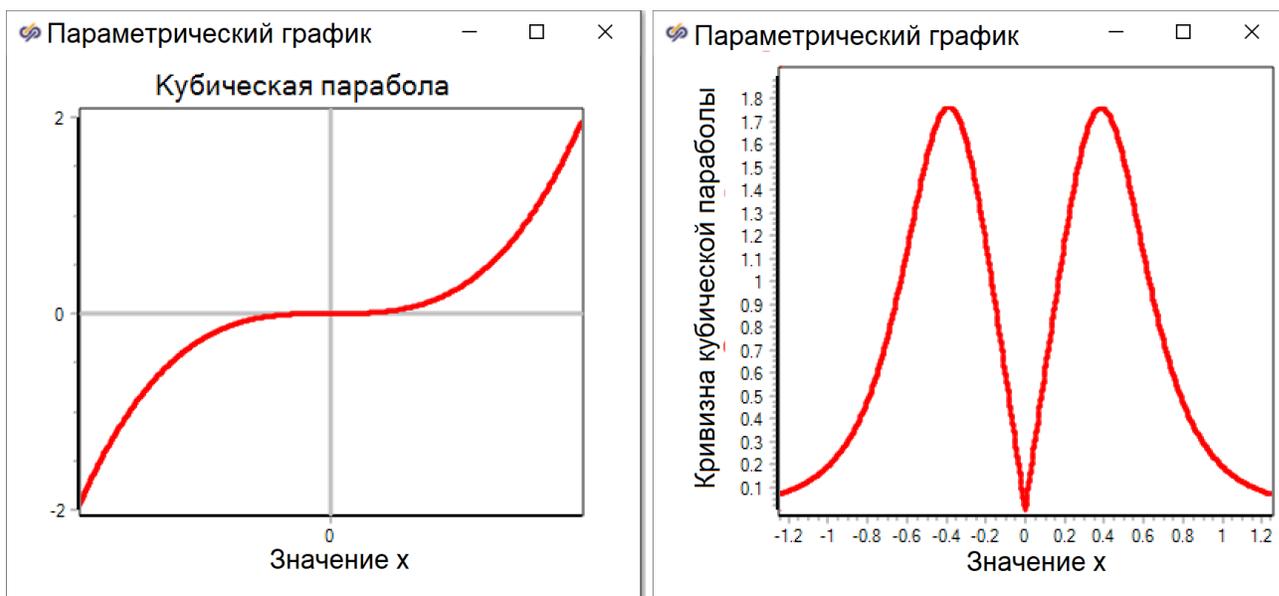


Рис. 5. Кубическая парабола и её кривизна

График кривизны кубической параболы представляет собой стилизованную букву М, заставляющую вернуться к началу статьи – сделать обратную связь, как говорят пользователи SimInTech и люди, связанные с автоматическим регулированием. Этот знак автор запатентовал<sup>5</sup> (рис. 6) и продвигает, вернее, мечтает продвинуть в качестве дорожного знака (рис. 7) для всех метрополитенов мира (рис. 7). Кубическая парабола с её кривизной, подчёркиваем ещё раз, используется для профилирования рельсового пути на поворотах поездов метро. Такая необычная, стильная буква М на входе в подземку будет лишней раз напоминать о математике вообще и о её приложении в транспорте!

<sup>5</sup> <http://tw.t.mpei.ac.ru/ochkov/Tz-1017112.pdf>. Это, по-видимому, единственное патентное свидетельство на математическую кривую. Автор это сделал не по каким-то меркантильным соображениям, а скорее из-за простого интереса: можно ли это сделать и как это сделать!?

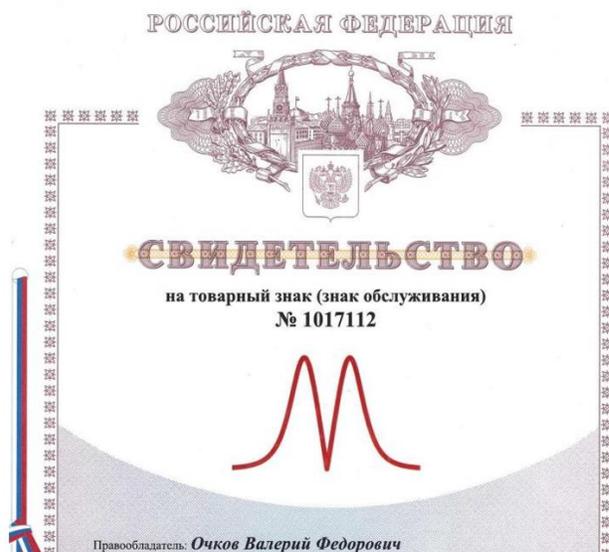


Рис. 6. Свидетельство на математическую кривую

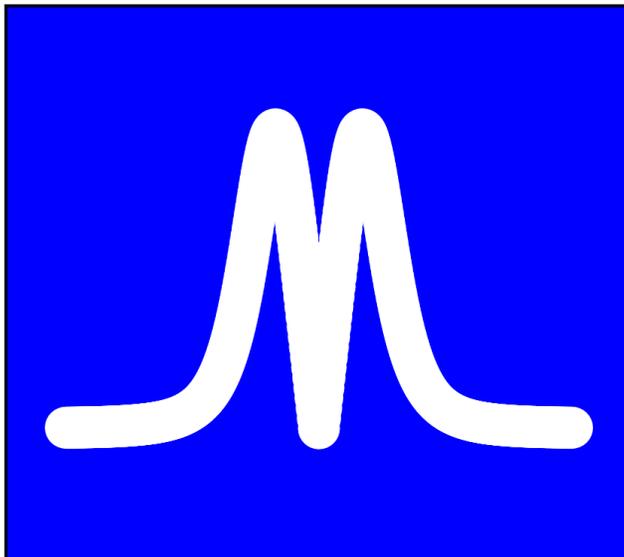


Рис. 7. Дорожный знак «Метро» с заложенной в него математикой

На рисунке 8 показан путь поезда метро при сходе с прямолинейного участка (черный цвет), на округлый участок (синий цвет), через дугу кубической параболы (красный цвет). Показана также и нормаль – серая пунктирная линия, проходящая через центр окружности поворота. Эта нормаль общая и для кубической параболы, и для окружности, где она будет радиусом. Под первым графиком размещён второй, характеризующий изменение кривизны поворота. Без вставки дуги кубической параболы мы бы здесь имели не пологий пандус, а ступеньку, об которую вагон «ударялся» бы на повороте – см. черные пунктирные линии этой ступеньки и кругового поворота без вставки дуги кубической параболы. Если график кривизны (нижний график на рис. 8) продолжить по оси абсцисс дальше вправо, то можно будет увидеть и второй пандус – вагон съезжает с дуги окружности на прямолинейный участок пути через ещё одну дугу кубической параболы, завершая свой поворот. Так и хочется, чтобы заезд и съезд с такого «возвышения» был гладким – без изломов кривизны. Но для этого нужна не кубическая парабола, а особая переходная кривая, о которой мы поговорим ниже (см. рис. 15).

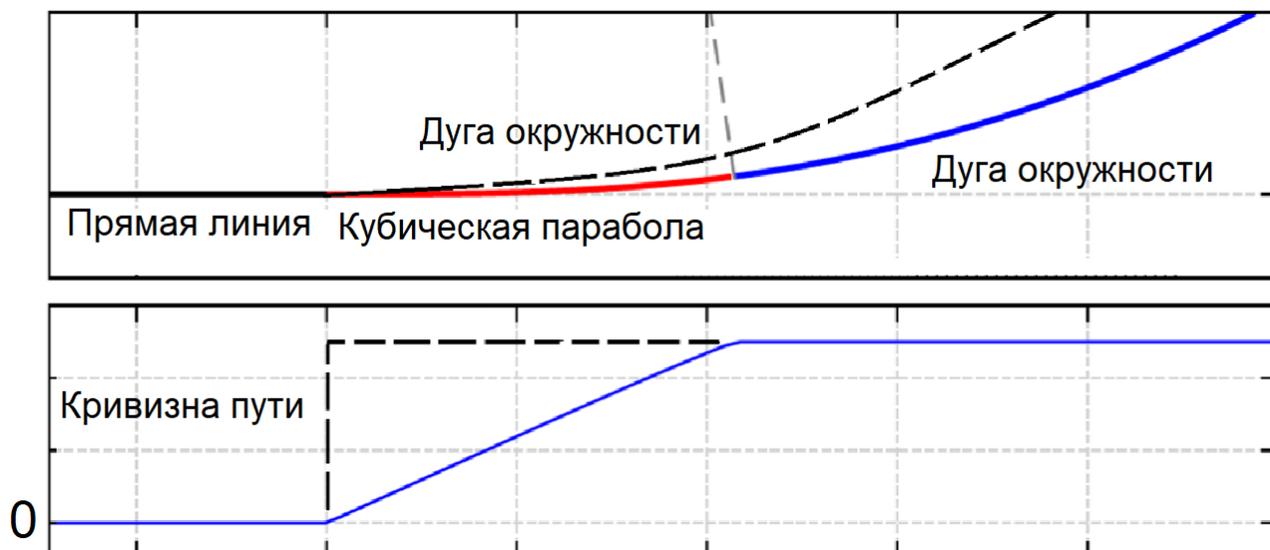


Рис. 8. Профиль рельс на повороте

Да, использование пакета SimInTech для рисования логотипа метро, это, конечно, не совсем верное решение. Тут будет уместна поговорка: «Умный в гору не пойдет – умный гору обойдет!». Это сказано про умного, а не про гениального, пардон, нетривиального человека, который не ищет простых путей, а как альпинист взбирается на гору! Ещё одна уже дизайнерская причина такого карабка на гору будет раскрыта в конце статьи.

А вот как эту «гору» можно обойти – см. рис. 9, где показано построение кубической параболы и её кривизны в среде облачной версии физико-математического пакета SMath Studio<sup>6</sup>. Производные здесь не вычисляются численно, а берутся аналитически. Это можно проделать автоматически с помощью программы SMath Studio, но лучше это сделать самому в уме. Врачи рекомендуют пожилым людям набирать номера телефонов по памяти, считать в уме, брать производные и интегралы, вычислять сходящиеся ряды и т.д. А то подойдут к пенсионеру два человека с фамилиями Паркинсон и Альцгеймер и спросят: «Третьим будешь?». Таблицу производных всех элементарных функций запомнить трудно, но некоторые из них помнить и использовать необходимо. В профилактических, медицинских целях!

<sup>6</sup> Очков, В. Ф. 16 занятий МИТ: Математика — Информатика — Техника / В. Ф. Очков. — Санкт-Петербург : Лань, 2025. — 292 с. — ISBN 978-5-507-51700-8. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/455684> (дата обращения: 03.05.2025). — Режим доступа: для авториз. пользователей. В этой книге глава 1 посвящена математическому анализу рельсового пути.

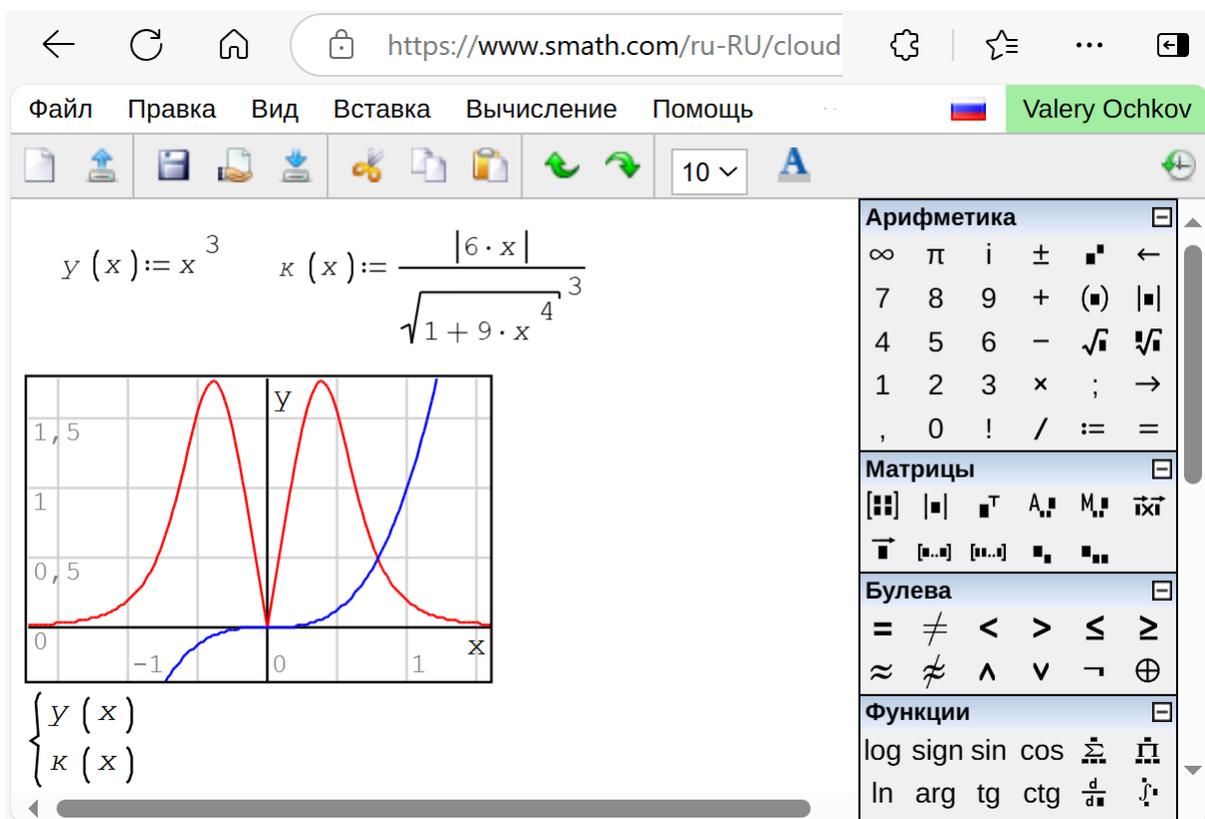


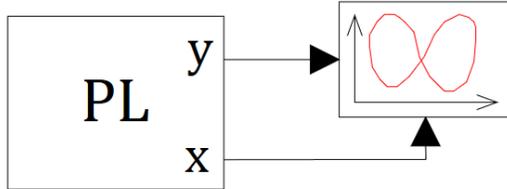
Рис. 9. Построение кубической параболы и графика её кривизны в среде SMATH Studio

Для железнодорожного транспорта, особенно для высокоскоростных магистралей, где опасность схода с рельс подвижного состава намного выше, чем у трамвая или поезда метро, в качестве переходной кривой используют не кубическую параболу, простую в расчётах, а *спираль Эйлера* (рис. 10, *клотоиду*), у которой кривизна (рис. 11) меняется линейно (рис. 12)<sup>7</sup>. Интегралы на рис. 10 тоже имеют имя – это интегралы Френеля, с которыми пакет SimInTech прекрасно справился и построил так называемый параметрический график (решение Л.М. Скворцова). Если параметр time будет стремиться к бесконечности, то спираль Эйлера будет сворачиваться в точку, у которой значение кривизны равно бесконечности. А у кубической параболы кривизна далеко не линейная. Она растёт, достигает максимума, а потом падает. Отрезок от нуля до точки максимума используется в качестве переходной кривой для рельсового пути не слишком быстрого транспорта. У кривой Эйлера для рельсов тоже используется только начальный участок. Остальное (спираль, завитушку) можно не выбрасывать, а использовать в качестве «архитектурного излишества» при оформлении станций метро, особо отмечая математический смысл всего этого.

<sup>7</sup> У автора есть коллега в Германии ([twit.mpei.ac.ru/ochkov/Physic-in-School-1-2024.pdf](http://twit.mpei.ac.ru/ochkov/Physic-in-School-1-2024.pdf)). Его бывший студент работает на предприятии, изготавливающим стрелочные переводы для скоростных поездов Китая. Они работают со спиралью Эйлера!

$$x(t) := \int_0^t \cos(u^2) du$$

$$y(t) := \int_0^t \sin(u^2) du$$



```

init x=0, y=0;
x'=cos(time^2);
y'=sin(time^2);
output y, x;

```

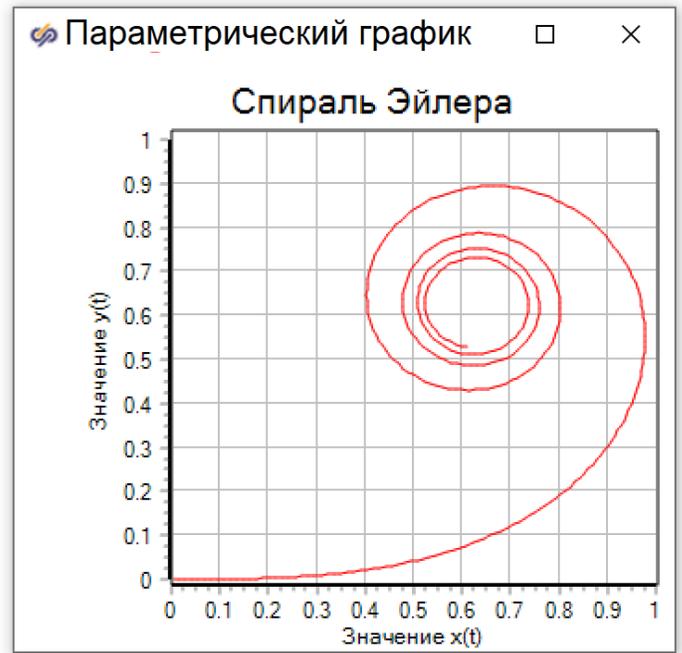
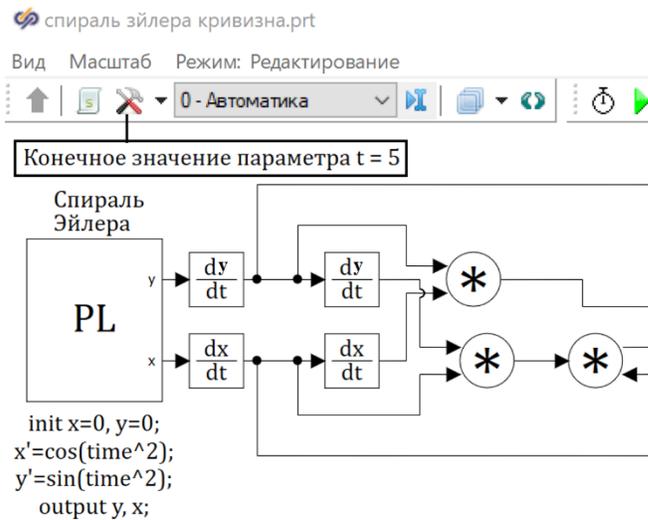


Рис. 10. Построение спирали Эйлера



$$\kappa(t) := \frac{|y''(t) \cdot x'(t) - y'(t) \cdot x''(t)|}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}^3}$$

Рис. 11. Построение графика кривизны спирали Эйлера

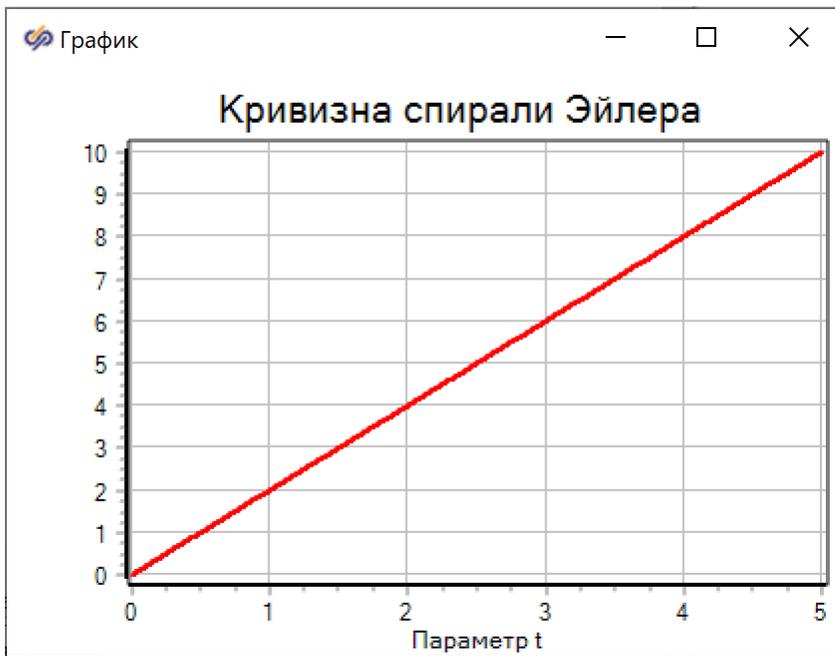


Рис. 12. Графика кривизны, вернее, «прямоты» спирали Эйлера

Универсальный знак для метрополитенов всего мира (рис. 7) можно окрашивать в национальные цвета – см. рис. 13, где показан знак, предлагаемый автором для метро Казани.

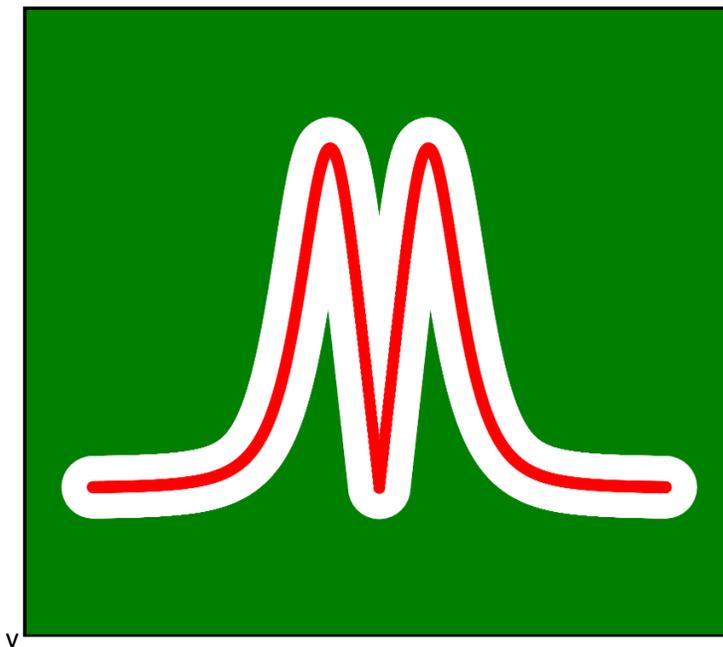


Рис. 13. Перспективный логотип Казанского метрополитена

Дело в том, что в этом городе был вполне типичный логотип метро. Его можно увидеть на пересечении шестой строки и пятого столбца матрицы на рис. 2. Но этот знак посчитали

тривиальным, схожим со многими подобными знаками, и заменили<sup>8</sup> на другой (рис. 14), где букву М почти невозможно увидеть.



Рис. 14. Логотип Казанского метрополитена

На рисунке 15 показана ещё одна переходная кривая – овал Толстого<sup>9</sup> (частный случай овала Кассини – <https://mathcurve.com/courbes2d/cassini/cassini.shtml>) и его кривизна (синяя линия). В овале Кассини в отличие от всем известного эллипса заложено произведение (см. букву П на рис. 16), а не сумма расстояний до двух фокусов.

Кривизна овала Толстого (рис. 15) в отличие и от кривизны кубической параболы (рис. 5) и спирали Эйлера (рис. 12) плавно возрастает от нулевой точки. Природа, включая и вторую природу – плоды ума и рук человеческих, не терпит не только острых, но и тупых углов.

Изображение, показанное на рис. 15, также может стать логотипом, но не метрополитена, а, например, завода, выпускающего подвижной состав для железных дорог.

---

<sup>8</sup> Сотрудники PR-отделов всех компаний мира спят и видят, как руководство принимает решение о ребрендинге. Вот тут-то можно показать себя во всей красе. Заодно дать возможность дизайнерам и самим себе хорошо заработать.

<sup>9</sup> Очков В.Ф., Чудова Ю.В. Овал Толстого // Энергия: экономика, техника, экология. № 9. 2023. (<http://twf.mpei.ac.ru/ochkov/EEE-1-2024-Tolstoy-Oval.pdf>).

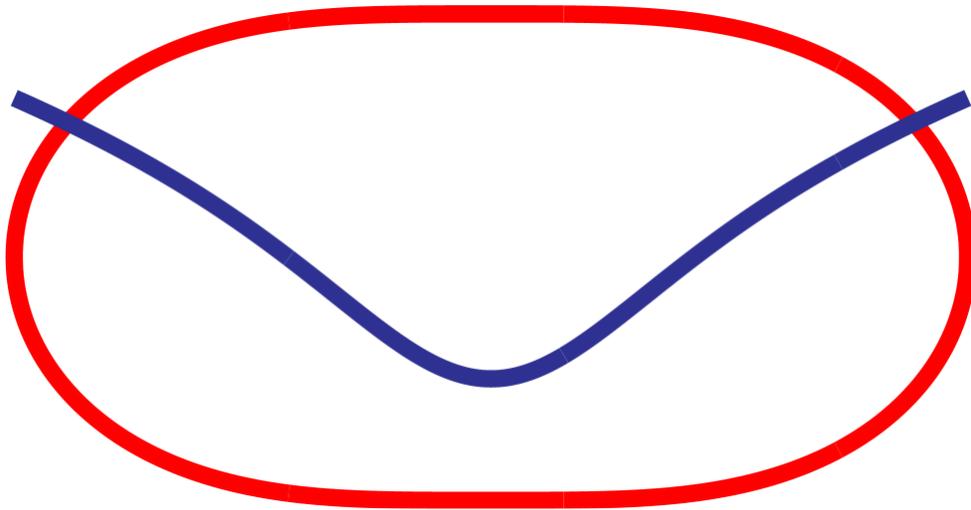


Рис. 15. Овал Толстого и его кривизна

Если овал Толстого разрезать в середине по вертикали пополам, переместить половинки овала влево и вправо, а концы дуг соединить отрезками прямых, то получится так называемый стадиум Толстого (рис. 16) – самая подходящая замкнутую кривую для испытательного железнодорожного полигона. Кривизна такого овала меняется плавно – см. синюю линию на рис. 15.

$$X_F := \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad Y_F := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad N := \text{rows}(X_F) = 2$$

Функции

$$Cassini(x, y) := 2 - \prod_{i=1}^N \sqrt{(x - X_{F_i})^2 + (y - Y_{F_i})^2}$$

Программирование

$$Stadium(x, y) := \text{if } x < -1 \quad Cassini(x + 1, y) \\ \text{else} \\ \text{if } x > 1 \\ \quad Cassini(x - 1, y)$$

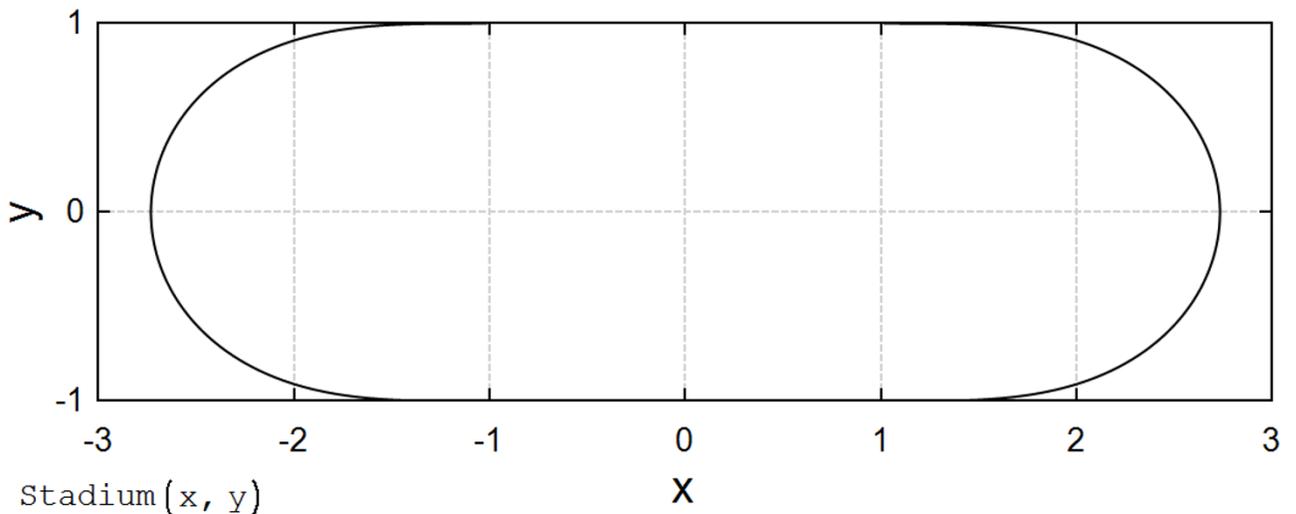


Рис. 16. Стадиум Толстого (SMath Studio)

Ещё немного про дизайн.

Уже было отмечено, что рисунки 4 и 11 чем-то напоминают схемы метрополитена со станциями, перегонами и переходами. К созданию таких схем привлекаются ведущие дизайнерские фирмы. Но некие дизайнерские подходы можно применить и к самим расчётным схемам, описанным в данной статье. Схема на рисунке 4 (кривизна кубической параболы) – это, можно сказать, классический вариант, где исходные данные вводятся слева, а ответ выдается справа. И нет пересечений линий связи. Над проектом же на рисунке 11 (кривизна спирали Эйлера), автор долго бился, сводя к минимуму число точек пересечения линий связи. Такая точка оказалась только одна за счет отхода от «классики» – вывод искомого графика оказался внутри расчетной схемы. Вот тут-то и открывается «непаханое поле» для дизайнера, подсаживающегося к пользователю пакета SimInTech! Расчёт должен быть не только правильным, но и красивым с точки зрения дизайнера! А ещё лучше, когда его внешняя форма что-то говорит об его внутреннем содержании.

И еще одна работа, где дизайнер может приложить руку.

