

# Подводная лодка «Наутилус»: расчеты на компьютере

В романе Жюль Верна «20 000 лье под водой» [1] зашифровано несколько физико-математических задач, решение которых позволяет показать широкий спектр инструментов математических пакетов: символьную, численную и гибридную математику, плоскую и объемную графику, анимацию, оптимизацию, решение алгебраических и дифференциальных уравнений и их систем, программирование, работу с физическими величинами, ссылки на облачные функции и др. Сам же процесс аудиторного решения задач романа оказывается в тренде современной образовательной технологии под названием STEM Education (Science, Technology, Engineering и Mathematic), когда на одном занятии поднимаются темы разных учебных дисциплин: литературы, изобразительного искусства, истории, математики, информатики, физики, инженерного дела, политологии, «чистого» искусства и даже религии<sup>1</sup>. Попутно «работа над романом» позволила выявить одну интересную ошибку символьной математики пакетов Mathcad, Maple и Mathematica.

## 1. Размеры подводной лодки

Вот цитата из оригинального французского текста романа<sup>2</sup>: «Voici, monsieur Aronax, les diverses dimensions du bateau qui vous porte. C'est un cylindre très allongé, à bouts coniques. <...>. Ces deux dimensions vous permettent d'obtenir par un simple calcul la surface et le volume du Nautilus. Sa surface comprend mille onze mètres carrés et quarante-cinq centièmes; son volume, quinze cents mètres cubes et deux dixièmes — ce qui revient à dire qu'entièrement immergé il déplace ou pèse quinze cents mètres cubes ou tonneaux.»

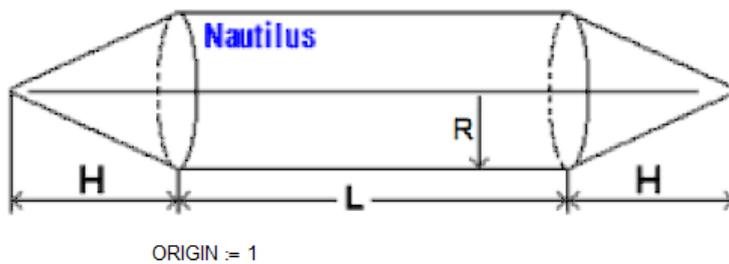
---

<sup>1</sup> Вернее, теологии, религиоведения и, если хотите, атеизма. В этом смысле аббревиатуру STEM можно расширить до аббревиатуры STEAM или даже STREAM, где буква A означает искусство (Art), а буква R — религию (Religion). Steam, кстати, по-английски — это водяной пар, который на стыке XVIII и XIX века совершил промышленную революцию в Европе и Северной Америке (Industry 1.0). Stream же по-английски — это стремнина, поток, поток водяного пара из котла в паровую машину. Можно считать, что технология STEM/STEAM/STREAM на стыке XX и XXI века совершает новую (четвертую) промышленную революцию (Industry 4.0). Можно также использовать и аббревиатуру SAR: Science, Art и Religion: человеческая цивилизация покоится на трех «китах» — на науке, на искусстве и на религии (или на том, во что превратилась религия в наши дни).

<sup>2</sup> Перевод на русский язык можно увидеть на рис. 1.

Капитан Немо сообщает своему пленнику — профессору Аронаксу, что подводная лодка, на которой они находятся, имеет форму геометрического тела, составленного из двух одинаковых прямых круговых конусов (нос и корма лодки) и прямого кругового цилиндра (корпус лодки — см. рис. 1). Радиусы оснований конусов и цилиндра равны. Известны объем лодки  $V$  в кубических метрах и площадь ее наружной поверхности  $S$  в метрах квадратных. Необходимо определить ее геометрические размеры — радиус основания двух конусов и цилиндра  $R$ , высоту двух конусов (длину носа и кормы)  $H$  и высоту цилиндра (длину корпуса)  $L$  (обозначения авторов статьи, а не Жюль Верна)

Задача сводится к решению системы двух нелинейных алгебраических уравнений (уравнения объема  $V = \dots$  и уравнения поверхности  $S = \dots$ ) с тремя неизвестными  $R$ ,  $H$  и  $L$ . У нас система получилась *недоопределенная*, т.к. число уравнений меньше числа неизвестных.



Судно представляет собой сильно удлиненный цилиндр с коническими концами. Площадь его равняется одной тысяче одиннадцати и сорока пяти сотым квадратных метров, объем равен одной тысяче пятистам и двум десятым кубических метров; короче говоря, корабль, полностью погруженный в воду, вытесняет тысячу пятьсот и две десятых кубических метров, или тонн, воды.

$$LV(R, H, V) = V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot R^2 \cdot H + \pi \cdot R^2 \cdot L + \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot R^2 \cdot H \text{ solve } L \rightarrow \frac{V - \frac{2 \cdot \pi \cdot H \cdot R^2}{3}}{\pi \cdot R^2}$$

$$LS(R, H, S) = S = \pi \cdot R \cdot \sqrt{R^2 + H^2} + 2\pi \cdot R \cdot L + \pi \cdot R \cdot \sqrt{R^2 + H^2} \text{ solve } L \rightarrow \frac{S - 2 \cdot \pi \cdot R \cdot \sqrt{H^2 + R^2}}{2 \cdot \pi \cdot R}$$

$$H(R, V, S) = LV(R, H, V) = LS(R, H, S) \text{ solve } H \rightarrow \left[ \frac{3 \cdot (9 \cdot R \cdot S - 18 \cdot V + 2 \cdot \sqrt{9 \cdot R^2 \cdot S^2 - 20 \cdot \pi^2 \cdot R^6 - 36 \cdot R \cdot S \cdot V + 36 \cdot V^2})}{20 \cdot \pi \cdot R^2} + \frac{6 \cdot V - 3 \cdot R \cdot S}{4 \cdot \pi \cdot R^2} \right] - \frac{3 \cdot (18 \cdot V - 9 \cdot R \cdot S + 2 \cdot \sqrt{9 \cdot R^2 \cdot S^2 - 20 \cdot \pi^2 \cdot R^6 - 36 \cdot R \cdot S \cdot V + 36 \cdot V^2})}{20 \cdot \pi \cdot R^2}$$

$$V = 1500.2 \text{ m}^3 \quad S = 1011.45 \text{ m}^2 \quad R = 1 \text{ m}, 1.0001 \text{ m} \dots 13 \text{ m}$$

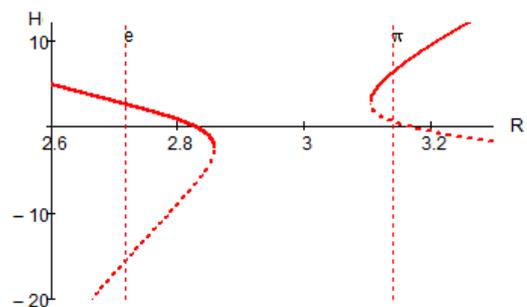
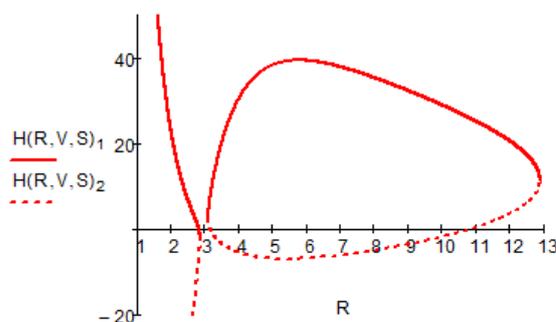


Рис. 1. Аналитическое (символьное) и графическое решение задачи о размерах подводной лодки «Наутилус» (масштабы длин для осей  $R$  и  $H$  не соблюдены)

На рисунке 1 (Mathcad) можно увидеть, во-первых, геометрическую схему задачи и ее описание. Далее в расчете инструментами символьной математики (оператором `solve`) генерируются две функции — одна с именем `LV` и с тремя аргументами `R`, `H` и `V`, а вторая с именем `LS` и с тремя аргументами `R`, `H` и `S`. Первая функция получается в результате аналитического (символьного) решения<sup>3</sup> уравнения объема по переменной `L`, а вторая — уравнения поверхности по той же переменной `L`. Эти две функции образуют новое уравнение  $LV(R, H, V) = LS(R, H, S)$ , которое решается опять же аналитически<sup>4</sup> относительно переменной `H`. В результате этого решения получились два выражения, которые формируют функцию-вектор с именем `H` и с тремя аргументами `R`, `V` и `S`. По этой функции строится график, вернее два графика (сплошная линия и пунктир) при фиксированных значениях переменных (параметров)  $V = 1500.2 \text{ м}^3$  и  $S = 1011.45 \text{ м}^2$  (см. условие задачи) и при аргументе `R`, изменяющимся от 1 до 13 м с шагом 0.1 мм (левый график на рис. 1)<sup>5</sup>. Показана также увеличение области графиков функции-вектора  $H(R, V, S)$  при изменении `R` от 2.6 до 3.3 м с тем же шагом (правый график на рис. 1), где проставлены вертикали для  $R = 2.71$  и  $3.14$  м (число  $e$  и число  $\pi$  — «красивое» предположение: в размеры подводной лодки Наutilus могли быть заложены две главные математические константы).

Примечание. Жюль Верн по образованию был адвокатом, а не инженером. Этим можно объяснить излишнюю точность при задании объема и площади подводной лодки. Можно было бы спокойно задать  $V = 1500 \text{ м}^3$  и  $S = 1010 \text{ м}^2$  или даже  $S = 1000 \text{ м}^2$ . Но в научно-

<sup>3</sup> Это уравнение несложно решить и в уме переносом отдельных слагаемых из правой части в левую и т.д. Но во избежание ошибок это лучше делать автоматически на компьютере. С другой стороны, всегда полезно для тренировки ума подобные аналитические выкладки делать сначала самому «вручную», а затем проверять ответ на компьютере. Пример из повседневной жизни. Современный телефон хранит номера в своей памяти. Тем не менее, врачи рекомендуют пожилым и не только пожилым людям держать номера и в своей голове, набирая их при необходимости вручную. Это тренирует память и отдаляет «скатывание в маразм».

<sup>4</sup> Это уравнение в уме уже так просто не решить. Автор попросил сделать это одного преподавателя математики, который исписал три листа бумаги, не довел дело до конца, но сделал вполне обоснованное предположение о первопричинах ошибки символьной математики, которую мы рассмотрим ниже.

<sup>5</sup> Математические пакеты строят графики «явной» функции  $y(x)$ , табулируя значения аргумента и функции и соединяя полученные точки прямыми линиями или сглаживая их некой кривой. Если же студент на занятиях по математическому анализу начнет так строить графики, то требовательный преподаватель выгонит такого студента с занятия, топая ногами и улюлюкая вслед студенту. Мы обычно строим подобные графики более интеллигентно — качественно, а не количественно: анализируем функцию [2], ищем у ней особые точки — нули, экстремумы, точки перегиба, асимптоты, точки разрыва и проч. Поэтому-то многие преподаватели математики в школах и в вузах вполне обосновано считают, что машинная аналитика и графика отупляют студентов, отучает их работать головой... Вернее так: отупляет основную массу учащихся, но обогащает остальных — умных и добросовестных.

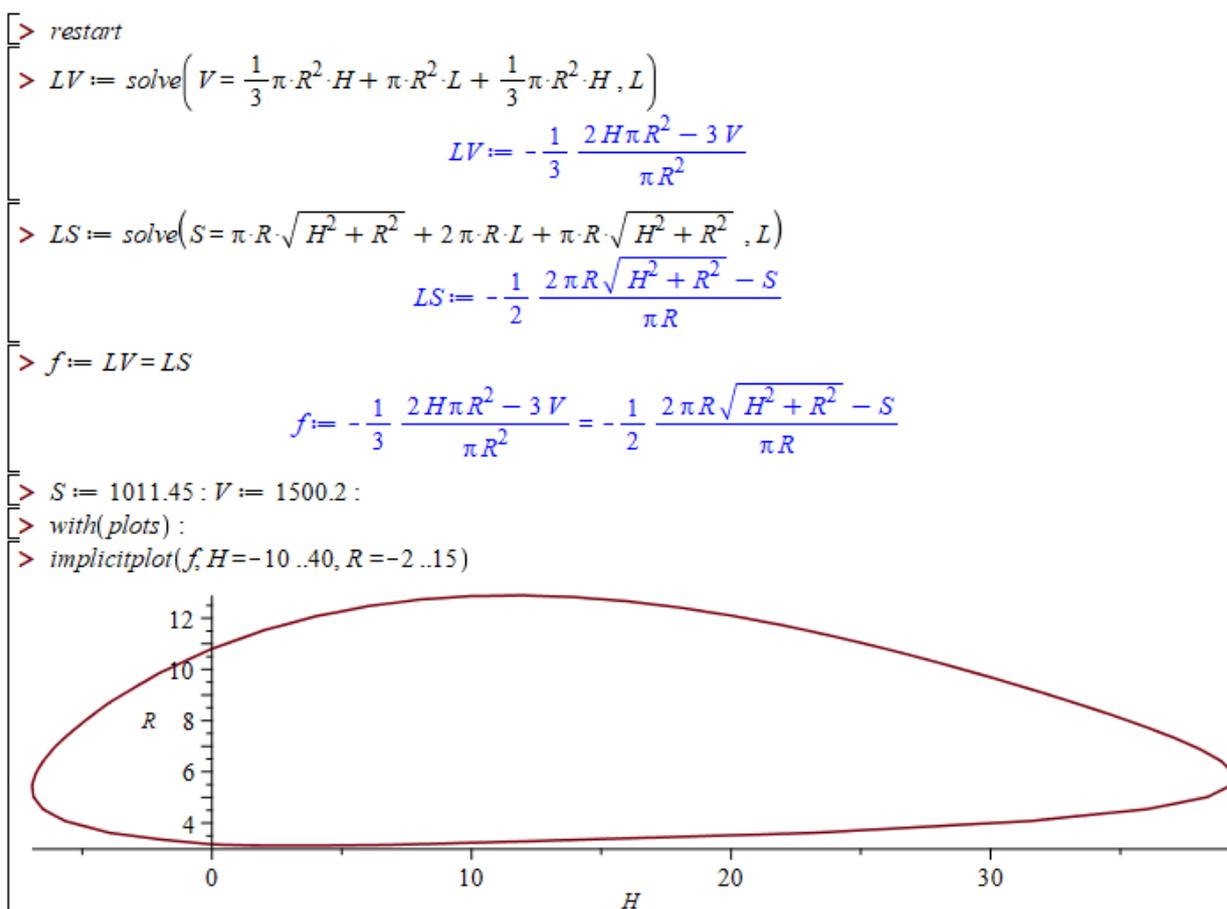
фантастических романах авторы часто стараются оперировать показной точностью, чтобы было побольше научности и поменьше фантастичности.

### 3. График неявной функции двух аргументов

Давайте построим графики, получающиеся при решении задачи о размерах подводной лодки, другим путем — не будем аналитически решать уравнение

$LV(R, H, V) = LS(R, H, S)$  и строить два отдельных графика по двум полученным выражениям (см. сплошную и пунктирную линии на рис. 1), а построим один график этой неявной функции для разных  $R$  и  $H$  и фиксированных  $V$  и  $S$ .

В среде Mathcad (см. рис. 1) нет встроенных средств для построения графика функции двух аргументов, заданной в неявном виде. Такие средства есть в среде Maple — см. рис. 2, где задействована встроенная функция *implicitplot* (неявный график), которая нарисовала только одну замкнутую кривую<sup>6</sup>. А куда девалась вторая (левая) кривая, показанная на рис. 1? Ведь, функция *implicitplot* своими аргументами эту «левую» область охватила:  $H = -10 .. 40$ .



<sup>6</sup> График неявной функции двух аргументов простым табулированием (см. сноску 5) уже не построишь. При построении таких кривых используются особые сложные численные алгоритмы, не опирающиеся на символическое решение уравнения, которого просто-напросто в ряде случаев не бывает.

Рис. 2. Построение графика неявной функции двух аргументов в среде Maple

В советское время была радиопередача «Разучим песню». Ведущий там говорил: «А теперь давайте прослушаем мелодию этой песни на другом музыкальном инструменте!».

Давайте и мы построим наш график с помощью другого «инструмента», другого математического пакета и убедимся, что левой кривой там тоже не будет.

$$\approx(a, b) := \left| \frac{a - b}{a + b} \right| < 0.0001$$

$$n := 7000 \quad R_1 := -1\text{m} \quad R_2 := 15\text{m} \quad \Delta R := \frac{R_2 - R_1}{n} \quad H_1 := -10\text{m} \quad H_2 := 60\text{m} \quad \Delta H := \frac{H_2 - H_1}{n}$$

```

(vR)
(vH) := | i ← ORIGIN
         | for R ∈ R1, R1 + ΔR .. R2
         |   for H ∈ H1, H1 + ΔH .. H2
         |     if LV(R, H, V) ≈ LS(R, H, S)
         |       | vRi ← R
         |       | vHi ← H
         |       | i ← i + 1
         |
         | (vR)
         | (vH)

```

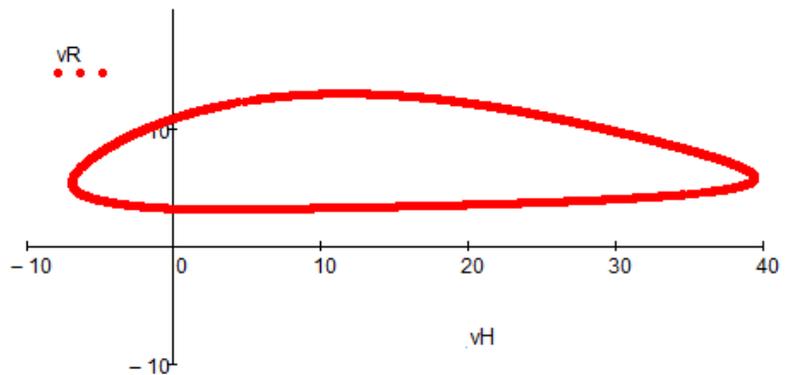


Рис. 3. Построение графика неявной функции в среде Mathcad

В среде Mathcad график неявной функции так просто построить, повторять, нельзя. Но если «нельзя, но очень хочется, то можно». На рисунке 3 показано построение такого графика сканированием прямоугольной области на декартовой плоскости. Если в очередной точке значение функции  $LV$  будет *примерно* равно значению функции  $LS$ , то координаты этой точки запоминаются в векторах  $vR$  и  $vH$ , которые затем отображаются на декартовом графике в виде замкнутой кривой. Функция *примерно равно* вызывается в нашей программе не в виде функции, а в виде инфиксного оператора. Это допустимо в среде Mathcad 15 и позволяет по форме приблизить Mathcad-документ к математическому документу, написанному «от руки» или напечатанного в учебнике и справочнике (см. п.5).

Так (см. рис. 2) или иначе (см. рис. 4), но второй кривой, полученной в результате аналитического решения уравнения  $LV(R, H, V) = LS(R, H, S)$ , на графиках неявной функции не оказалось.

Кстати, такую же ошибку с «левой» кривой, получаемой при решении алгебраического уравнения, выдал и математический пакет Mathematica, вернее, ее сетевой вариант — сайт [wolframalpha.com](http://wolframalpha.com).

#### 4. Ошибка символьной математики

Что это за ошибка символьной математики? Это «чистая» ошибка или какая-то особенность этого сравнительно нового компьютерного инструмента, заставляющая пользователей быть начеку и каждый раз проверять аналитические решения?

На рисунке 4 показан расчет размеров подводной лодки «Наутилус» (значений переменных  $H$  и  $L$ ) при двух значениях ее радиуса  $R$ , зафиксированных на правом (увеличенном) графике — см. рис. 1. Ведется также проверка значений объема подводной лодки  $V$  и ее наружной поверхности  $S$ . При  $R = 3.14$  м (число  $\pi$ ) лодка имеет такие размеры:  $H = 6.28$  (примерно  $2\pi$ ) или  $0.525$  м и  $L = 44.25$  (примерно  $14\pi$ ) или  $48.08$  м, при которых оба уравнения (уравнение объема и уравнение поверхности лодки) превращаются в тождества. Но при значении  $R = 2.71$  м (число  $e$ ) для «левой» кривой выдается неверное решение — уравнение по площади сечения превращается в тождество, а уравнение по объему — нет (см. подсвеченный оператор на рис. 4). Можно сказать, что система двух уравнений решена, но только... наполовину! В чем тут дело?

$$\begin{array}{l}
 r := 3.14\text{m} \quad h := H(r, V, S) = \begin{pmatrix} 6.277 \\ 0.525 \end{pmatrix} \text{m} \quad l := LV(r, h, V) = \begin{pmatrix} 44.248 \\ 48.083 \end{pmatrix} \text{m} \quad l := LS(r, h, S) = \begin{pmatrix} 44.248 \\ 48.083 \end{pmatrix} \text{m} \\
 \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h + \pi \cdot r^2 \cdot l + \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h = \begin{pmatrix} 1500.2 \\ 1500.2 \end{pmatrix} \cdot \text{m}^3 \quad \pi \cdot r \cdot \sqrt{r^2 + h^2} + 2\pi \cdot r \cdot l + \pi \cdot r \cdot \sqrt{r^2 + h^2} = \begin{pmatrix} 1011.45 \\ 1011.45 \end{pmatrix} \text{m}^2 \\
 \\
 r := 2.71\text{m} \quad h := H(r, V, S) = \begin{pmatrix} 2.697 \\ -16.187 \end{pmatrix} \text{m} \quad l := LV(r, h, V) = \begin{pmatrix} 63.224 \\ 75.813 \end{pmatrix} \text{m} \quad l := LS(r, h, S) = \begin{pmatrix} 55.578 \\ 42.989 \end{pmatrix} \text{m} \\
 \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h + \pi \cdot r^2 \cdot l + \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h = \begin{pmatrix} 1323.786 \\ 742.88 \end{pmatrix} \cdot \text{m}^3 \quad \pi \cdot r \cdot \sqrt{r^2 + h^2} + 2\pi \cdot r \cdot l + \pi \cdot r \cdot \sqrt{r^2 + h^2} = \begin{pmatrix} 1011.45 \\ 1011.45 \end{pmatrix} \text{m}^2
 \end{array}$$

Рис. 4. Верификация решения, полученного аналитическим и численным способом (см. рис. 1)

Как предположил математик, упомянутый в сноске 4, эта ошибка, по-видимому, связана вот с чем. Символьная математика всех перечисленных математических пакетов (Maple, Mathcad и Mathematica) подстановкой одного выражения вместо другого сводит решение сложного алгебраического уравнения к решению квадратного уравнения, у которого два корня, один из которых правильный, а второй *посторонний*, полученный при решении исходных уравнений с невольным расширением области определения неизвестных.

Поэтому два выражения, полученные в результате символьного решения уравнения  $LV(R, H, V) = LS(R, H, S)$ , при одних значениях  $R$  выдают правильные значения  $H$ , а при других неверные. Левая кривая, показанная на рис. 1, оказалась «левой» не только по

своему местоположению на нашем графике, но и по своей сути! А можно сказать и так: второй корень нашей системы уравнений оказался не только *посторонним*, но и *потусторонним*. Букву же М в аббревиатурах STEM / STEAM / STREAM можно расшифровать не только как *математика*, но и как *мистика* (Mystic – см. сноску 1).

Считается, что символьная математика компьютерных пакетов выдает либо абсолютно точный ответ, либо совсем не выдает ответа, вернее, выдает сообщение, что ответ не найден. Тут приходится прибегать к численной математике — к математике приближенных вычислений. Но, как показал вышеприведенный пример, символьная математика может выдавать и неверные ответы. Эта одна из причин, почему в настоящее время инженеры все чаще и чаще отказываются от аналитических (символьных) методов решения задач и обращаются к численным: лучше иметь неточный, приближенный ответ, чем никакой или неверный!

### 5. Оператор «Примерно равно»

В среде Mathcad и в средах других математических пакетов, а также в языках программирования нет очень востребованного оператора «примерно равно»<sup>7</sup>. Поэтому его пришлось создать — см. первый оператор в расчете на рис. 3. В программе с двумя циклами, один из которых вложен в другой, этот пользовательский оператор вызывается в виде инфиксного оператора, что существенно помогает чтению и пониманию расчета человеком. А это один из «коньков» пакета Mathcad, во многом определивших его популярность.

### 5. Снова о размерах «Наутилуса»

В романе Жюль Верна, кстати, есть прямое указание на размеры «Наутилуса» — максимальный диаметр лодки равен восьми метрам, а ее длина — семидесяти метрам. Расчеты, показанные на рис. 5, с точностью полметра подтверждают это.

---

<sup>7</sup> В среде Mathcad есть *шесть* традиционных инфиксных операторов сравнения: *равно*, *не равно*, *больше*, *меньше*, *больше или равно* и *меньше или равно*. Но «бог любит не только троицу», но и *семерку*. Вспомним семь цветов радуги, семь нот, семь чудес света, семь древних мудрецов и т.д. до семи дней в неделе. В аббревиатуру STEM, как мы уже отметили, не хватает букв A (Art) и R (Religion). А религия по-прежнему играет большую роль в нашей жизни. Конкретный пример. Если семь цветов радуги — это чистая физика, то семь дней недели — это чистая религия, вернее, религия с примесью физиологии человека. И не понятно, человек ли подстраивался под религию, или религия подстраивалась под человека. Оператор «примерно равно» очень востребован в численной математике. Поэтому неплохо бы сделать его встроенным — седьмым. Правда, этот оператор зависит от нашего представления о том, что это такое «примерно равно». Кстати, в математическом анализе есть понятия «*намного больше* >>» и «*намного меньше* <<», которые также контекстно зависимы.

$$\begin{aligned}
 r &:= 4\text{ m} & h &:= H(r, V, S)_1 = 30.411\text{ m} & l &:= LV(r, h, V) = 9.572\text{ m} & l &:= LS(r, h, S) = 9.572\text{ m} \\
 \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h + \pi \cdot r^2 l + \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h &= 1500.2 \cdot \text{m}^3 & \pi \cdot r \cdot \sqrt{r^2 + h^2} + 2\pi \cdot r l + \pi \cdot r \cdot \sqrt{r^2 + h^2} &= 1011.45 \text{ m}^2 \\
 h + l + h &= 70.393\text{ m}
 \end{aligned}$$

Рис. 5. Проверка расчетов размеров подводной лодки, приведенных в романе

Можно попытаться данные о размерах лодки, приведенные в романе и принятые в расчете на рис. 5, проверить и другим путем — составить систему трех уравнений (объем лодки, ее поверхность и общая длина) с двумя неизвестными:  $H$  (длина носа и кормы) и  $L$  (длина цилиндрической части лодки). Если наша первая система уравнений (см. рис. 1) была *недоопределенной* (два уравнения с тремя неизвестными), то новая система уравнений (рис. 6) стала *переопределенной* (три уравнения с двумя неизвестными).

$$\Sigma L := 70\text{ m} \quad R := 4\text{ m} \quad S := 1011.45\text{ m}^2 \quad V := 1500.2\text{ m}^3$$

Given

$$H := 10\text{ m} \quad L := \Sigma L - H - H = 50\text{ m}$$

$$\Sigma L = H + L + H$$

$$S = \pi \cdot R \cdot \sqrt{R^2 + H^2} + 2\pi \cdot R L + \pi \cdot R \cdot \sqrt{R^2 + H^2}$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot R^2 \cdot H + \pi \cdot R^2 L + \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot R^2 \cdot H$$

$$\begin{pmatrix} H \\ L \end{pmatrix} := \text{Find}(H, L) = \text{No solution}$$

Рис. 6. Попытка численного решения переопределенной системы уравнений

Попытка решить переопределенную систему уравнений (рис. 6) оказалась неудачной. Встроенная в Mathcad функция Find не нашла численных значений неизвестных  $H$  и  $L$ , превращающих три уравнения в три тождества. Вернее, почти в тождества, когда правые и левые части уравнений отличаются друг от друга на заданную малую величину, хранящуюся в системной переменной STOL (0.001 по умолчанию).

Уравнения и системы уравнений можно решать символьно (рис. 1), численно (рис. 8 ниже) и (бог любит троицу) графически. На рисунке 7 показано такое графическое решение с использованием уже описанного нами метода программного сканирования прямоугольной области. Если бы корень переопределенной системы трех уравнений с двумя неизвестными был бы найден, то три линии на графике пересеклись бы в одной

точке: почти в одной точке, если вспомнить о другом названии численной математики — математика приближенных выкладок.

$$\approx(a, b) := \left| \frac{a - b}{a + b} \right| < 0.00001 \quad \text{Or}(a) := \max(a)$$

$$n := 1000 \quad H_1 := 29\text{m} \quad H_2 := 31\text{m} \quad \Delta H := \frac{H_2 - H_1}{n}$$

$$L_1 := 9\text{m} \quad L_2 := 10.5\text{m} \quad \Delta L := \frac{L_2 - L_1}{n}$$

$$\begin{pmatrix} vL \\ vH \end{pmatrix} := \begin{array}{l} i \leftarrow \text{ORIGIN} \\ \text{for } L \in L_1, L_1 + \Delta L .. L_2 \\ \quad \text{for } H \in H_1, H_1 + \Delta H .. H_2 \\ \quad \left[ \begin{array}{l} \Sigma L \approx \left( H + \frac{S - 2 \cdot \pi \cdot R \cdot \sqrt{H^2 + R^2}}{2 \cdot \pi \cdot R} + H \right) \\ \text{if Or} \\ \quad V \approx \left( \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot R^2 \cdot H + \pi \cdot R^2 L + \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot R^2 \cdot H \right) \\ \quad \left[ S \approx \left( \pi \cdot R \cdot \sqrt{R^2 + H^2} + 2\pi \cdot R L + \pi \cdot R \cdot \sqrt{R^2 + H^2} \right) \right] \end{array} \right] \\ \quad vL_i \leftarrow L \\ \quad vH_i \leftarrow H \\ \quad i \leftarrow i + 1 \end{array}$$

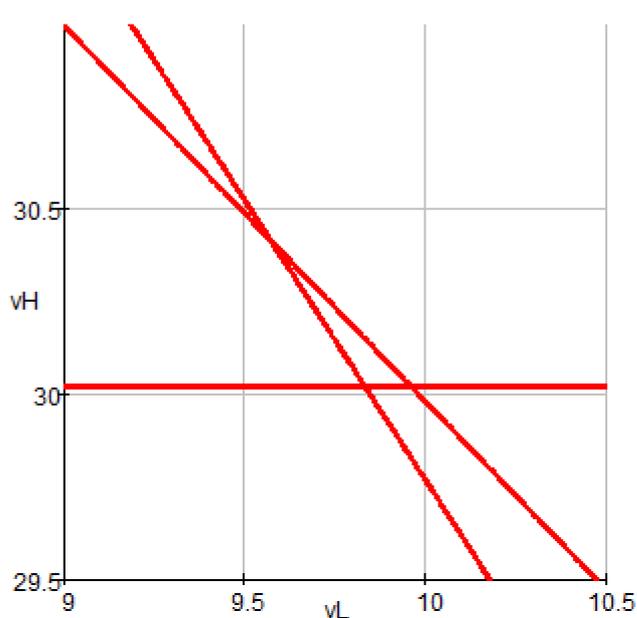


Рис. 7. Попытка графического решение переопределенной системы уравнений

Примечание. В расчет, показанный на рис. 7, вводится не только пользовательская функция «примерно равно», но и пользовательская функция Or (логическое сложение). В

среде Mathcad есть такой встроенный инфиксный оператор, имеющий символ  $\vee$ , но у него только два аргумента. А нам нужно три аргумента. Кроме того, этот оператор нередко путают с символом  $\wedge$  (логическое умножение). Поэтому-то нами и была введена в обиход функция  $\text{Or}$ , у которой может быть более двух аргументов. Кроме того, пользовательская функция  $\text{Or}$  в отличие от встроенного оператора  $\vee$  правильно работает и с *нечеткой логикой*, когда аргументами могут быть не только два целочисленных (четких) значений 0 (ложь) или 1 (истина), но и бесконечное множество нецелых («нечетких») значений в диапазоне от 0 до 1.

#### 6. Гибридная математика: число и символ

Для случая, отмеченного на рисунках 6 и 7, в среде Mathcad предусмотрена встроенная функция с именем  $\text{MinErr}$  (Minimal Error — минимальная ошибка — см. рис. 8), которая при отсутствии решения у системы уравнений возвращает не сообщение об ошибке (см. текст под функцией  $\text{Find}$  на рис. 6), а значения своих аргументов, при которых система уравнений будет наиболее близка к системе тождеств. Найденное решение после проверки ( $\text{Verify}$ ) оказалось вполне приемлемым — отвечающим цифрам, приведенным в романе и попадающим в треугольник, показанный на рис. 7.

$$S = \pi \cdot R \cdot \sqrt{R^2 + H^2} + 2\pi \cdot R \cdot L + \pi \cdot R \cdot \sqrt{R^2 + H^2} \text{ solve, } L \rightarrow \frac{S - 2 \cdot \pi \cdot R \cdot \sqrt{H^2 + R^2}}{2 \cdot \pi \cdot R}$$

$$\Sigma L := 70\text{m} \quad R := 4\text{m} \quad S := 1011.45\text{m}^2 \quad V := 1500.2\text{m}^3$$

Given

$$H := 70\text{m}$$

$$\Sigma L = H + \frac{S - 2 \cdot \pi \cdot R \cdot \sqrt{H^2 + R^2}}{2 \cdot \pi \cdot R} + H$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot R^2 \cdot H + \pi \cdot R^2 \cdot \frac{S - 2 \cdot \pi \cdot R \cdot \sqrt{H^2 + R^2}}{2 \cdot \pi \cdot R} + \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot R^2 \cdot H$$

$$H := \text{MinErr}(H) = 30.41\text{m}$$

$$L := \frac{S - 2 \cdot \pi \cdot R \cdot \sqrt{H^2 + R^2}}{2 \cdot \pi \cdot R} = 9.572\text{m}$$

Verify

$$\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot R^2 \cdot H + \pi \cdot R^2 \cdot L + \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot R^2 \cdot H = 1500.202 \cdot \text{m}^3$$

$$\pi \cdot R \cdot \sqrt{R^2 + H^2} + 2\pi \cdot R \cdot L + \pi \cdot R \cdot \sqrt{R^2 + H^2} = 1011.45\text{m}^2$$

$$H + L + H = 70.393\text{m}$$

Рис. 8. Гибридное решения переопределенной системы уравнений

В расчете на рисунке 8 *гибридно* используются аналитические (символьные) и численные методы решения задачи [3]: сначала *символьно* решается уравнение площади поверхности лодки относительно переменной  $L$ , а затем полученное выражение подставляется в систему уравнений, которое решается уже *численно* с опорой на первое предположение. Этот прием позволяет уменьшить число уравнений с трех до двух, а число неизвестных с двух до одного. Это ускоряет расчет, но делает его более трудным для понимания в образовательном процессе. Поэтому можно оставить и три уравнения, с которыми все более-менее ясно.

## 7. Анимация

Пакет Mathcad имеет средства *анимации*. На рисунке 9 показан кадр такой анимации изменения контура подлодки «Наутилус» (два треугольника от конусов носа и кормы и один прямоугольник от цилиндра корпуса) при изменении радиуса ее цилиндрической

части. В нижней части кадра анимации показан рисунок, «выуженный» из Интернета и отображающий попытку реального проектирования подводной лодки. Кстати, в том же Интернете есть много рисунков, иллюстрирующих роман Жюль Верна, но по которым довольно трудно судить о размерах «Наутилуса».

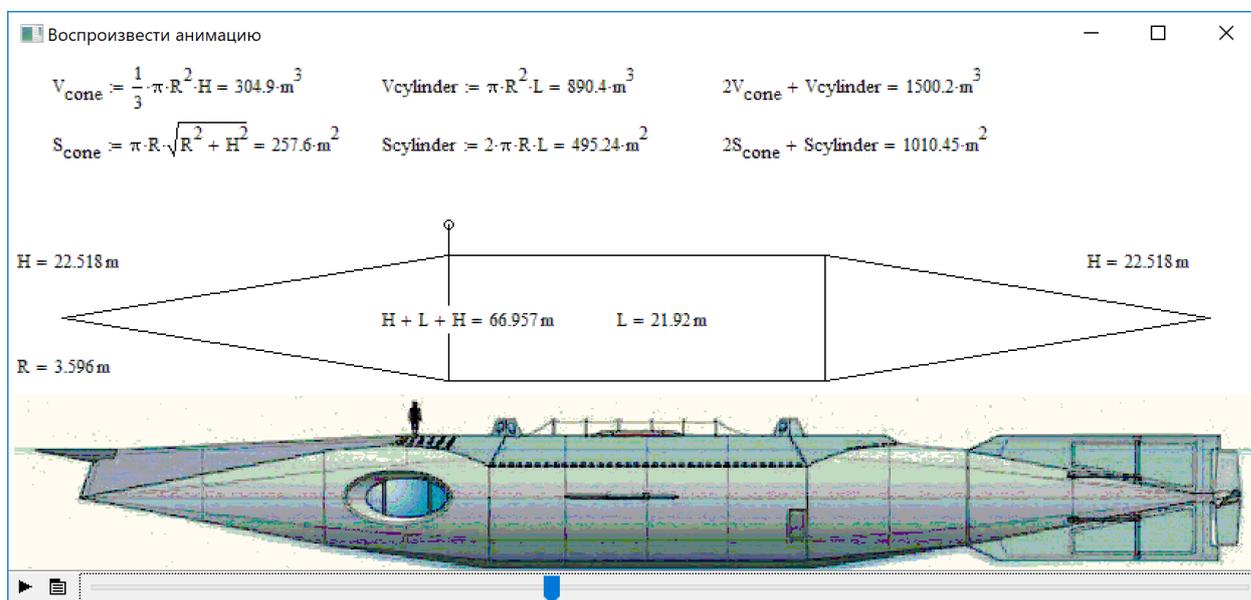


Рис. 9. Анимация изменения контуров подводной лодки в зависимости от радиуса ее цилиндрической части

Данную анимацию можно увидеть на сайте <https://community.ptc.com/t5/PTC-Mathcad-Questions/Symbol-math-error/td-p/487278>. Там же можно скачать соответствующие расчетные и прочие файлы статьи.

К анимации мы еще вернемся ниже.

## 8. Оптимизация

В пакет Mathcad вшиты средства *оптимизации*, которые также можно испытать на задаче о подводной лодке «Наутилус» — см. рис. 10 и 11.

На рисунке 10 показано, как изменятся размеры лодки, если задан ее объем  $V = 1500.2 \text{ м}^3$ , а площадь поверхности  $S$  должна быть минимальной. В расчете для решения задействована встроенная в Mathcad функция Minimize, которая минимизирует заданную целевую функцию  $S$ , изменяя значения аргументов  $R$ ,  $H$  и  $L$  от точки начального предположения ( $R = H = L = 10 \text{ м}$ ) и выполняя ограничения по объему.

$$V \equiv 1500.2 \text{ m}^3$$

$$S(R, H, L) := \pi \cdot R \cdot \sqrt{R^2 + H^2} + 2\pi \cdot RL + \pi \cdot R \cdot \sqrt{R^2 + H^2}$$

Given

$$\begin{pmatrix} R \\ H \\ L \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix} \text{ m}$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot R^2 \cdot H + \pi \cdot R^2 \cdot L + \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot R^2 \cdot H$$

$$\begin{pmatrix} R \\ H \\ L \end{pmatrix} := \text{Minimize}(S, R, H, L) = \begin{pmatrix} 6.842 \\ 6.126 \\ 6.117 \end{pmatrix} \text{ m}$$

Verify

$$\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot R^2 \cdot H + \pi \cdot R^2 \cdot L + \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot R^2 \cdot H = 1500.199 \cdot \text{m}^3$$

$$\pi \cdot R \cdot \sqrt{R^2 + H^2} + 2\pi \cdot RL + \pi \cdot R \cdot \sqrt{R^2 + H^2} = 657.762 \text{ m}^2$$

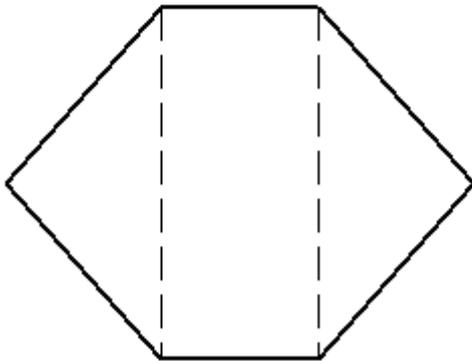


Рис. 10. Минимизация наружной поверхности подводной лодки

В нижней части рисунка 10 показан контур оптимизированной по площади наружной поверхности лодки, которая стала похожа на батискаф с внутренним объемом  $1500.2 \text{ m}^3$  и с наружной минимизированной площадью в  $657.762 \text{ m}^2$ . Известно, что наименьшую поверхность при заданном объеме имеет сфера. Поэтому-то контур подводного аппарата, показанный на рис. 10, приблизился к окружности — к сечению сферы. Сфера, кстати говоря, имеет и наилучшие прочностные свойства для погружных аппаратов, чьи обитаемые отсеки выполнены именно в виде сферы (батисферы).

На рисунке 11 решается задача о *максимизации* объема  $V$  подводной лодки с заданной площадью поверхности  $S = 1011.45 \text{ m}^2$ . Тут также задействованы гибридные моменты (использование символьной и численной математики — см. рис. 8), которые позволили

снизить число оптимизирующих параметров с трех (рис. 10) до двух (рис. 11). Этот прием дал возможность проверить правильность расчета максимального объема лодки ( $V = 2860.642 \text{ м}^3$ ) графически — линиями уровня функции двух аргументов с фиксацией найденного оптимального значения.

Пропорции геометрического тела (конус-цилиндр-конус), контур которого изображен на рис. 10, можно попытаться найти не численно, а символично с показом в ответе не конкретных значений в метрах, а пропорций в виде алгебраических выражений. Эту работу авторы поручают читателям.

$$S = \pi \cdot R \cdot \sqrt{R^2 + H^2} + 2\pi \cdot R \cdot L + \pi \cdot R \cdot \sqrt{R^2 + H^2} \text{ solve, } L \rightarrow \frac{S - 2 \cdot \pi \cdot R \cdot \sqrt{H^2 + R^2}}{2 \cdot \pi \cdot R}$$

$$S := 1011.45 \text{ m}^2$$

$$V(R, H) := \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot R^2 \cdot H + \pi \cdot R^2 \cdot \frac{S - 2 \cdot \pi \cdot R \cdot \sqrt{H^2 + R^2}}{2 \cdot \pi \cdot R} + \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot R^2 \cdot H$$

Given

$$\begin{pmatrix} R \\ H \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \end{pmatrix} \text{ m}$$

$$S = \pi \cdot R \cdot \sqrt{R^2 + H^2} + 2\pi \cdot R \cdot \frac{S - 2 \cdot \pi \cdot R \cdot \sqrt{H^2 + R^2}}{2 \cdot \pi \cdot R} + \pi \cdot R \cdot \sqrt{R^2 + H^2}$$

$$\begin{pmatrix} R \\ H \end{pmatrix} := \text{Maximize}(V, R, H) = \begin{pmatrix} 8.485 \\ 7.589 \end{pmatrix} \text{ m}$$

$$L := \frac{S - 2 \cdot \pi \cdot R \cdot \sqrt{H^2 + R^2}}{2 \cdot \pi \cdot R} = 7.589 \text{ m}$$

Verify

$$\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot R^2 \cdot H + \pi \cdot R^2 \cdot L + \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot R^2 \cdot H = 2860.638 \cdot \text{m}^3$$

$$\pi \cdot R \cdot \sqrt{R^2 + H^2} + 2\pi \cdot R \cdot L + \pi \cdot R \cdot \sqrt{R^2 + H^2} = 1011.45 \text{ m}^2$$

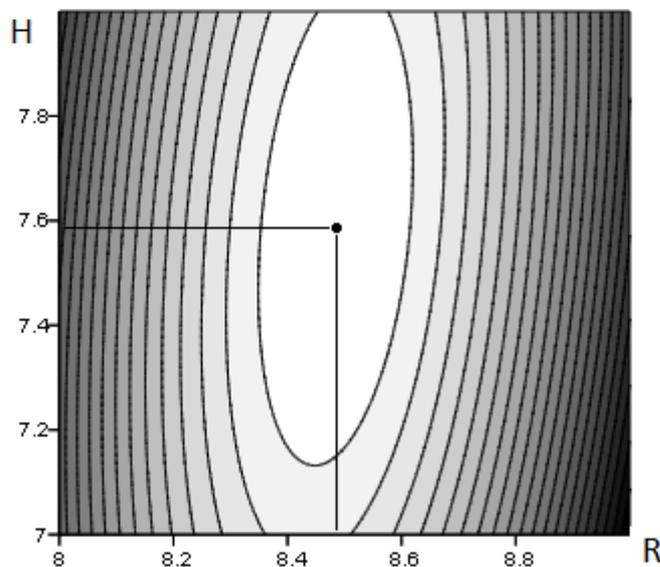


Рис. 11. Максимизация объема подводной лодки

### 9. Неявная функция трех аргументов

На рисунке 12 показана поверхность неявной функции уже не двух, а трех аргументов, которую также можно связать с романом Жюль Верна. Если предположить, что длины

конических частей подводной лодки «Наутилус» (ее носа и кормы) разные (мы имеем не одну переменную  $H$ , а две переменные  $H_1$  и  $H_2$ ), то можно построить в среде Maple замкнутую поверхность (рис. 12), которая напоминает некую футуристическую подводную лодку и некий воздушный летательный аппарат в форме треугольного крыла. Одно из сечений этого воздухоплавательного аппарата показано на рисунке 2 (Maple) и 3 (Mathcad). Мы имеем и некое классическое сечение крыла, на котором показывают обтекание воздуха и подъемную силу, которую можно посчитать, опираясь на законы гидрогазодинамики. В этом контуре можно также узреть силуэт некоего биологического объекта — кита, например, — живого хозяина океанских глубин...

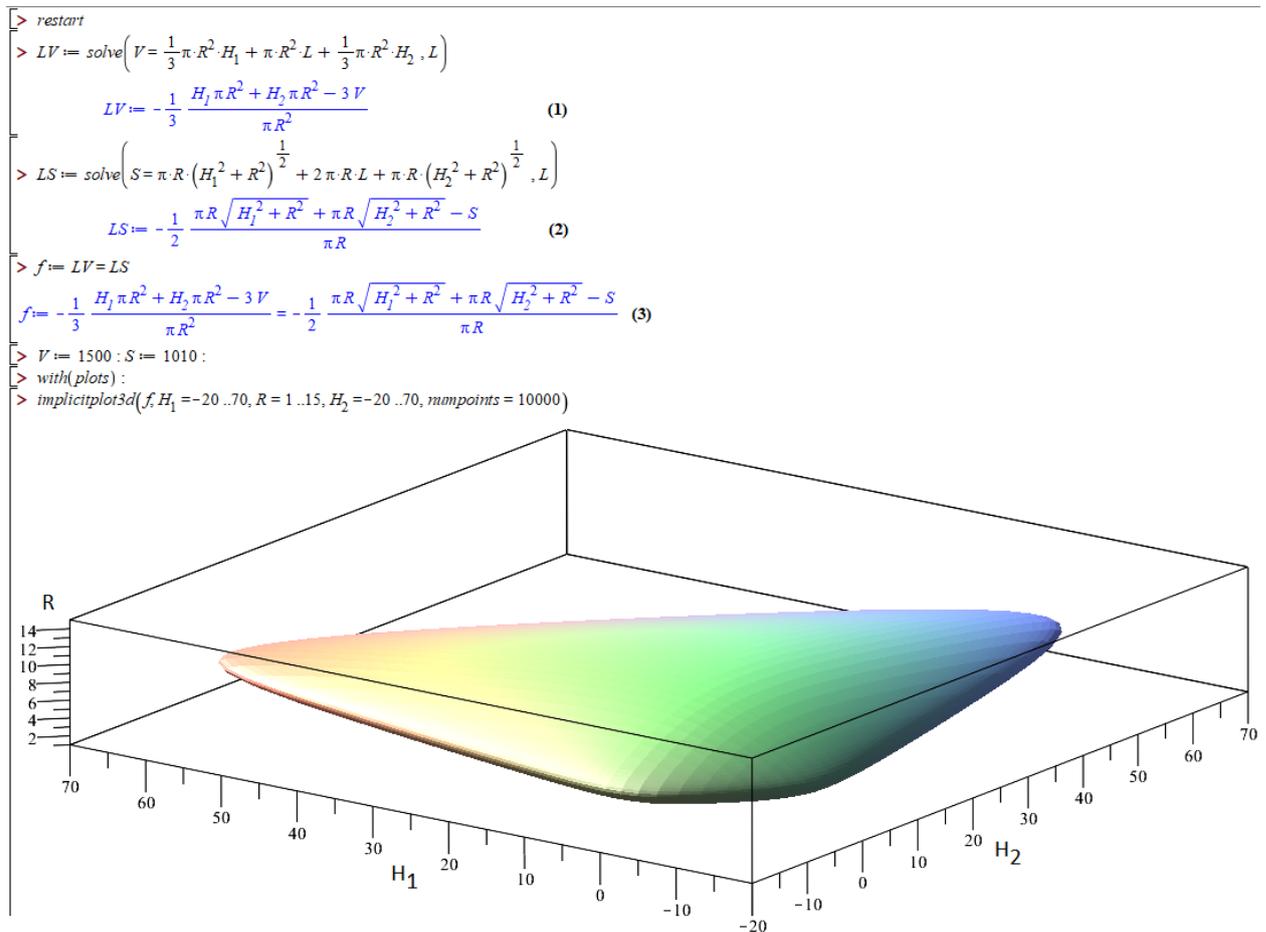


Рис. 12. Построение графика неявной функции трех аргументов в среде Maple

Примечание. На замкнутой поверхности, показанной на рис. 12, видны некие плоские треугольники и ромбы, из которых составлена поверхность и которые «выдают» суть этой численной графической операции. Эти плоские элементы будут четко просматриваться, если в опциях функции *implicitplot3d* изменить значение системной переменной *numpoints* с 10 000 до 1 000 или даже 100. Если же это значение увеличить до 1 000 000, например, то будет построена гладкая поверхность после... нескольких минут работы компьютера.

Многие пользователи тут начинают думать, что компьютер «завис», и перегружают его. А другие пользователи понимают суть дела и... переходят к работе на более мощном компьютере — на графической станции.

На сайте <https://community.ptc.com/t5/PTC-Mathcad-Questions/3D-body-plot/td-p/487467> можно увидеть попытки построения в среде Mathcad трехмерных моделей подводной лодки «Наутилус» по рассчитанным ранее его размерам с использованием простого сканирования или более сложных параметрических графических инструментов.

## 10. Погружение и всплытие

В диалогах капитана Немо с профессором Аронаксом также затрагиваются технические вопросы погружения подводной лодки и ее всплытия. Вот еще один отрывок из романа: «Двойная обшивка корабля изготовлена из листовой стали, удельный вес которой равен семи и восемь десятых. Толщина наружной обшивки не менее пяти сантиметров, вес триста девяносто четыре и девяносто шесть сотых тонны. Внутренняя обшивка, киль - в высоту пятьдесят сантиметров и в ширину двадцать пять сантиметров, весом шестьдесят две тонны, – машины, балласт и прочее оборудование, обстановка, внутренние переборки и пилерсы – все это вместе взятое весит девятьсот шестьдесят одну и шестьдесят две сотых тонны. Таким образом общий вес судна составляет одну тысячу триста пятьдесят шесть и сорок восемь сотых тонны... <...> ...находясь на поверхности океана, "Наутилус" при этих условиях выступает над поверхностью воды на одну десятую. Следовательно, желая полностью погрузить "Наутилус" в воду, необходимо располагать резервуарами, емкостью равными этой десятой доле его объема, иными словами, способными вмещать в себя сто пятьдесят и семьдесят две сотых тонны воды. В последнем случае вес судна составил бы одну тысячу пятьсот семь тонн, и оно совершенно ушло бы под воду. Так и есть в действительности, господин профессор! Такие резервуары имеются в трюме "Наутилуса". Стоит открыть краны, как они наполняются водой, и корабль погружается в море в уровень с поверхностью воды!»

Давайте смоделируем динамику погружения в воду и последующего всплытия на ее поверхность. А подводной лодке «Наутилус» приходилось это делать довольно часто. Автор романа не предусмотрел наличие на борту лодки систем регенерации воздуха — удаление из него углекислого газа и водяного пара, образуемых при дыхании человека, и

обогащение воздуха кислородом<sup>8</sup>. Поэтому судну приходилось примерно каждые пять дней всплывать на поверхность для вентиляции помещений. А еще там, судя по тексту романа и его иллюстрациям, капитан Немо и профессор Аронакс еще и курили дорогие сигары, обсуждая между затяжками особенности конструкции лодки и другие инженерные нюансы, а также политические вопросы...

Примечание. Тут можно на уроке в рамках образовательной технологии STEM/STEAM /STREAM/SAR затронуть и химию. В частности, описать реакции и технологии генерации кислорода из воды и из углекислого газа в их термодинамике [4] и кинетике [5]. Эти химические технологии стали бурно развиваться в наши дни: околоземным станциям нельзя «каждые пять дней» нырять в атмосферу земли, чтобы «глотнуть воздуха».

Но вернемся к погружению и всплытию. На рисунке 13 показан Mathcad-расчет такой гидростатической и динамической модели. С высоты десять метров в воду прыгает ныряльщик. Прыгает стилем «бомбочка»: модель ныряльщика — это сфера радиусом  $r = 30$  см и плотностью  $\rho_{\text{man}} = 950$  кг/м<sup>3</sup>. По этим двум числам рассчитывается объем «ныряльщика» (volume), его масса (mass) и площадь сечения (area). Вводится функция–ступенька  $\rho(h)$  — зависимость плотности среды от точки нахождения ныряльщика:  $h > 0$  — воздух,  $h \leq 0$  — вода. Точка начала координат находится у подножия десятиметровой вышки на уровне воды.

На «ныряльщика» действуют три силы: сила тяжести, сила сопротивления среды и архимедова сила. Сила сопротивления среды (сила трения) раскладывается по горизонтали и вертикали (на две проекции), а две другие силы действуют только по вертикали. Суммы всех сил по двум осям равны произведению массы на ускорение, вернее, на проекции ускорения по вертикали и горизонтали. В блоке решателя Mathcad — между ключевым словом Given и функцией Odesolve записаны также начальные условия (начальное местоположение «ныряльщика» и его начальная скорость опять же в двух направлениях и то, что скорость — это первая производная пути во времени).

---

<sup>8</sup> Одна из проблем, с которой столкнулись инженеры и ученые, осуществившие стыковку советского корабля «Союз» и американского корабля «Аполлон», состояла в следующем. Обитаемый отсек нашего космического аппарата был заполнен воздухом (смесью азота и кислорода), а американского — чистым кислородом. Эти два технические решения имеют свои плюсы и минусы. В частности, работа с чистым кислородом более пожароопасна, но требует более простых и компактных установок регенерации.

$$r := 30\text{cm} \quad \rho_{\text{man}} := 950 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \quad \text{volume} := \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 = 0.113 \cdot \text{m}^3$$

$$\text{mass} := \text{volume} \cdot \rho_{\text{man}} = 107.442 \cdot \text{kg} \quad \text{area} := \pi \cdot r^2 = 0.283 \cdot \text{m}^2$$

$$h := 10\text{m} \quad y_0 := 0\text{m} \quad vx_0 := 3 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad vy_0 := 1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\rho(h) := \text{if} \left( h > 0, 1.225 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}, 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right) \quad k := 1 \quad t_{\text{end}} := 30\text{s}$$

Given

$$vx(t) = x'(t) \quad vy(t) = y'(t) \quad vx(0\text{s}) = vx_0 \quad vy(0\text{s}) = vy_0$$

$$x(0\text{s}) = 0 \quad y(0\text{s}) = h$$

$$\text{mass} \cdot vx'(t) = -k \cdot \rho(y(t)) \cdot \text{area} \cdot vx(t)^2 \cdot \text{sign}(vx(t))$$

$$\text{mass} \cdot vy'(t) = g \cdot \text{volume} \cdot \rho(y(t)) - k \cdot \rho(y(t)) \cdot \text{area} \cdot vy(t)^2 \cdot \text{sign}(vy(t)) - g \cdot \text{mass}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ vx \\ y \\ vy \end{pmatrix} := \text{Odesolve} \left[ \begin{pmatrix} x \\ vx \\ y \\ vy \end{pmatrix}, t, t_{\text{end}} \right] \quad t := 0\text{s}, \frac{t_{\text{end}}}{10000} .. t_{\text{end}}$$

Рис. 13. Численное решение системы дифференциальных уравнений погружения в воду и всплытия на поверхность

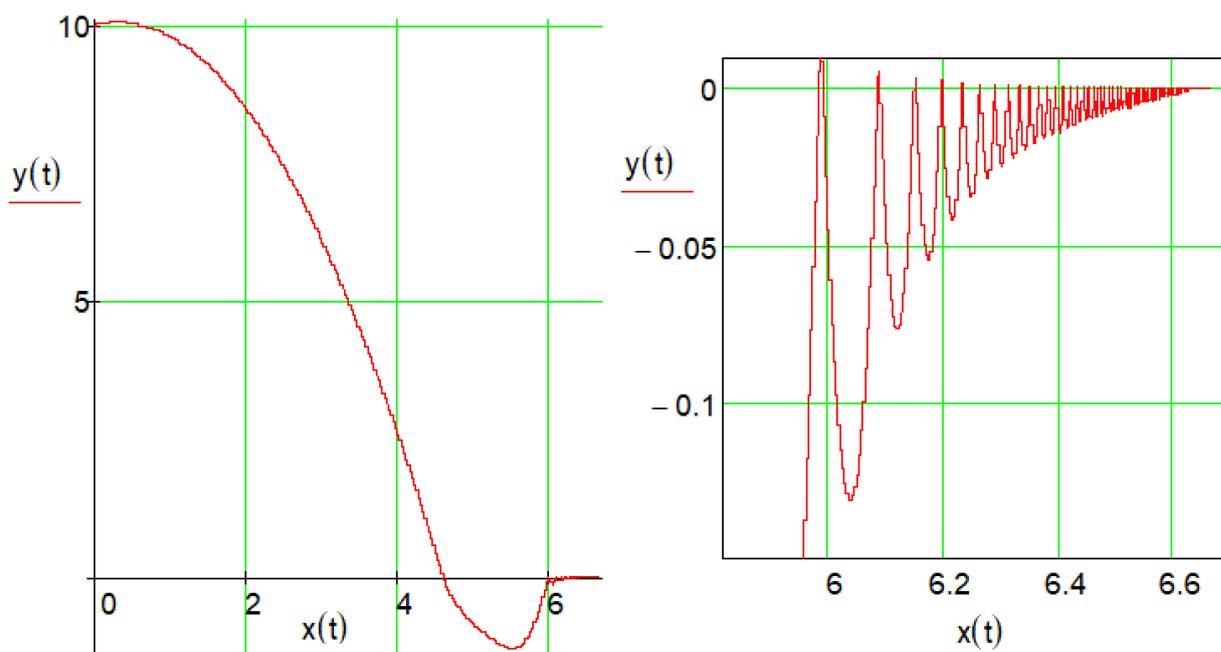


Рис. 14. Траектория ныряльщика над и под водой

На рисунках 14 и 15 показано графическое отображение численного решения задачи о нырянии в воду. Интересен (по форме и содержанию) правый график на рис. 14 и его альтернативный показ на рис. 15 в виде некоего *аттрактора* (компактного множества фазового пространства): спиральной траектории, стремящейся к точке, когда время стремится к бесконечности. Анимацию по рисункам 14 и 15 можно увидеть здесь <https://community.ptc.com/t5/PTC-Mathcad-Blog/Diver/ba-p/488389>.

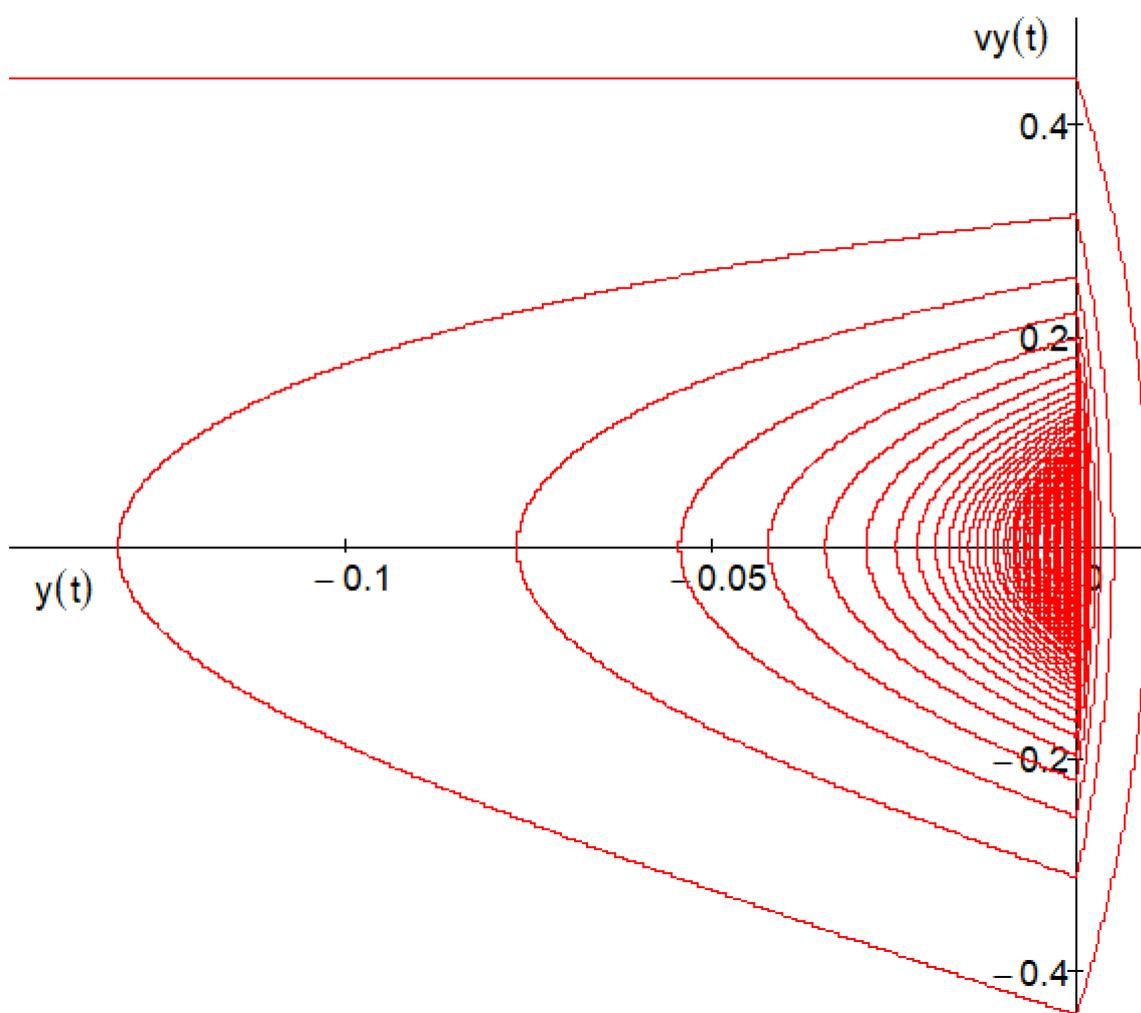


Рис. 15. Аттрактор ныряльщика

#### 11. Плотность морской воды

В романе Жюль Верна есть диалоги с рассуждениями об изменении плотности воды с повышением давления на глубине, о сжимаемости воды. Один из авторов этой статьи работает в Международной ассоциации по свойствам воды и водяного пара ([www.iapws.org](http://www.iapws.org)), которая помимо прочего разработала формуляцию (набор формул и текстов, их поясняющих) для оценки свойств и морской воды, на основе которой был создан расчетный сайт, отображенный на рис. 16 [6]. Посетителю сайта достаточно ввести значения солёности воды, ее температуры и давления, чтобы получить не только числа, но и графические зависимости. Подробное описание этой формуляции можно найти здесь: <http://iapws.org/relguide/Seawater.html>.

### Thermodynamic Properties of Seawater (IAPWS [formulation](#))

$S$  [g/kg] :=    
  $T$  [°C] :=    
  $p$  [MPa] :=    

$$T_0 := 273.15 \text{ K} \quad T^* := 40 \text{ K} \quad \tau := (T - T_0) / T^* = 0.425$$

$$p_0 := 101325 \text{ Pa} \quad p^* := 100 \text{ MPa} \quad \pi := (p - p_0) / p^* = 8.986749999999999 \times 10^{-3}$$

$$S_n := 35.16504 \text{ g/kg} \quad S^* := S_n \cdot (40 / 35) = 40.18861714285715 \text{ g/kg}$$

$$\xi := \sqrt{S / S^*} = 0.5687483435228617$$

### Specific Gibbs energy water part (IAPWS-IF97)

$$gw(T, p) := \text{wspHPT}(p, T) - T \cdot \text{wspSPT}(p, T) \quad gw(T, p) = -1.176 \text{ kJ/kg}$$

### Specific Gibbs energy saline part (IAPWS 2008)

$$\begin{aligned}
 gs(S, T, p) := & \left\{ \begin{array}{l} \text{return } 0 \text{ J/kg if } S = 0 \\ \pi \leftarrow (p - p_0) / p^* \\ \tau \leftarrow (T - T_0) / T^* \\ \zeta \leftarrow \sqrt{S / S^*} \\ \frac{\text{J}}{\text{kg}} \cdot \sum_{k=0}^5 \left[ \pi^k \cdot \sum_{j=0}^6 \left[ (g1)_{j,k} \cdot \zeta^2 \cdot \ln \zeta + \sum_{i=2}^7 \left[ (gi)_{j,k} \zeta^i \right] \cdot \tau^j \right] \right] \right\}
 \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

See  $g_{i,j,k} >>>$

$$gs(S, T, p) = -0.9180517 \text{ kJ/kg}$$

### Specific Gibbs energy saline water

$$g(S, T, p) := gw(T, p) + gs(S, T, p)$$

$$g(S, T, p) = -2.0943151602481898 \text{ kJ/kg}$$

### Density

$$\rho := \left( \frac{\partial g(S, T, p)}{\partial p} \right)^{-1} = 1009.0649201841026 \text{ kg/m}^3$$

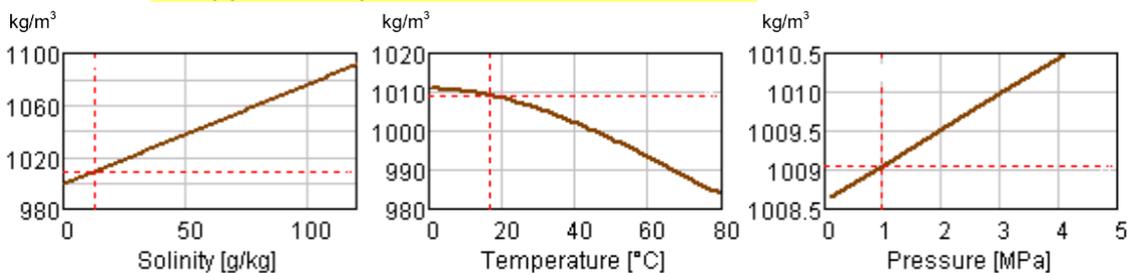


Рис. 16. Сайт по расчету плотности морской воды в зависимости от солёности, температуры и давления

На плотность морской воды сильно влияют ее солёность и температура, но слабо влияет ее давление.

## 12. Лъё, верста, километр, метр

Еще одна динамическая модель и ее компьютерная реализация поможет нам заглянуть в... само название романа с единицей длины<sup>9</sup>. В старых русских переводах романа, кстати, встречается название «80 000 километров (верст) под водой». Но более «громким» было бы такое название «80 миллионов метров под водой»! Но когда говорят о метрах, то обычно имеют в виду не расстояние, пройденное в подводном положении, а глубину погружения.

Как и морская миля, лье, точнее, лъё привязано к длине земного меридиана. Морское лъё — это 5555.5 м (длина дуги  $1/20$  градуса земного меридиана; 3 морские мили). А были еще сухопутные, почтовые и прочие лъё — разные в разных провинциях Франции! Такую информацию выдает Википедия. А какое лъё имел в виду Жюль Верн, давая название романа!? Всю эту путаницу и решили ликвидировать, вводя СИ.

А откуда взялся метр как основная единица длины в СИ? Обычно метр связывают либо с эталоном, хранящимся в Парижской палате мер и весов<sup>10</sup>, либо с длиной земного меридиана, либо с длиной световой волны... Но мало кто помнит, что метр пошел от... маятника напольных часов. Отсюда и общий корень у таких слов как метр, метроном, метрология, изометрия, планиметрия (рис. 2), стереометрия (рис. 12) и т.д. Маятник длиной один метр будет делать каждый взмах примерно за одну секунду. Эти взмахи через шестеренки и другие механические приспособления переводятся в движение стрелок часов. Можно предположить, что рейка маятника от часов кому-то когда-то приглянулась как эталон длины вместо шагов, расстояний от разных точек человеческого тела и т.д. Также мало кто помнит, откуда пошло понятие математического маятника с длиной в один метр и периодом колебания в две секунды. Рисунки 17 и 18 поясняют это.

<sup>9</sup> А вот еще один знаменитый научно-фантастический роман, где в названии есть единицы измерения: «451 градус по Фаренгейту». При переводах его на русский также были попытки дать название романа по стандарту СИ: «233 градус по Цельсию» или даже «506 кельвинов».

<sup>10</sup> Старый «физический» анекдот. — Что такое лошадиная сила? — Это сила, какую развивает лошадь ростом в один метр и весом в один килограмм. — Да где вы такую лошадь видели!? — А ее так просто не увидишь! Она хранится в Парижской палате мер и весов!

$$ode := m \frac{d^2}{dt^2} \alpha(t) = -m \cdot g \cdot \frac{\sin(\alpha(t))}{L}$$

$$m \left( \frac{d^2}{dt^2} \alpha(t) \right) = -\frac{m g \sin(\alpha(t))}{L} \quad (1)$$

$$ics := \alpha(0) = \alpha_0, D(\alpha)(0) = 0$$

$$\alpha(0) = \alpha_0, D(\alpha)(0) = 0 \quad (2)$$

*dsolve*( {ode, ics} )

$$\alpha(t) = \text{RootOf} \left( \int_{-Z}^{\alpha_0} \frac{L}{\sqrt{-2 L \cos(\alpha_0) g + 2 L \cos(_a) g}} d_a + t \right), \alpha(t) \quad (3)$$

$$= \text{RootOf} \left( \int_{\alpha_0}^{-Z} \frac{L}{\sqrt{-2 L \cos(\alpha_0) g + 2 L \cos(_a) g}} d_a + t \right)$$

Рис. 17. Решение уравнения физического маятника

$$ode := m \frac{d^2}{dt^2} \alpha(t) = -m \cdot g \cdot \frac{\alpha(t)}{L}$$

$$m \left( \frac{d^2}{dt^2} \alpha(t) \right) = -\frac{m g \alpha(t)}{L} \quad (1)$$

$$ics := \alpha(0) = \alpha_0, D(\alpha)(0) = 0$$

$$\alpha(0) = \alpha_0, D(\alpha)(0) = 0 \quad (2)$$

*dsolve*( {ode, ics} )

$$\alpha(t) = \alpha_0 \cos \left( \frac{\sqrt{g} t}{\sqrt{L}} \right) \quad (3)$$

Рис. 18. Решение уравнения математического маятника

Математический маятник — это тот же физический маятник, но отклоняющийся от вертикали не более чем на 7 угловых градусов (еще одна «мистическая», «религиозная» семерка — см. сноску 7). В модели физического маятника — в уравнении баланса действующих сил присутствует синус угла. Это приводит к довольно сложному аналитическому решению соответствующего дифференциального уравнения — см. рис. 17 (абсолютно точный и абсолютно бесполезный ответ). Если же синус угла заменить на сам угол (а это, повторяем, можно сделать только при малых углах<sup>11</sup>), то решение сразу упростится и в нем «всплывет» известная «школьная» формула периода колебания

<sup>11</sup> Этот прием часто используют и в геометрической оптике [7].

маятника — см. рис. 18. Если в эту формулу, вернее, в формулу для периода колебания маятника подставить  $L = 1$  м, то она вернет эти самые две секунды, лежащие в основе всех напольных часов с маятником. Но в этой формуле присутствует и величина  $g$  — ускорение свободного падения, значение которой как минимум зависит от географической широты местности и от высоты над уровнем моря. Поэтому-то со временем и отказались от маятника для определения эталона длины: метр сначала связали с длиной экватора Земли, а потом со световой волной определенной частоты...

### 13. Немного политики

В Википедии о романе Жюль Верна можно прочесть следующее.

Жюль Верн в ходе работы над романом оставался под впечатлением от польского восстания 1863 года. Изначально капитан Немо был польским аристократом, сражающимся против российских угнетателей, погубивших всю его семью. Но под давлением своего издателя Этцеля, исходившего не только из политической конъюнктуры, но из здравого расчета, что у польского аристократа просто не хватит средств построить такое подводное судно, Верн «лишил» Немо национальности, которая так и осталась неизвестна Аронаксу и его спутникам. О «польском следе» в его истории напоминает только портрет революционера Тадеуша Костюшко в каюте капитана. Позже, в романе «Таинственный остров», Верн раскроет инкогнито капитана Немо и представит его как беглого индийского принца Нана Сагиба, ушедшего в море после провала восстания сипаев и мстящего Англии, поработившей его родину.

Политическая же конъюнктура состояла в том, что Франция в преддверии франко-прусской войны активно искала поддержки России. Но Россия была сильно обижена на Францию после поражения в Крымской войне. Это (нейтралитет России) во многом определило поражение Франции в войне с Пруссией и потерю Эльзаса и Лотарингии. Перед первой мировой войной Франции удалось заручиться поддержкой России. Если б не Россия, то немецкие войска еще бы раз прошлись по Парижу в 1914 году, как они это сделали в 1870 году и в начале Второй мировой войны.

Подобные приливы и отливы в отношениях России и Запада продолжают и в XXI веке. В связи с этим к нашему рассказу в стиле STEAM можно добавить... историю и политологию. Но многие люди вполне обоснованно считают эти разделы знаний не науками, а некими синтезами науки, искусства и даже религии. Так что будем говорить тут не о стиле STEAM, а о стиле STREAM (см. выше).

Так или иначе, заканчивая наш разговор о романе в рамках образовательных технологий STEM/STEAM/STREAM рассмотрим еще одну «динамическую» задачу, связанную с фразой, которую бросил русский царь, правивший во времена Жюль Верна: «У России есть только два союзника — армия и флот!».

Поговорим о флоте. В настоящее время подводные лодки — это, как правило, сугубо военные суда, некоторые из которых несут на своем борту ракеты с ядерными и неядерными боеголовками. А ядерные военные силы — это основной инструмент в современных политических играх<sup>12</sup>. На рисунке 15 показана модель полета ракеты из ракетноносца, находящегося на глубине 1000 м. Масса ракеты равна 12 800 кг (переменная  $m_0$ ). Тяга двигателя топлива 27 000 кг-силы ( $F$ ). Топливо расходуется со скоростью 125 кг/с ( $q$ ). Коэффициент сопротивления среды 1.5 ( $K_f$ ), площади поперечного сечения ракеты 0.785 м<sup>2</sup> ( $S$ ). На графике на рисунке 19 можно видеть кривые, отображающие высоту подъема ракеты и ее скорость.

---

<sup>12</sup> Правда, некоторые военные аналитики считают, что в скором времени ядерное оружие ждет судьба... кавалерии, которую свели на нет пулеметы. Противоракетные системы могут сильно снизить эффективность ракетно-ядерного оружия.

$$m_0 := 12800\text{kg} \quad F := 27000\text{kgf} \quad m_f := 8500\text{kg} \quad q := 125 \frac{\text{kg}}{\text{s}} \quad t_{\text{end}} := \frac{m_f}{q} = 68\text{s}$$

$$k_f := 1.5 \cdot \frac{\text{kgf}}{\text{kgf}} \quad S := \frac{(1\text{m})^2}{4} \cdot \pi = 0.785 \cdot \text{m}^2 \quad \Delta t := 100\text{s}$$

Reference: <http://twt.mpei.ru/tthb/g-h-psi.xmcdz>

Reference: <http://twt.mpei.ru/tthb/Ro-air.xmcdz>

$$g(h) := g(h, 55\text{deg})$$

$$\rho_{\text{air}}(10\text{km}) = 0.374 \cdot \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

Given

$$h(0\text{s}) = -1000\text{m} \quad v(0\text{s}) = 0 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad v(t) = \frac{d}{dt} h(t)$$

$$\begin{aligned} & (m_0 - \text{if}(t < t_{\text{end}}, q \cdot t, m_f)) \cdot \frac{d}{dt} v(t) \dots & = \text{if}(t < t_{\text{end}}, F, 0) \\ & + (m_0 - \text{if}(t < t_{\text{end}}, q \cdot t, m_f)) \cdot g(h(t)) \dots \\ & + k_f \cdot S \cdot \frac{v(t)^2 \cdot \text{sign}(v(t))}{2} \cdot \text{if}\left(h(t) < 0, 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}, \rho_{\text{air}}(h(t))\right) \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} h \\ v \end{pmatrix} := \text{Odesolve}\left[\begin{pmatrix} h \\ v \end{pmatrix}, t, t_{\text{end}} + \Delta t\right]$$

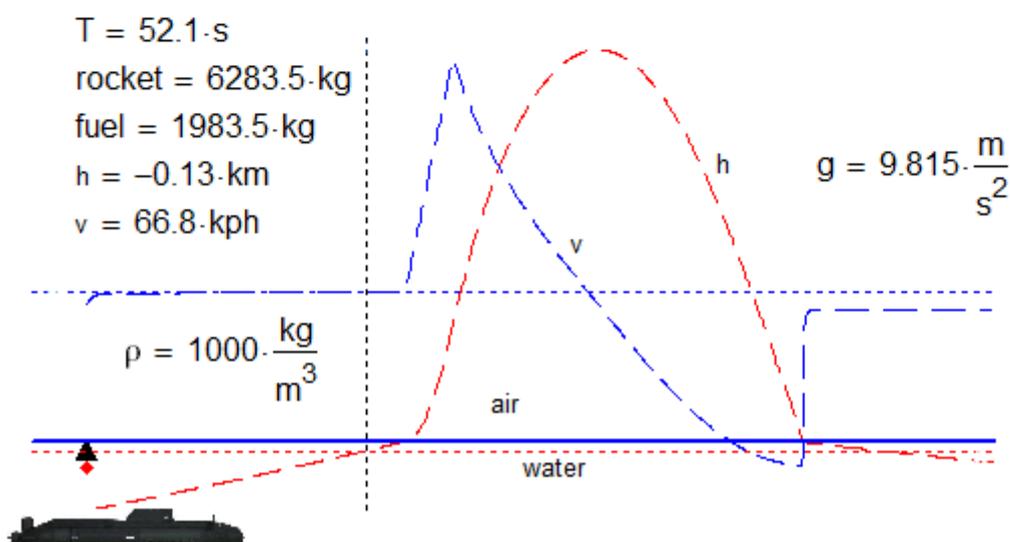


Рис. 19. Модель полета ракеты, стартующей из подводной лодки

#### 14. «Облачная» плотность воздуха

В расчете, показанном на рис. 19, принимается во внимание изменение плотности воздуха по высоте над уровнем моря. Эта функциональная зависимость берется из Интернета, но не в виде текстовой формулы, а в виде *облачной функции*. Что это такое, пояснено задачей, показанной на рис. 20, где моделируется полет парашютиста с высоты тридцать километров, когда парашют раскрывается на высоте одного километра. Если в расчете

сделать ссылку на Mathcad-документ, хранящийся в «облаке» (по адресу <http://tw.t.mpei.ac.ru/tthb/Gas.xmcd>), то функция с именем  $\rho_{Air}$  станет видима и будет возвращать плотность атмосферного воздуха в зависимости от высоты над уровнем моря. В начале рисунка 20 показана работа этой функции с использованием единиц длины и плотности. Но пакет Mathcad 15 не может работать с единицами измерения при решении дифференциальных уравнений. Эта недоработка была исправлена только в пакете Mathcad Prime. В расчете на рисунке 15 мы, признаемся, имитировали единицы измерения. Как? Смотри рисунок 20.

В расчете на рис. 20 опять же используются элементы своеобразной гибридности — в верхней части расчета единицы измерения используются, а в нижней — нет: там введены эрзац-метр, эрзац-килограмм и эрзац-секунда. Иначе, повторяем, невозможно было бы решить дифференциальные уравнения...

## Skydiver

Reference: <http://tw.t.mpei.ac.ru/tthb/Gas.xmcd>

$$\rho_{\text{Air}}(0\text{m}) = 1.225 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \quad \rho_{\text{Air}}(10\text{km}) = 0.413 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

With units

$$\rho_{\text{Air}}(h) := \frac{\rho_{\text{Air}}(h \cdot \text{m})}{\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}}$$

Without units

$m := 1$	$\text{kg} := 1$	$s := 1$			
$\text{km} := 1000\text{m}$	$\text{cm} := \frac{\text{m}}{100}$	$\text{min} := 60\text{s}$	$\text{kph} := \frac{\text{km}}{60\text{min}}$	$g := 9.2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$	

$$\rho_{\text{Air}}(0) = 1.225 \quad \rho_{\text{Air}}(10000) = 0.413$$

$$\rho_{\text{Air}}(0\text{m}) = 1.225 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \quad \rho_{\text{Air}}(10\text{km}) = 0.413 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

$$h_0 := 30\text{km} \quad h_1 := 1\text{km} \quad k := 1.2 \quad \rho_{\text{Sd}} := 1050 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \quad t_{\text{end}} := 40\text{min}$$

$$d_{\text{Sd}}(h) := \text{if}(h > h_1, 30\text{cm}, 7\text{m})$$

$$\text{volume} := \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot d_{\text{Sd}}(h_0)^3 = 0.113 \cdot \text{m}^3 \quad \text{mass} := \text{volume} \cdot \rho_{\text{Sd}} = 118.752 \cdot \text{kg}$$

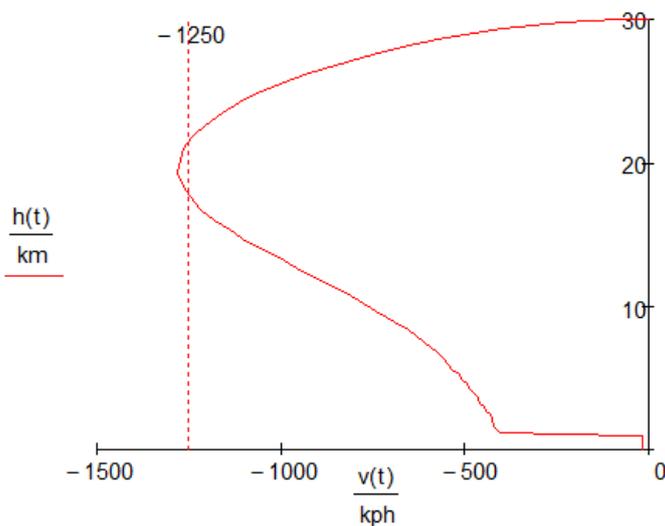
$$s_{\text{Sd}}(h) := \pi \cdot \frac{d_{\text{Sd}}(h)^2}{4} \quad s_{\text{Sd}}(20\text{km}) = 0.071 \cdot \text{m}^2 \quad s_{\text{Sd}}(20\text{m}) = 38.485 \cdot \text{m}^2$$

Given

$$h(0\text{s}) = h_0 \quad v(0\text{s}) = 0 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad v(t) = h'(t)$$

$$\text{mass} \cdot v'(t) = k \cdot \rho_{\text{Air}}(h(t)) \cdot s_{\text{Sd}}(h(t)) \cdot v(t)^2 - g \cdot \text{mass}$$

$$\begin{pmatrix} h \\ v \end{pmatrix} := \text{Odesolve} \left[ \begin{pmatrix} h \\ v \end{pmatrix}, t, t_{\text{end}} \right] \quad t := 0\text{s}, \frac{t_{\text{end}}}{1000} \dots t_{\text{end}}$$



## Рис. 20. Модель прыжка парашютиста

### 15. Конкурс «Мистер Наутилус» или Метрологический овцебык

Представим себе, что капитану Немо пришла в голову идея провести среди экипажа подводной лодки конкурс «Мистер Наутилус» — определить самого лучшего матроса. И провести его, опираясь не на субъективные оценки экспертов, а на объективные критерии.

Для этого можно всплыть на поверхность (для проветривания помещений см. выше), отдать команду «Свистать всех наверх!», построить подводников в одну шеренгу и измерить их вес (**Weight**) и рост (**Growth**) — см. рис. 21.

Примечание. Векторы (транспонированные матрицы с одним столбцом) **Growth** и **Weight** можно отсортировать так, чтобы матросы располагались по росту: на правом фланге — самый высокий, а на левом — самый низкий. Но в настоящее время во многих армиях и флотах мира от такого порядка построения отказываются, считая это дискриминацией людей по некому признаку. Кроме того, в марширующей колонне солдат самым низким приходится «глотать пыль». На рисунке 21 матросы построились в том порядке, в каком они выскочили из отсеков подводной лодки на ее палубу.

Параметры матросов (вес-рост) были обработаны методом наименьших квадратов (отклонений точки от прямой) по линейной зависимости (линейный регрессионный анализ [7]). При этом учитывались два отклонения — по весу (красная линия на рис. 21) и по росту (синяя линия). Обычно тут ведут оптимизацию по «вертикали» (у нас это вес матроса). Затем были определены матросы, параметры которых наиболее близки к этим двум линиям — по весу (десятый матрос, красная точка на графике) и по росту (девятый матрос, синяя точка). Далее была брошена монетка, и из этих двух матросов был выбран «Мистер Наутилус» и «Вице-мистер Наутилус».

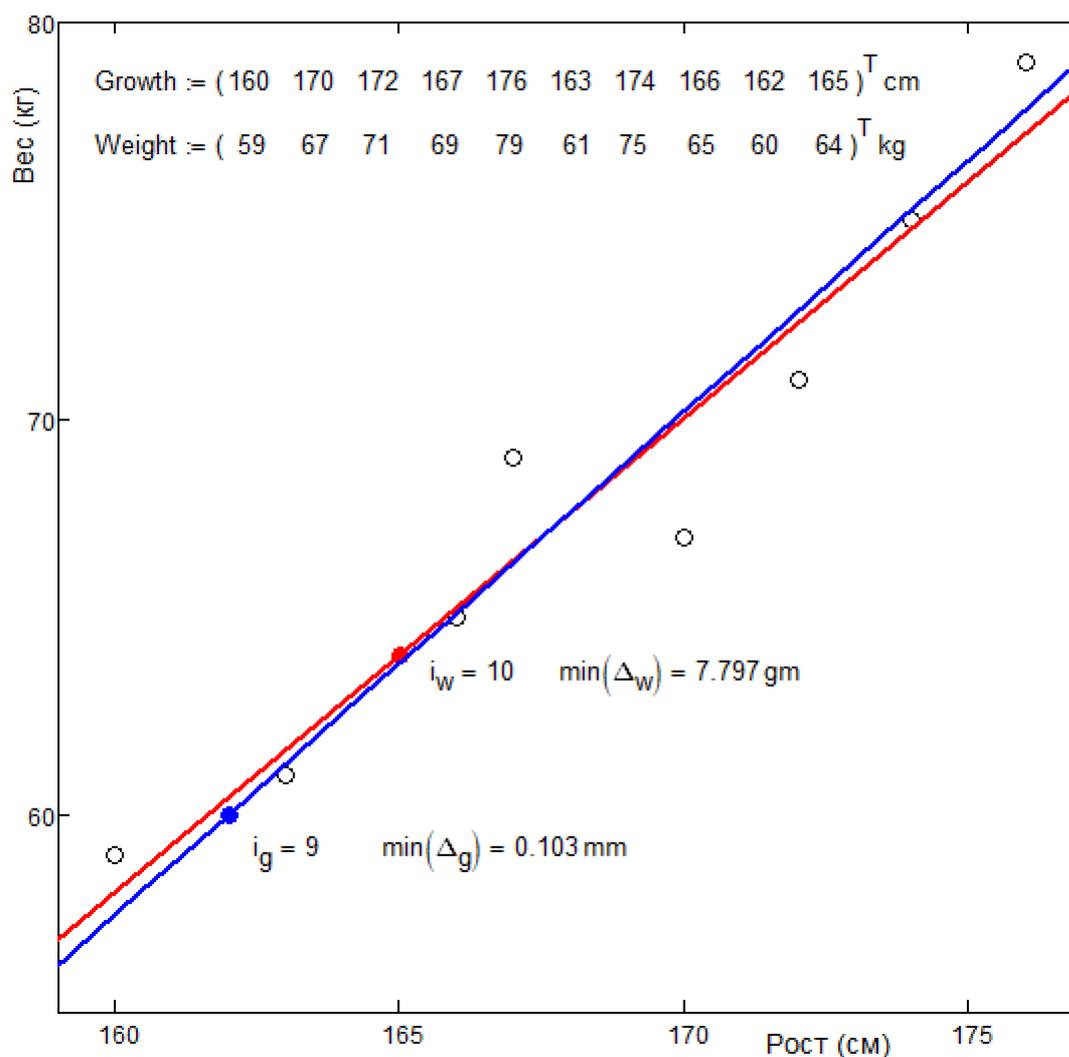


Рис. 21. Параметры экипажа подводной лодки

Наш «конкурс красоты матросов» высвечивает интересную метрологическую проблему, суть которой в следующем. Наилучшего по росту-весу матроса можно определить не только по «вертикали» (по отклонению веса от среднего значения) и не только по «горизонтали» (по отклонению роста), но по «диагонали» — по отклонению точки от прямой. Это отклонение (эту величину) легко измерить, например, циркулем на рис. 21. Но какая размерность будет у этой величины?

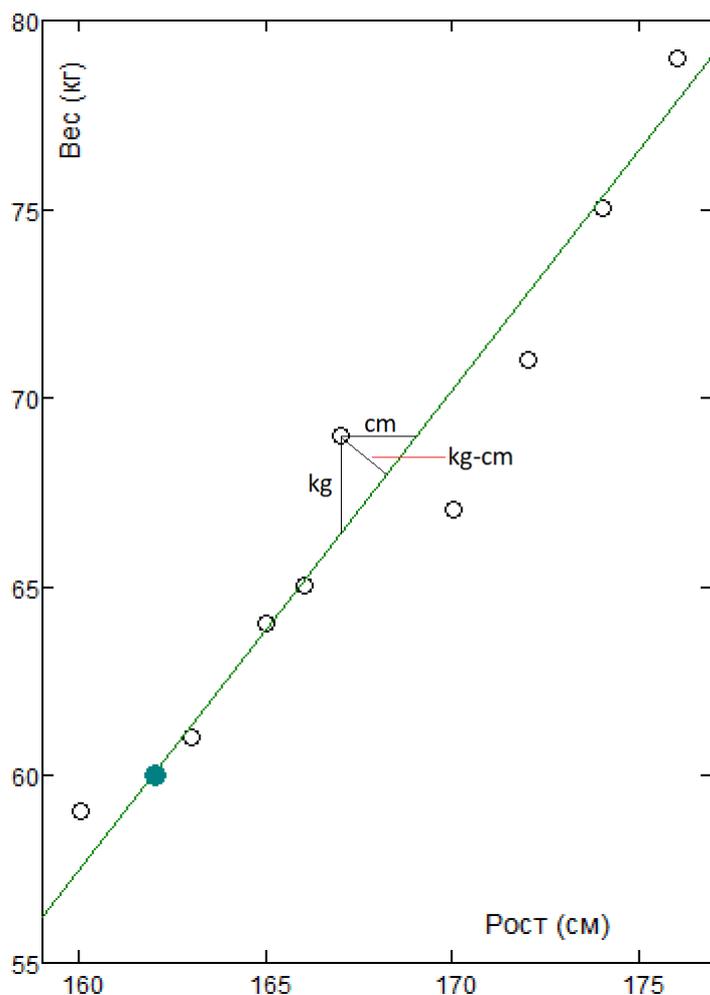


Рис. 22. Что такое овцебык, пардон, килограммо-сантиметр

Есть такое редкое северное животное овцебык. Это и не овца (баран) и не бык, а что-то совсем иное, но имеющее что-то общее с этими парнокопытными— с овцой (густой мех) и быком (размер). Можно предположить, что наша статистическая задача требует использования новой единицы массы-длины *килограммо-сантиметр*. Это не произведение килограмма на сантиметр (как при использовании единицы киловатт-час, напрмер), а что-то более сложное. Пока же, при решении задачи, показанной на рис. 22, были использованы псевдоединицы физических величин:  $\text{kg} := 1$ ,  $\text{m} := 1$ ,  $\text{cm} := \text{m} / 100$  и т. д. И это связано уже не с недоработками пакета Mathcad (это мы уже отмечали, решая задачу на рис. 20), а с «недоработками» самой теории размерных величин: сугубо размерная величина есть, а единицы ее измерения нет! Вспомним детскую хулиганскую песенку: «\*\*\*\*\* есть, а слова нет!». Такой подход к решению задачи линейного регрессионного анализа матросов «Наутилуса» исключит бросание монетки!

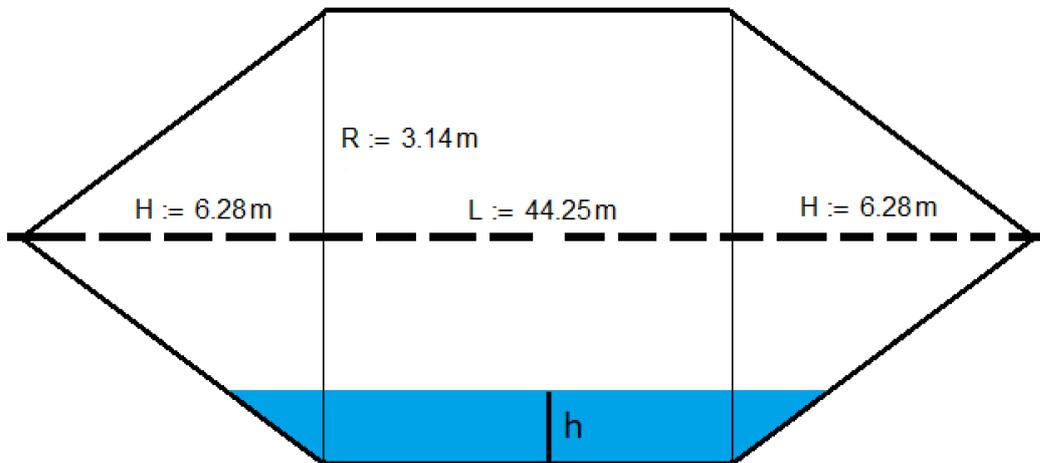
Рисунки 21 и 22 подсказывают интересную идею для подведения итогов различных конкурсов красоты. Сейчас в них слишком много субъективности, а значит — обид, слез и

даже судебных тяжб. В финалы таких конкурсов обычно попадают «красавицы-раскрасавицы», из которых довольно трудно выбрать самую оптимальную, пардон, самую красивую мисс или миссис. Так вот, можно у этих финалисток измерить вес и рост или другие размеры (пресловутые 90–60–90, например), провести через точки линию и выбрать победительницу — см. закрашенные кружочки на рис. 21 и 22.

Точки, показанные на рис. 21 и 22, можно уподобить рифам, сквозь которые штурман «Наутилуса» прокладывает курс подводного судна. Только вертикальная ось фиксирует не длину (как горизонтальная ось), а массу. В этом заключается метрологическая загадка этой «карты»!

Но на конкурсах красоты есть этапы, где оцениваются не внешние данные участников, а их интеллектуальные способности, если, конечно, такие имеются.

Давайте такой этап конкурса проведем среди экипажа подводной лодки «Наутилус». Но перенесем экипаж в наши дни: посадим людей за компьютер с выходом в Интернет и с пакетом Mathcad и дадим им такое задание: вычислить объем воды на дне резервуара с размерами подводной лодки «Наутилус», если известна величина  $h$  — см. рис. 23. Кто первый решит эту задачу, тот и будет победителем!



$$V_{\text{лодки}} := 2 \cdot \left| \begin{array}{l} \text{Объем конуса} \\ \frac{1}{3} \pi R^2 \cdot H \end{array} \right| + \left| \begin{array}{l} \text{Объем цилиндра} \\ \pi R^2 \cdot L \end{array} \right| = 1500.32 \text{ m}^3$$

$$V_{\text{воды}}(h) := 2 \cdot \left| \begin{array}{l} \text{Конусное "копыто"} \\ \alpha \leftarrow \arccos\left(\frac{R-h}{R}\right) \\ \frac{1}{3} R^2 \cdot H \cdot \left( \alpha - 2 \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha) + \cos(\alpha)^3 \cdot \ln\left(\tan\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right) \right) \end{array} \right| + \left| \begin{array}{l} \text{Сегмент цилиндра} \\ \theta \leftarrow 2 \cdot \arccos\left(\frac{R-h}{R}\right) \\ \left[ \frac{1}{2} \cdot R^2 \cdot (\theta - \sin(\theta)) \right] \cdot L \end{array} \right|$$

$$V_{\text{воды}}(0) = -0 \text{ m}^3 \quad V_{\text{воды}}(R) = 750.16 \text{ m}^3 \quad h := 25 \text{ cm} \quad V_{\text{воды}}(h) = 18.42 \text{ m}^3$$

Рис. 23. Расчет объема жидкости на дне подводной лодки

Задача сводится к выводу и/или нахождению в справочниках формул для вычисления объема части прямого кругового конуса (конусного копыта) и объема части прямого кругового цилиндра. Эти части получаются за счет сечения цилиндра и конуса плоскостью — «зеркалом» поверхности воды на дне резервуара.

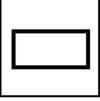
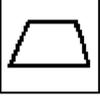
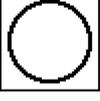
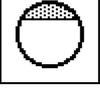
На рисунке 24 показаны «справочные ресурсы» Mathcad, откуда можно взять формулу для вычисления площади кругового сегмента, умножение которой на длину цилиндрической части лодки  $L$  дает объем воды в центральной части лодки.

Mathcad Resources: Areas and Perimeters

Файл Правка Вид Вставка Формат Инструменты Символьные операции Книга Справка

reference tables

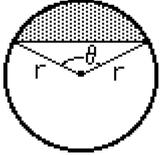
## AREA AND PERIMETERS

-  [Triangle](#)
-  [Rectangle](#)
-  [Parallelogram](#)
-  [Trapezoid](#)
-  [Circle](#)
-  [Inscribed Circle](#)
-  [Circumscribed Circle](#)
-  [Sector of a Circle](#)
-  [Circular Segment](#)

AREAS AND PERIMETERS

reference tables

**Circular Segment**



Area:  $\left( \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot (\theta - \sin(\theta)) \right)$

Нажмите F1, чтобы открыть справку. АВТО

Рис. 24. Справочная информация пакета Mathcad

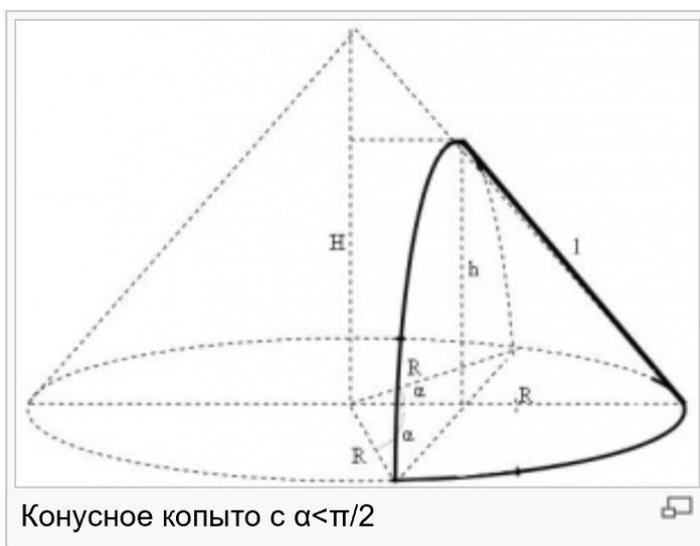
В формуле на рисунке 24 фигурирует угол  $\theta$ , а не нужная нам длина  $h$ . Но символьная математика пакета Mathcad позволяет быстро вывести требуемую дополнительную формулу<sup>13</sup>, связывающую угол  $\theta$  и длину  $h$ . Достаточно только вспомнить, что такое косинус угла (отношение прилежащего катета к гипотенузе) и выбрать из ответа нужный фрагмент (см. рис.25).

$$\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{R-h}{R} \text{ solve, } \theta, \text{ fully} \rightarrow \begin{cases} \left( \begin{array}{l} 2 \cdot \arccos\left(\frac{R-h}{R}\right) + 4 \cdot \pi \cdot \_n \\ 4 \cdot \pi \cdot \_n - 2 \cdot \arccos\left(\frac{R-h}{R}\right) \end{array} \right) & \text{if } \_n \in \mathbb{Z} \wedge \_n \in \mathbb{Z} \\ \text{undefined} & \text{otherwise} \end{cases}$$

Рис. 25. Символьное решение уравнения кругового сегмента

Формулы же для нахождения объема части конуса в справочных таблицах Mathcad нет. Эту формулу придется искать в Интернете. По запросу «объем части конуса» такая информация не была найдена. Но если вспомнить, что такая часть конуса имеет название «копыто», вернее, «конусное копыто», то нужная формула будет быстро найдена (рис. 26).

 <http://cyclowiki.org>



$$V_{\text{кон.кон}} = \frac{1}{3} R^2 H \left[ \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha + \cos^3 \alpha \ln \operatorname{tg} \left( \frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right]$$

<sup>13</sup> Формулу, связывающую  $h$  и  $\theta$ , в данном случае проще вывести в уме, чем привлекать к этой работе пакет Mathcad — также сноску 3.

Рис. 26. Справочная информация из Интернета

Формулу из рисунка 26 нужно будет также приспособить для решения задачи конкурса, красоты, вернее, интеллекта матросов, связав угол  $\alpha$  с длиной  $h$  (рис. 27).

$$\cos(\alpha) = \frac{R-h}{R} \text{ solve } \alpha, \text{ fully} \rightarrow \begin{cases} \left[ \begin{array}{l} \arccos\left(\frac{R-h}{R}\right) + 2 \cdot \pi \cdot \_n \\ 2 \cdot \pi \cdot \_n - \arccos\left[\frac{1}{R} \cdot (R-h)\right] \end{array} \right] & \text{if } \_n \in \mathbb{Z} \wedge \_n \in \mathbb{Z} \\ \text{undefined} & \text{otherwise} \end{cases}$$

Рис. 27. Символьная математика готовит переменную для формулы

Примечание. В обсуждениях к сайту, показанному на рис. 26, сказано, что там сначала была формула с ошибкой, но стараниями одного посетителя этого сайта она была исправлена. Это большое преимущество электронных справочных ресурсов по сравнению с бумажными, где «что написано пером — не вырубишь топором». Тем не менее, и электронные ресурсы нужно проверять на отсутствие ошибок. Так на рисунке 23 перед вычислением объема воды на дне резервуара при  $h = 25 \text{ cm}$  был проведен тест: расчет объема воды при  $h = 0$  (воды нет) и  $h = R$  (резервуар наполнен наполовину). Ответы (нуль и половина объема полного бака) оказались правильными.

Два примечания к решению задачи об объеме жидкости: незначительное и значительное.

Незначительное замечание. Формулы объема конусного копыта, показанные на рис. 23 и 26 эквивалентны по содержанию, но отличаются по форме. В частности, при записи формул в среде Mathcad (рис. 23) аргументы тригонометрических функций и функции натурального логарифма заключены в скобки. Кроме того, применяется иная запись возведения в степень тригонометрических функций: не  $\cos^3\alpha$ , а  $\cos(\alpha)^3$ . В настоящее время наблюдается тенденция изменения нотации математических формул в плане приближения их формы к требованиям математических пакетов.

Значительное замечание. Данная задача с решением (рис. 23) была выложена для обсуждения и подсказок на форуме пользователей пакета Mathcad по адресу <https://community.ptc.com/t5/PTC-Mathcad-Questions/Volume-of-a-part-of-the-cone/td-p/493891>. В одной из реплик на данное сообщение было дано альтернативное решение задачи без использования готовых формул, а с опорой на интегрирование при определении частей объемов цилиндра и конуса. Это решение дал Вернер Эксингер (Werner Exinger) из Австрии (рис. 29).

$$H := 6.28\text{m} \quad R := 3.14\text{m} \quad L := 44.25\text{m}$$

$$f_1(x) := \frac{R}{H}x \quad x_1(h) := f_1(x) = R - h \text{ solve, } x \rightarrow \frac{H \cdot (R - h)}{R}$$

$$V(h) := 4 \cdot \int_{x_1(h)}^H \int_{R-h}^{f_1(x)} \sqrt{f_1(x)^2 - \eta^2} \, d\eta \, dx + 2 \cdot \int_{R-h}^R \sqrt{R^2 - \eta^2} \, d\eta \cdot \int_H^{H+L} 1 \, dx$$

$$V(0\text{m}) = 0\text{m}^3 \quad V(25\text{cm}) = 18.423\text{m}^3 \quad V(R) = 750.159\text{m}^3$$

Рис. 28. Интегральное решение задачи об объеме жидкости

Решение, показанное на рис. 28, более универсальное и, главное, оно нас возвращает к истокам... дифференциального и интегрального вычисления.

В свое время подобной задачей увлекся великий Кеплер. Его смущало, что вместимость винных бочек определяли всего лишь одним замером — см. рис. 29. Это увлечение привело к написанию книги [8], в которой излагались азы интегрального исчисления задолго до Ньютона, Лейбница и других великих математиков.



Рис. 29. Бочка Кеплера

Данная задача может иметь интересное продолжение. На рисунке 30 показаны три проекции резервуара (подводной лодки) с жидкостью на дне: вид сбоку (трапеция), вид сверху (два параллельных отрезка прямой и два отрезка гиперболы) и вид с торца (круговой сегмент). Во-первых, хорошо бы рассчитать площадь зеркала жидкости в зависимости от величины  $h$ , а во-вторых, создать анимацию изменения формы этого зеркала при медленном наклоне резервуара от горизонтального к вертикальному положению. Гипербола при этом сначала будет трансформироваться в две пересекающиеся прямые линии, затем опять вернется к гиперболе, потом превратиться в параболу, в эллипс и, наконец в окружность. Это лабораторная работа хорошо вписывается в рамки дисциплины «Инженерная графика» (старое название «Начертательная геометрия») с ее сечениями и проекциями.

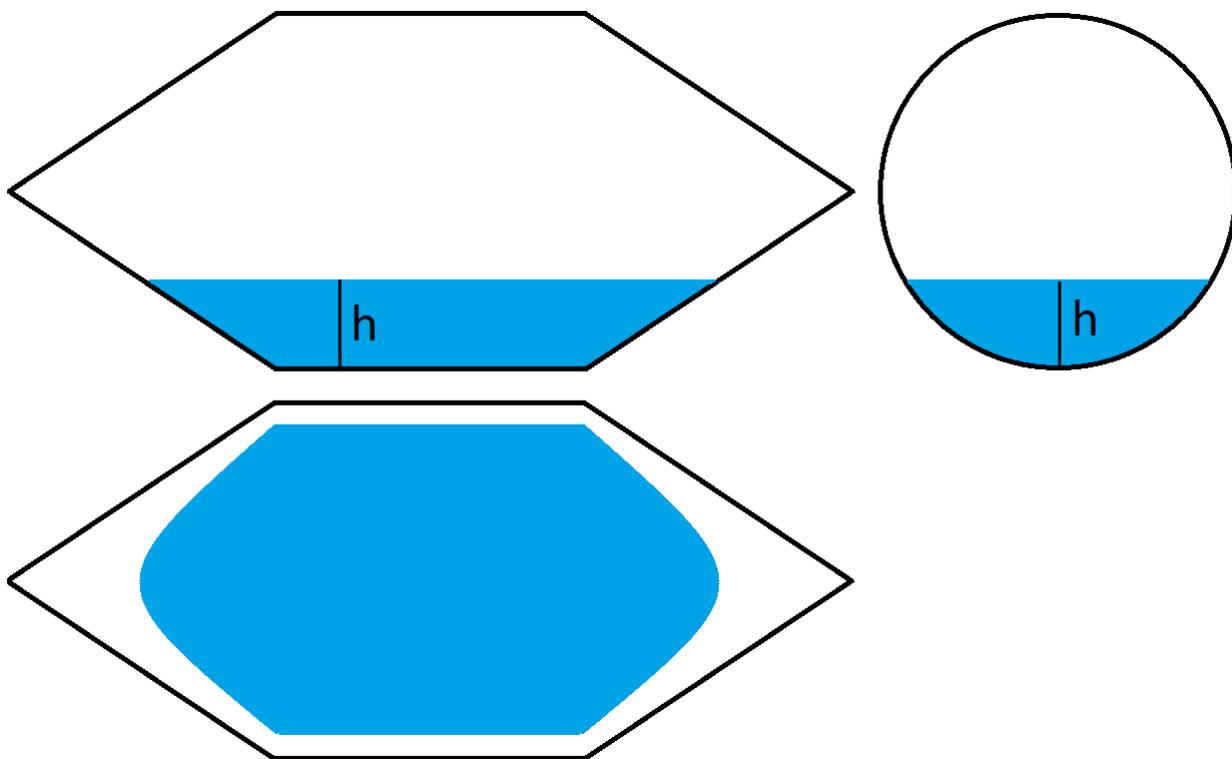


Рис. 30. Три проекции резервуара с жидкостью на дне

И последнее.

Мы недаром упомянули деревянную бочку (рис. 29). Дело в том, что первые подводные лодки пытались переделывать из... больших винных бочек — см. рис. 31. Этой ремаркой мы «закругляем» статью в смысле не только того, что мы ее заканчиваем, а и в том смысле, что мы отсылаем читателя... в начало статьи.

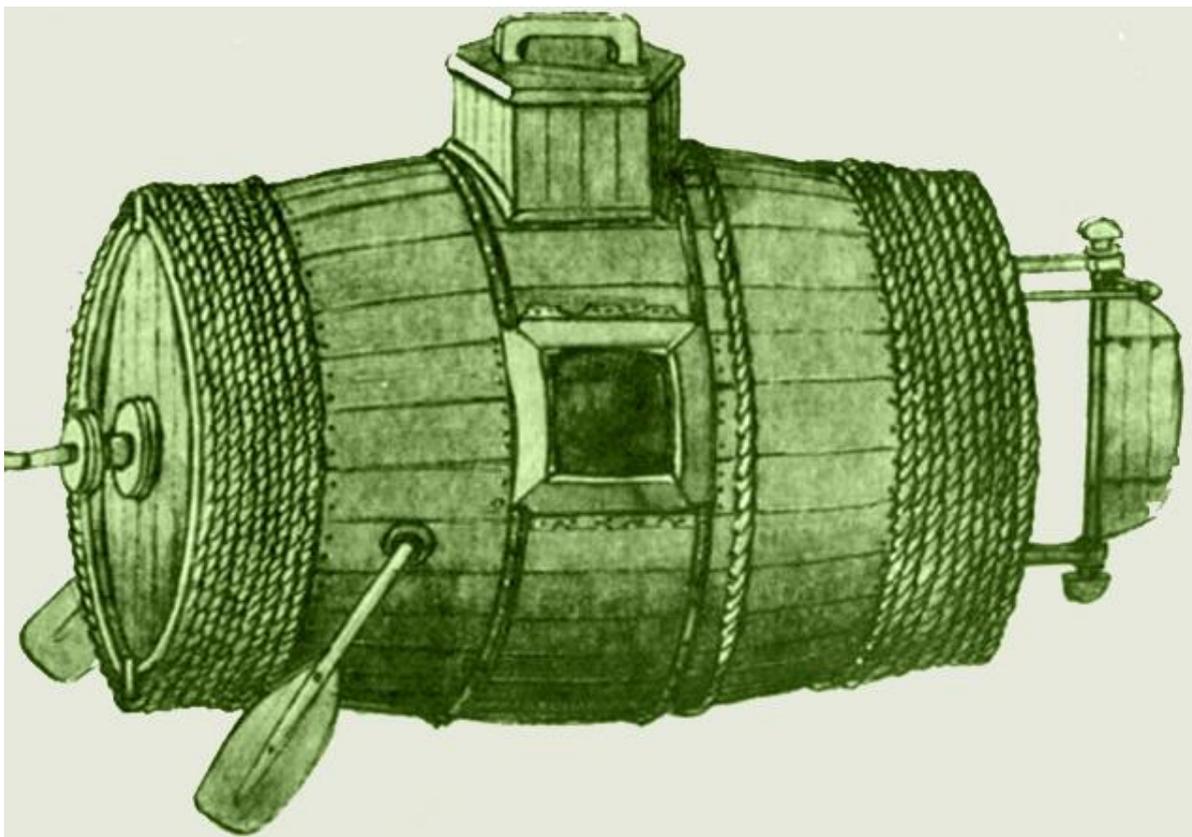


Рис. 31. Изображение первой подводной лодки

Вывод-заключение.

В настоящее время высшее образование можно получить, и не посещая университет. В Интернете для этого есть много доступных ресурсов разной степени сложности. Данная статья — это по своей сути некий учебный материал к такому самостоятельному занятию студента. А какое это занятие? По математике, информатике, физике, химии, литературе, инженерной графике или истории? Ответ: это занятие в рамках образовательной технологии STEM/STEAM/STREAM, не «рвущий» процесс получения знаний на отдельные традиционные учебные дисциплины! При этом тестирование учащихся по математике и другим дисциплинам стоит проводить на компьютере с современными математическими программами и с выходом в Интернет.

Описанные в статье задачи были положены в основу семинаров по Mathcad (14.11.2017 — см. <http://events.softline.ru/event/11229>) и Maple (15.11.2017 — см. <https://www.maplesoft.com/company/events/index.aspx>), где помимо прочего, рассматривались перспективы использования математических пакетов в отдельном или

совместном преподавании информатики, математики, физики, гидрогазодинамики, сопромата, литературы, основ мировых религий, политологии и других учебных дисциплин [9] с опорой на технологию STEM (или STEAM/STREAM — см. сноску 7).

#### Литература:

1. Верн, Жюль. Двадцать тысяч льё под водой / пер. с фр. Н. Яковлева, Е. Корш. — М.: Государственное издательство художественной литературы, 1956. — 478 с. (<http://www.lib.ru/INOFANT/VERN/20000lje.txt>)
2. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления М.: Физматлит, 2008 г. ([http://www.newlibrary.ru/author/fihtengolc\\_g\\_m\\_.html](http://www.newlibrary.ru/author/fihtengolc_g_m_.html))
3. Очков В.Ф., Бобряков А.В., Хорьков С.Н. Гибридное решение задач на компьютере // Cloud of Science. Том 4 № 2. 2017. С. 5-26 (<http://twt.mpei.ac.ru/ochkov/hybrid.pdf>)
4. Нарышкин Д.Г. Химическая термодинамика с Mathcad. Расчетные задачи. М.: Инфра-М, РИОР, 2016. — 199 с.
5. Коробов В.И., Очков В.Ф. Химическая кинетика: введение с Mathcad/Maple/MCS М.: Горячая линия-Телеком, 2009 (2015 - второе издание), - 384 с. (<http://twt.mpei.ac.ru/ТТНВ/New-Chem-Kin/En-Ru-book.html>)
6. Александров А.А. ТЕПЛОФИЗИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА РАБОЧИХ ВЕЩЕСТВ ТЕПЛОЭНЕРГЕТИКИ / А.А. Александров, К.А. Орлов, В.Ф. Очков. - 2-е изд., перераб. и допол. - М.: Издательский дом МЭИ. 2017. - 226 [8] с.: ил. (<http://twt.mpei.ac.ru/rbtpp>)
7. Очков В.Ф., Богомолова Е.П. Интерполяция, экстраполяция, аппроксимация или «Ложь, наглая ложь и статистика» // Cloud of Science. Т. 2, № 1. 2015. С. 61-88 (<http://twt.mpei.ac.ru/ochkov/stat.html>)
8. И. Кеплер Стереометрия винных бочек / пер. с лат. (Серия «Классики естествознания»). — М.-Л.: ГТТИ, 1935
9. Очков В.Ф., Богомолова Е.П., Иванов Д.А. Физико-математические этюды с Mathcad и Интернет. Издательство Лань. 2016.

Сведения об авторах:

Очков Валерий Федорович

д.т.н., профессор, профессор Национального исследовательского университета «МЭИ»

e-mail: [ochkov@twt.mpei.ac.ru](mailto:ochkov@twt.mpei.ac.ru)

Федоров Юрий Сергеевич

доцент Национального исследовательского университета «МЭИ»

e-mail: FedorovYS@mpei.ru

Воронова Екатерина Сергеевна

студентка Национального исследовательского университета «МЭИ»

e-mail: VoronovaYS@mpei.ru

Моисеева Анастасия Дмитриевна

студентка Национального исследовательского университета «МЭИ»

e-mail: MoiseevaAnD@mpei.ru