

# Механика в среде Mathcad

В. Ф. Очков

Национальный исследовательский университет «МЭИ»  
111250, Москва, ул. Красноказарменная, 14  
Московский лицей № 1502 при МЭИ

e-mail: ochkov@twt.mpei.ac.ru

Автор статьи ведет занятия по численным методам в среде Mathcad не только со студентами Московского энергетического института, но и со школьниками в продвинутом московском лицее № 1502 при МЭИ [1, 2]. В лицее физические кабинеты расположены рядом с кабинетами информатики. На уроках информатики лицеисты изучают язык Паскаль. Такие уроки – это фактически не уроки информатики, а уроки программирования, что, как понимает читатель, далеко не одно и то же. При этом напрочь игнорируются современные компьютерные математические пакеты, которые могут помочь школьникам и студентам не только изучать ту же информатику, но и решать задачи по математике, физике, химии... Сейчас же на уроках информатики решаются абстрактные задачи, никак не связанные с учебным процессом. А такая, междисциплинарная связь очень важна.

Школьники или студенты, выполнив в кабинете физики, лабораторную работу с фото- и видеосъемкой, могут перейти в класс информатики и реализовать там на компьютере математическую модель исследуемого механического явления, что, как понимает читатель, существенно повысит эффективность занятий. При этом будет развит «вкус к математике», без которого человек так и останется ущербным. Сейчас же в школах подготовкой к пресловутым ЕГЭ прививается скорее отвращение и к математике, и к физике, и к информатике, и к программированию...

Математика – это еще и самая лучшая гимнастика для ума. Данная статья – это попытка передать читателям то механико-математическое наслаждение, какое получил автор, контактируя с обычными на первый взгляд предметами...

Как-то раз автор расчищал ящики своего письменного стола. На дне одного из них оказались две вещи, которые почти вышли из употребления в наш электронно-компьютерный век: пачка миллиметровой бумаги и разновесы для лабораторных весов. Там же нашлись катушка ниток и коробочка с булавками. А в это время автор обдумывал лабораторную работу для лицеистов, где реальный эксперимент сопровождался бы его компьютерным моделированием в среде Mathcad [3] и сравнением результатов «физики» и «компьютерной математики». Находки в столе (миллиметровка, разновесы, нитки и булавки) подсказали такую работу из области *механики*.

## Часть I. Статика

Лист миллиметровой бумаги крепится на стене – см. рис. 1. С помощью булавок к бумаге с двух концов прищипливается нить, к которой привязаны три гири массой 20, 2 и 10 грамм из коробочки с разновесами. Известны координаты крепления нити к бумаге: 0–180 и 280–150 мм, а также длины отрезков нити между узлами с гирьками: 90, 68, 96 и 130 мм. Они были замерены линейкой до подвеса гирек на стене. Необходимо определить координаты «узловых» точек 1, 2 и 3 – точек излома провисающей нити. «Физически» это сделать несложно – достаточно взглянуть на рис. 1 и снять с миллиметровки координат узлов. Они примерно такие: 31–95, 95–72 и 191–68 мм. А как эти координаты рассчитать вручную или на компьютере в среде Mathcad?!

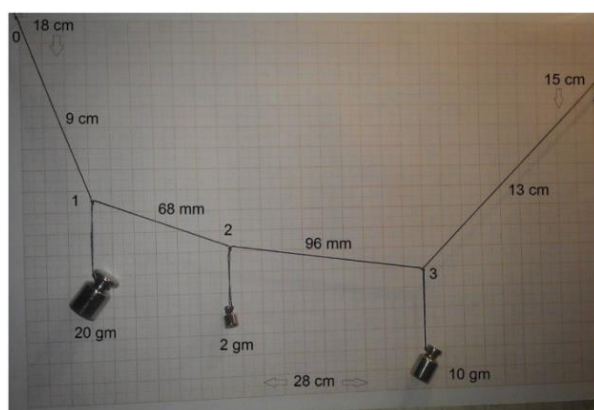


Рис. 1. Физический эксперимент с гирьками на нити и миллиметровке

ORIGIN		rc	TOL	CTOL					
1	<b>g·gm</b>	10 <sup>-7</sup>	10 <sup>-7</sup>						
$x_0$	$y_0$	$x_4$	$y_4$	mass	$L_{01}$	$L_{12}$	$L_{23}$	$L_{34}$	
(cm)	(cm)	(cm)	(cm)	(gm)	(cm)	(cm)	(cm)	(cm)	
0	18	28	15	20 2 10	9	6.8	9.6	13	

$$PE(x, y) := \mathbf{g} \cdot \sum_{i=1}^3 (\text{mass}_i \cdot y_i)$$

Рис. 2. Расчет равновесия гирек на нити (начало расчета)

Задача относится к классу хорошо известных задач классической механики под названием *задача веревочного многоугольника* (по-английски Funicular Polygon) [4]. Берется невесомая нерастяжимая абсолютно гибкая нить («веревка»), которая фиксируется с двух концов и к которой прикладываются силы в разных точках и в разных направлениях. Веревка принимает форму разомкнутого многоугольника, параметры которого необходимо определить. Если веревка довольно весома (металлическая цепь, например), то под действием силы тяжести, равномерно распределенной по длине, она примет форму кривой, которая описывается *цепной функцией* [3, 5-6]. Задачу веревочного многоугольника приходится решать инженерам, когда, они проектируют висячий мост. А наша конструкция на рис. 1 именно такой мост и напоминает: стоит только добавить еще одну нить (веревку, трос, цепь) и заменить гирьки на дорожное полотно для пешеходов и транспорта.

В учебниках и справочниках, найденных в Интернете, приведен ряд формул и хитрых алгоритмов, по которым можно решить эту задачу. Но все эти формулы и алгоритмы создавались во времена, когда не было компьютерных математических пакетов с их мощными, ранее невиданными

инструментами численного и аналитического решения задач<sup>1</sup>. Теперь же они есть и это дает нам возможность внести что-то новое в решение задачи.

Классическая (ньютоновская) механика предписывает в данном случае составить систему уравнений баланса сил и решить ее. Сейчас же мы забудем на минутку о Ньюtone с его силами, вспомним о другом великом математике и механике – о Лагранже и о том, что в среде Mathcad есть встроенные инструменты численного решения задачи оптимизации с ограничениями. Ведь по Лагранжу наши гирьки на рис. 1 зависят так, чтобы их потенциальная энергия была минимальной. Не дают же гирькам упасть на пол отрезки нити между узлами – эти самые ограничения.

На рисунках 2–4 показано решение задачи о трех гирьках в среде Mathcad Prime с использованием встроенной функции из великолепной семерки Mathcad [7] – функция **Minimize**.



Рис. 3. Расчет равновесия гирек на нити – окончание (начало на рис. 2)

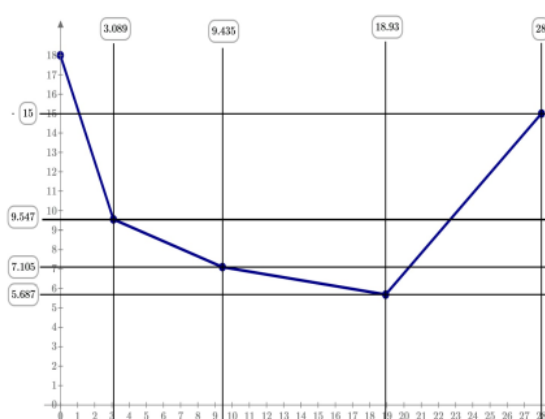


Рис. 4. График провисания нити с гирьками

На рисунке 2 показана, во-первых, *настройка* пакета Mathcad на решение данной задачи, во-вторых, *ввод* постоянных параметров нити с гирьками, и в-третьих, *создание* пользовательской функции с именем **PE**, возвращающей потенциальную энергию трех висящих гирек, отмеренную от нижней линии миллиметровки на рис. 1. Функция **PE** имеет два аргумента  $x$  и  $y$ , хотя в ее описании присутствует только один аргумент  $y$ . Фиктивный аргумент  $x$  введен для того, чтобы работал инструмент минимизации, который показан на рис. 3 и который минимизирует по двум, а не по одному параметру.

Расчет положения грузиков, при которых их потенциальная энергия будет минимальной, показан на рис. 3. Внизу рисунка выведен результат расчета значений векторов  $x$  и  $y$  (значений, найденных функцией **Minimize**) и цифры, снятые с миллиметровки на рис. 1. Отклонения составили менее одного процента. Они связаны в том числе и с тем, что не учитывался вес нити.

<sup>1</sup> Смотришь в классические учебники и задачки по теоретической механике и... чешутся руки переписать их с учетом возможностей современных компьютерных математических программ. А главное, есть желание добавить новые задачи, решение которых немислимо без этих программ.

На рисунке 4 показано графическое отображение нашего решения. Маркерами (горизонтальными и вертикальными линиями) отмечены узловые точки на графике с показом соответствующих численных значений.

## Часть II. Динамика

Наша нить с грузиками, как мы уже отметили в начале статьи, подобна цепи или канату, удерживающему пролеты моста. Обрыв каната влечет за собой разрушение всей конструкции. Но перед такой техногенной катастрофой мост, как правило, начинает раскачиваться (колебаться). На сложных мостовых конструкциях ведется постоянный мониторинг этого явления с помощью видеосъемки или специальных датчиков. Давайте и мы смоделируем этот процесс: отклоним третий узел нашей нити (см. рис. 1) вправо и вниз, а затем отпустим гири «в свободный полет» – рассчитаем траектории движения узловых точек, рассматривая их опять же как материальные точки с массой соответствующих гирек – см. рис. 5–9. Точки 1 и 3 должны при этом качаться по дугам окружности, а точка 2 – делать замысловатые па.

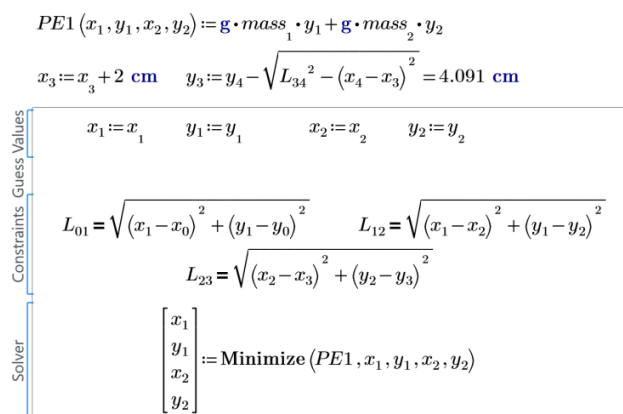


Рис. 5. Расчет координат узловых точек 1 и 2 нити при отклонении ее третьей точки на 2 см вправо

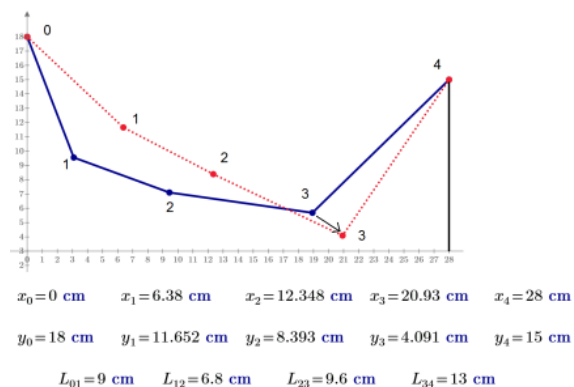


Рис. 6. Геометрия положения нити с тремя грузиками в начале ее качания

На рисунке 5 показано решение задачи о положении точек 1 и 2, если точка 3 отклонена вправо на два сантиметра. Ведется та же минимизация потенциальной энергии, но не трех, а двух гирек. Геометрия нити в начале ее качания (ломанный пунктир) и при равновесном состоянии (сплошная ломанная линия) показана на рис. 6. На рисунке 7 показана область блока решения Mathcad Prime с записанными в ней алгебраическими и дифференциальными уравнениями, а также начальными условиями. На рисунке 8 показана область Решателя. На точки 1, 2 и 3 действуют силы натяжения двух нитей (эти силы мы спроецируем на оси абсцисс и ординат) и силы тяжести, которые действуют только в вертикальном направлении. Все эти силы уравниваются произведением массы соответствующей материальной точки на ее ускорение – на вторую производную пути по времени. Принимается, что в начальный момент времени скорости точек равны нулю. Равны нулю также и силы  $F$ , растягивающие нити – мы как бы поддерживаем навесу эти три точки, а потом при  $t = 0$  разом отпускаем их в полет, сдерживаемый «вожжами» – натянутыми нитями.

Solve

Point 1

$$x1(0\text{ s})=x_1 \quad y1(0\text{ s})=y_1 \quad x1'(0\text{ s})=0\text{ kph} \quad y1'(0\text{ s})=0\text{ kph}$$

$$L_{01}^2 = (x1(t) - x_0)^2 + (y1(t) - y_0)^2 \quad F01(0\text{ s})=0\text{ N}$$

$$mass_1 \cdot x1''(t) = F01(t) \cdot \frac{x_0 - x1(t)}{L_{01}} - F12(t) \cdot \frac{x1(t) - x2(t)}{L_{12}}$$

$$mass_1 \cdot y1''(t) + g \cdot mass_1 = F01(t) \cdot \frac{y_0 - y1(t)}{L_{01}} - F12(t) \cdot \frac{y1(t) - y2(t)}{L_{12}}$$

Point 2

$$x2(0\text{ s})=x_2 \quad y2(0\text{ s})=y_2 \quad x2'(0\text{ s})=0\text{ kph} \quad y2'(0\text{ s})=0\text{ kph}$$

$$L_{12}^2 = (x2(t) - x1(t))^2 + (y2(t) - y1(t))^2 \quad F12(0\text{ s})=0\text{ N}$$

$$mass_2 \cdot x2''(t) = F12(t) \cdot \frac{x1(t) - x2(t)}{L_{12}} - F23(t) \cdot \frac{x2(t) - x3(t)}{L_{23}}$$

$$mass_2 \cdot y2''(t) + g \cdot mass_2 = F12(t) \cdot \frac{y1(t) - y2(t)}{L_{12}} - F23(t) \cdot \frac{y2(t) - y3(t)}{L_{23}}$$

Point 3

$$x3(0\text{ s})=x_3 \quad y3(0\text{ s})=y_3 \quad x3'(0\text{ s})=0\text{ kph} \quad y3'(0\text{ s})=0\text{ kph}$$

$$L_{23}^2 = (x3(t) - x2(t))^2 + (y3(t) - y2(t))^2 \quad F23(0\text{ s})=0\text{ N}$$

$$mass_3 \cdot x3''(t) = F23(t) \cdot \frac{x2(t) - x3(t)}{L_{23}} - F34(t) \cdot \frac{x3(t) - x_4}{L_{34}}$$

$$mass_3 \cdot y3''(t) + g \cdot mass_3 = F23(t) \cdot \frac{y2(t) - y3(t)}{L_{23}} - F34(t) \cdot \frac{y3(t) - y_4}{L_{34}}$$

$$L_{34}^2 = (x_4 - x3(t))^2 + (y_4 - y3(t))^2 \quad F34(0\text{ s})=0\text{ N}$$

Constraints

$$\begin{bmatrix} x1 \\ y1 \\ x2 \\ y2 \\ x3 \\ y3 \\ F01 \\ F12 \\ F23 \\ F34 \end{bmatrix} := \text{Odesolve} \left( \begin{bmatrix} x1(t) \\ y1(t) \\ x2(t) \\ y2(t) \\ x3(t) \\ y3(t) \\ F01(t) \\ F12(t) \\ F23(t) \\ F34(t) \end{bmatrix}, t_e \right)$$

Рис. 8. Численное решение системы уравнений качания трех грузиков на НИТИ

Рис. 7. Система уравнений качания трех грузиков на нити

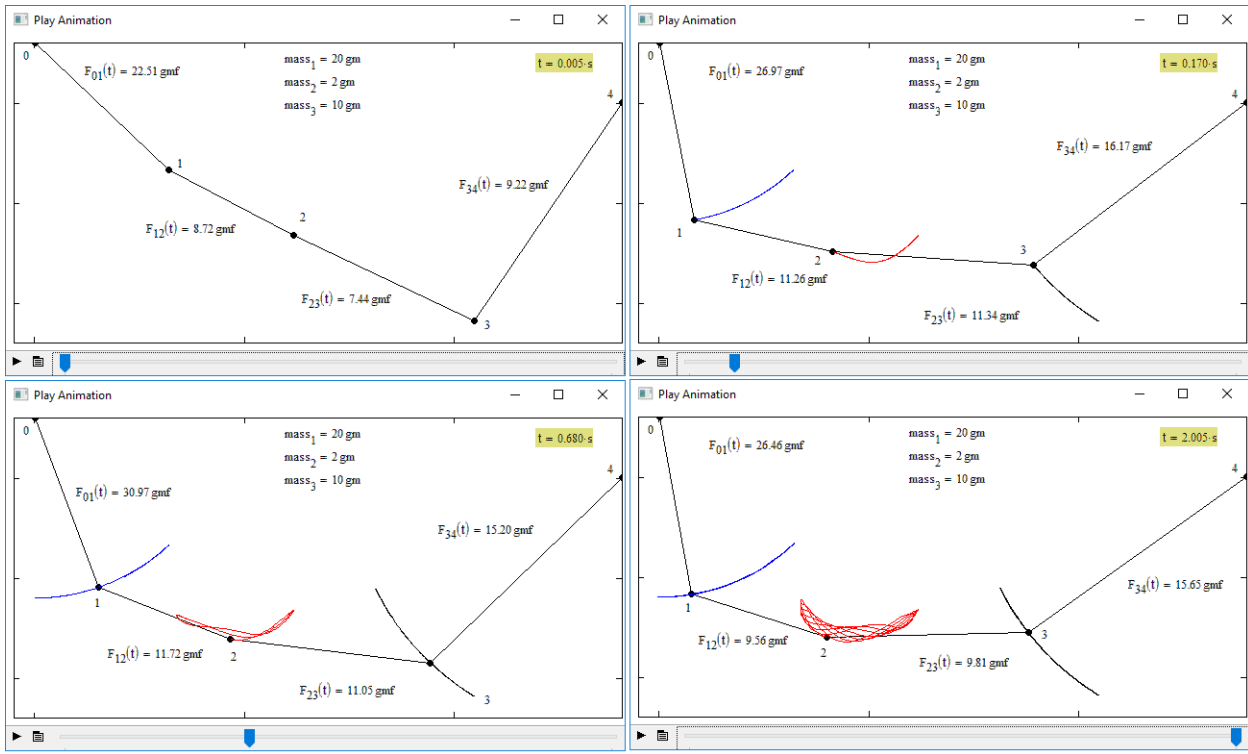


Рис. 9. Четыре кадра анимации качания трех грузиков на нити (анимация <https://www.ptcusercommunity.com/thread/143505>)

Можно было, конечно, выбрать и другое положение нити с грузиками перед их раскачиванием. Хорошо бы обрисовать возможную область всех этих положений, одно из которых равновесное. Но что выбрано, то выбрано.

Примечание. Функция **Odesolve** возвращает не настоящие функции, а некие псевдофункции (см. их список на рис. 8), полученные путем интерполяции точек численного решения системы дифференциальных и алгебраических уравнений. По этим псевдофункциям можно строить графики (что мы и делали на рис. 5), искать у них особые точки, но нельзя видеть их аналитический вид.

Если в системе уравнений, описывающей динамическую модель и показанную на рис. 7, убрать слагаемые со второй производной – с ускорением, то мы получим... систему уравнений, описывающую нашу статическую задачу, показанную на рис. 1. На рисунке 10 показана работа еще одной функции из великолепной семерки Mathcad [5] – функции **Find**, предназначенной для решения систем алгебраических уравнений. Определена не только геометрия нити, но значения сил, растягивающих ее на разных участках. Задача решается с опорой на первое предположение.

<i>L</i>	<i>mass</i>	<i>x<sub>0</sub></i>	<i>y<sub>0</sub></i>	<i>x<sub>4</sub></i>	<i>y<sub>4</sub></i>	<i>gmf</i>
( <i>cm</i> )	( <i>gm</i> )	( <i>cm</i> )	( <i>cm</i> )	( <i>cm</i> )	( <i>cm</i> )	
9	20	0	18	28	15	$\frac{kgf}{1000}$
6.8	2					
9.6	10					
13						

*x* :=  $\begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 10 \end{bmatrix}$  *cm*

*y* :=  $\begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 10 \end{bmatrix}$  *cm*

*F* :=  $\begin{bmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \\ 10 \end{bmatrix}$  *gmf*

*L*<sub>1</sub> =  $\sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2}$

$F_1 \cdot \frac{x_0 - x_1}{L_1} = F_2 \cdot \frac{x_1 - x_2}{L_2}$        $g \cdot mass_1 = F_1 \cdot \frac{y_0 - y_1}{L_1} - F_2 \cdot \frac{y_1 - y_2}{L_2}$

*L*<sub>2</sub> =  $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

$F_2 \cdot \frac{x_1 - x_2}{L_2} = F_3 \cdot \frac{x_2 - x_3}{L_3}$        $g \cdot mass_2 = F_2 \cdot \frac{y_1 - y_2}{L_2} - F_3 \cdot \frac{y_2 - y_3}{L_3}$

*L*<sub>3</sub> =  $\sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2}$

$F_3 \cdot \frac{x_2 - x_3}{L_3} = F_4 \cdot \frac{x_3 - x_4}{L_4}$        $g \cdot mass_3 = F_3 \cdot \frac{y_2 - y_3}{L_3} - F_4 \cdot \frac{y_3 - y_4}{L_4}$

*L*<sub>4</sub> =  $\sqrt{(x_3 - x_4)^2 + (y_3 - y_4)^2}$

$\begin{bmatrix} x \\ y \\ F \end{bmatrix} := \mathbf{Find}(x, y, F)$

*x* =  $\begin{bmatrix} 3.09 \\ 9.44 \\ 18.93 \end{bmatrix}$  *cm*      *y* =  $\begin{bmatrix} 9.55 \\ 7.11 \\ 5.69 \end{bmatrix}$  *cm*      *F* =  $\begin{bmatrix} 24.775 \\ 9.109 \\ 8.596 \\ 12.186 \end{bmatrix}$  *gmf*

Рис. 10. Система уравнений, описывающая статическую задачу без минимизации потенциальной энергии, а с учетом баланса сил

На рисунке 10 мы имеем решение нашей задачи о висящих на нитке гирьках (см. рис. 1) «по Ньютону», а не «по Лагранжу» (см. рис. 3). Но ответы, естественно, совпали!

Предложенную лабораторную работу и математическую модель можно усложнить в таких направлениях:

1. Учитывать вес нити или лучше металлической цепочки, к которой подвешены грузики. Можно к нити или цепочке подвязать воздушный шарик, тянущий нить вверх, или создать такую силу с помощью блока. Подходы к решению такой задачи с использованием цепной функции изложены в этюде 7 учебного пособия [1].
2. Некоторые или все отрезки нерастяжимой нити, показанной на рис. 1, можно заменить на растяжимые пружины или резинки, подчиняющиеся не только закону Гука, но и другому более сложному (нелинейному) закону растяжения-сжатия. Тут уже придется прибегнуть к программированию, но не в среде языка Паскаль, а в среде Mathcad.
3. Висящие на нити грузики можно отклонить не только вправо (рис. 6) и отпустить этот специфический плоский маятник, но и... дополнительно вперед, смоделировав тем самым трехмерный маятник, качающийся не в плоскости, а в объеме. Пока он будет колебаться, переводя потенциальную энергию в кинетическую и обратную, можно пойти в компьютерный класс и смоделировать такой маятник.

Литература и Интернет-источники:

1. Очков В.Ф., Герк С. Активность на форумах – важная часть учебы и последующей инженерной деятельности студента // Открытое образование, № 5, 2014. С. 93-101 (<http://twt.mpei.ac.ru/ochkov/Ochkov-Gurke-OE-5-2014.pdf>)
2. Очков В.Ф., Чудов В.Л., Соколов А.В. Использование форума PTC Community/Mathcad на школьных занятиях по информатике // Информатика в школе. № 10. 2015. С. 46-51 (<http://twt.mpei.ac.ru/ochkov/PTC-Community-Lyc-maket.pdf>)
3. Очков В.Ф., Богомолова Е.П., Иванов Д.А. Физико-математические этюды с Mathcad и Интернет. Издательство Лань. 2016 (<https://www.ptcusercommunity.com/groups/etudes>)
4. Валле Пуссен. Лекции по теоретической механике. М.: Государственное издательство иностранной литературы. 1948. ([http://stu.alnam.ru/lect\\_teor\\_m1-46](http://stu.alnam.ru/lect_teor_m1-46); примечание: есть более свежие книги с задачей веревочного многоугольника, но они пока не выложены в открытых легальных Интернет-ресурсах)
5. Очков В.Ф., Богомолова Е.П., Иванов Д.А. Программное уравнение или ФМИ // Cloud of Science. Т. 2, № 3. 2015. С. 473-515 (<http://twt.mpei.ac.ru/ochkov/PMI.pdf>)
6. Очков В. Ф., Цуриков Г.Н., Чудова Ю.В. Осторожно: цепная функция // Информатика в школе. № 4 за 2017 г. С. 58-62 (<http://twt.mpei.ac.ru/ochkov/Chain.pdf>)
7. Очков В.Ф., Богомолова Е.П., Мати Хейнлоо. Решатели или Великолепная семерка Mathcad // Открытое образование. № 3. 2015. С. 37-50 (<http://twt.mpei.ac.ru/ochkov/Solvers-OE.pdf>)