

Занятие 4. Инженерный расчёт: оптимальность и изящество

Или

Цепное число π

4.1. Красивая цепная ограда

Представьте себе, что вам как инженеру и дизайнеру (архитектору¹, художнику) нужно спроектировать и построить декоративную ограду – установить на земле чугунные столбики и повесить на них цепь (рис. 4.1). Как это сделать так, чтобы ограда получилась и красивой, и оптимальной в инженерном плане. Есть такая неявная связь: мост или иное инженерное сооружение априори считается прочным, если оно красивое! Взгляните на Шуховскую башню, например, или на другие подобные сооружения, вызывающие у людей беспорное восхищение! При этом нужно не забывать и об экономике – сооружение должно быть не слишком дорогим по себестоимости. Но реальная цена сооружения, если оно становится шедевром инженерной мысли и художественного воплощения, может быть очень высокой. Или вообще никакой. Кто может определить современную стоимость той же Шуховской башни. Она бесценна!



¹ На многих инженерных сооружениях можно увидеть табличку с указанием проектировщика и архитектора.

Занятие 4

Рис. 4.1. Висящая цепь образует цепную линию

(https://ru.wikipedia.org/wiki/Цепная_линия)

Давайте, исходя из таких технико-экономических и эстетических позиций рассчитаем нашу цепную ограду [1]. Можно, конечно, постараться максимально сэкономить на цепи – брать её предельно короткие отрезки и цеплять их за столбики почти горизонтально, а сами столбики делать низкими и ставить их редко. Но такая ограда будет и некрасивой, и непрактичной с точки зрения инженерного дела. Нужно будет прилагать большие усилия (см. силу F на рис. 4.1), чтобы цеплять такую цепь (просим простить за тавтологию) на смежные столбики. Цепь при этом будет натянута как струна. А если на такую цепь кто-то ненароком наступит или даже сядет, и также попытается переехать её на велосипеде [2], то она может порваться, а столбики могут завалиться. Если же удлинять отрезки цепи, то сила, действующая на столбики, сначала будет уменьшаться (натяжение струны будет ослабевать), а потом станет расти за счет увеличивающегося веса цепи. Если, конечно, цепь просто не ляжет на землю. Тут сразу возникает в уме некая гладкая функция силы натяжения цепи у точек крепления на столбиках в зависимости от длины цепи. У такой функции должен быть минимум. А давайте рассчитаем его – определим длину цепи, при которой сила F на рис. 4.1 будет минимальной.

На рисунке 4.2 показан такой несложный расчёт, выполненный в среде SMath.

В пункте 1 расчёта на рис. 4.2 переменным L и g_c присваиваются значения расстояния между столбиками и удельного веса цепи (сколько ньютонов весит один метр цепи). Цифры условные и они никак не влияют на результат расчёта – на отношение длины оптимальной цепи к расстоянию между точками крепления. Мы будем использовать численные методы решения, не прибегая к составлению и решению уравнения (аналитический метод), поскольку оно оказывается довольно сложным: содержит обратный гиперболический тангенс. Этот прием отказа от составления уравнения будет повторен в на занятии 9 при решении задачи о погоне.

Занятие 4

$m := 1$ $N := 1$ Работаем с псевдоединицами длины и силы

$$L := 1 \text{ m} \quad g_c := 1 \frac{N}{m} \quad (1)$$

$$y(x, a) := a \cdot \operatorname{ch}\left(\frac{x - \frac{L}{2}}{a}\right) - a \quad y(0 \text{ m}, 1 \text{ m}) = 0.1276 \text{ m} \quad (2)$$

$$S(a) := \int_{0 \text{ m}}^L \sqrt{1 + \frac{d}{dx} y(x, a)^2} dx \quad S(1 \text{ m}) = 1.0422 \text{ m} \quad (3)$$

$$S(a) := 2 \sqrt{(y(0 \text{ m}, a) + a)^2 - a^2} \quad S(1 \text{ m}) = 1.0422 \text{ m} \quad (4)$$

$$a(S) := \operatorname{solve}(S(a) = S, a, 0.1 \text{ m}, 2 \text{ m}) \quad a(1.5 \text{ m}) = 0.3082 \frac{N}{N \cdot m^{-1}} \quad (5)$$

$$F_y(S) := \frac{g_c \cdot S}{2} \quad F_y(1.5 \text{ m}) = 0.75 \text{ N} \quad (6)$$

$$F_x(S) := a(S) \cdot g_c \quad F_x(1.5 \text{ m}) = 0.3082 \text{ N} \quad (7)$$

$$F(S) := \sqrt{F_x(S)^2 + F_y(S)^2} \quad F(1.5 \text{ m}) = 0.8109 \text{ N} \quad (8)$$

Рис. 4.2. Поиск размеров идеальной цепи: формирование целевой функции

В пункте 2 расчёта вводится цепная функция, взятая из Википедии (см. подпись под рис. 4.1). Каноническое уравнение цепной линии имеет вид $y = a \operatorname{ch}(x/a)$. Оно у нас несколько изменено так, чтобы вершина² цепной линии была не в привычной (канонической) точке $x=0$, $y=a$, а в точке $x=L/2$, $y=0$ – см. рис. 4.1.

Замечание. После записи всех пользовательских функций расчёта ведётся их вызов для тестирования: вместо аргументов подставляются численные значения и проверяется, что возвращает функция. В готовом расчёте эти проверочные операторы можно будет убрать.

² Вершина в смысле математики, а не внешнего вида кривой (см. рис. 4.1 и 4.8). Если параметр a сделать отрицательным, то мы получим «цепную» арку, где вершина будет там, где ей и положено быть – в точке максимума, а не минимума. В американском городе Сент-Луисе построено очень интересное инженерное сооружение – арка высотой 192 метра, имеющая форму перевернутой цепи (https://ru.wikipedia.org/wiki/Ворота_Запада).

Занятие 4

Длину цепи как и всякой другой кривой вида $y = f(x)$ можно вычислить через определенный интеграл (пункт 3 на рис. 4.2), в котором присутствует теорема Пифагора (гипотенуза равна квадратному корню из суммы квадратов катетов), или через более простую формулу, полученную именно для цепной линии (пункт 4). Эту формулу несложно найти на вышеупомянутом сайте с информацией о цепной линии, а затем модифицировать для нашего расчёта с учетом того, что работа ведется не с канонической, а несколько измененной функцией.

Пункт 5 является ключевым в расчёте. В нем задается функция пользователя $a(S)$ с опорой на встроенную в SMath функцию `solve`, предназначенную для численного решения уравнений. У нас таким уравнением будет уравнение вида $S(a) = S$. Оно решается численно по переменной a методом половинного деления на отрезке от 10 см до двух метров. При этом функция `solve` возвращает не численный ответ (корень уравнения), а новую функцию с именем a и с аргументом S . То есть переменная a у нас превратилась из аргумента в имя функции, а переменная S из имени функции в аргумент. Вот такая произошла программистская метаморфоза!

Сила F , с которой цепь тянет вниз и вбок вершину столбика, раскладывается на вертикальную проекцию силы F_y (тянем вниз) и горизонтальную проекцию силы F_x (тянем вбок). На рисунке 4.1 эта сила направлена в противоположную сторону. Вертикальная проекция силы зависит от длины цепи линейно – см. пункт 6 на рис. 4.2: вес цепи ($g_c S$) при равных высотах двух столбиков равномерно (делим на два) распределяется по двум точкам крепления. Горизонтальную проекцию силы задать тоже несложно, если подумать о физическом смысле параметра a в формуле цепной линии (см. пункт 2 на рис. 4.2). Этот физический смысл является ключевым при выводе формулы цепной линии через решение дифференциального уравнения баланса сил, действующих на элементарный участок цепи [3]. Но почти во всех справочниках по математике и физике – бумажных и электронных (в той же Википедии, например) об этом важном моменте умалчивают. Исправим это и отметим, что параметр a в формуле цепной линии – это отношение горизонтальной проекции силы F_x , растягивающей цепь (она постоянна по длине цепи), к удельному весу цепи, значение которого мы задали вторым оператором в пункте 1 на рис. 4.2. Поэтому-то при тестовом вызове функции $a(S)$ в пункте 5 мы в качестве единиц измерения записали не просто метр, а ньютон, деленный на ньютон, умноженный на метр в минус первой степени. Все это, конечно можно упростить до

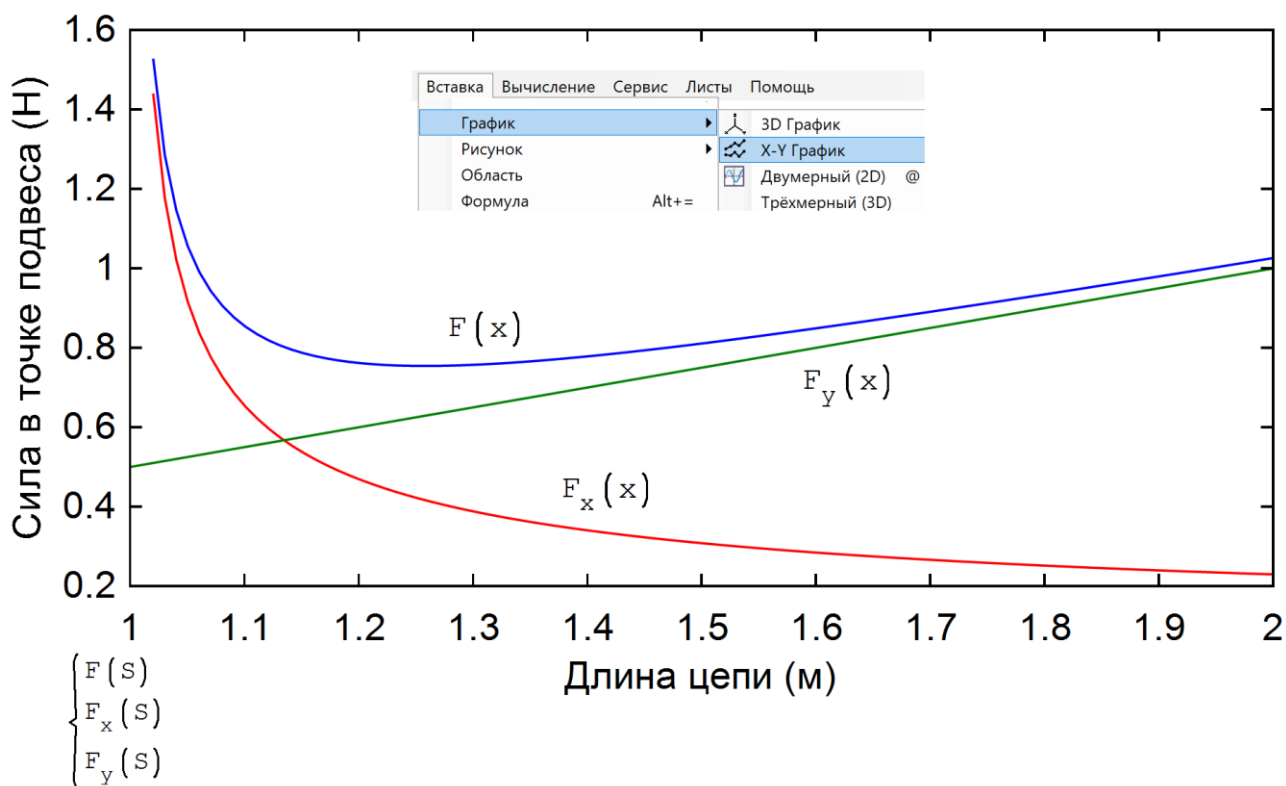
Занятие 4

метров, но лучше этого не делать, чтобы не терять «физику» задачи. Из соотношения $a = F_x / g_c$ определяется горизонтальная проекция силы – см. пункт 7 на рис. 4.2. Вертикальная же проекция силы F_y – величина переменная. Она равна нулю в вершине цепной линии (в точке максимального провисания цепи) и принимает максимальное значение в точке крепления цепи к столбику.

Если же не знать о физическом смысле параметра a , отмеченном выше, то можно горизонтальную проекцию силы определить через её вертикальную проекцию и через производную функции цепной линии, в которой присутствует уже гиперболический синус sh , а не гиперболический косинус ch .

Последнее, что можно видеть на рис. 4.2, – это создание искомой (целевой) функции $F(S)$ (пункт 8).

Все три функции отображены графически на рис. 4.3: горизонтальная составляющая силы F_x падает с увеличением длины цепи x , вертикальная составляющая F_y растёт линейно, а сама сила F сначала уменьшается, а потом возрастает – имеет точку минимума. Давайте рассчитаем её! Как это сделать?



Занятие 4

Рис. 4.3. Графики изменения силы крепления цепи к столбикам и её горизонтальной и вертикальной проекций

4.2. Золотые прямоугольники

Когда-то давно автор попросил своих студентов открыть на компьютере графический редактор Paint и протяжкой мыши установить поле рисования в виде прямоугольника с такой пропорцией высоты и ширины, какая студенту кажется наиболее красивой, наиболее соразмерной. Вот что получилось (см. рис. 4.4), когда студенческие прямоугольники были собраны на одном графике. В матрице *Data* хранятся размеры студенческих прямоугольников в пикселах. Эти цифры затем переносятся в векторы *X* и *Y*.

$$Data := \begin{bmatrix} 1430 & 868 & 955 & 799 & 950 & 878 & 928 & 1056 & 1053 & 1017 & 1080 & 950 & 1120 & 615 & 722 \\ 851 & 388 & 604 & 471 & 505 & 626 & 619 & 632 & 501 & 675 & 716 & 479 & 682 & 412 & 582 \end{bmatrix}$$

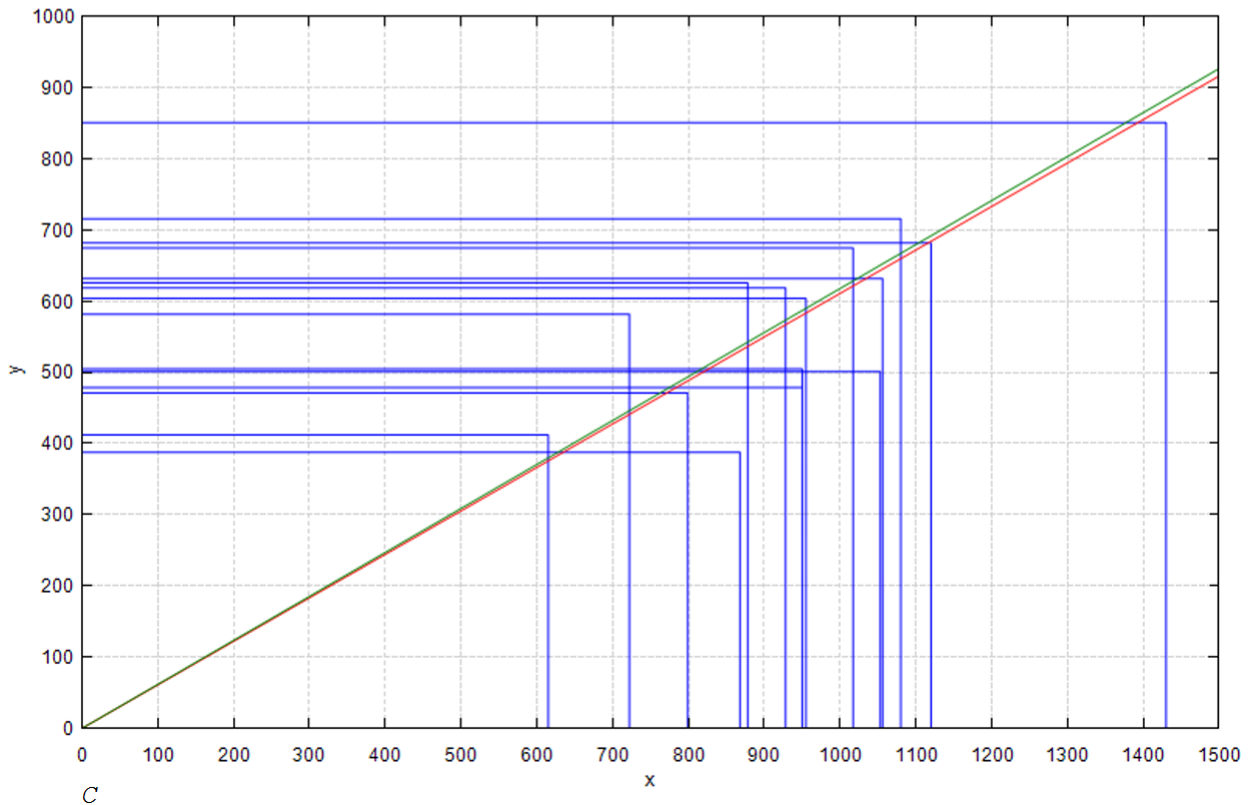
$$n := \text{cols}(Data) = 14 \quad X := \text{row}(Data, 1)^T \quad Y := \text{row}(Data, 2)^T$$

$$k := \frac{\sum_{i=1}^n \frac{Y_i}{X_i}}{n} = 0.611$$

$$i := [1..n]$$

$$Pr_i := \begin{bmatrix} 0 & Y_i \\ X_i & Y_i \\ X_i & 0 \end{bmatrix}$$

$$C := \begin{cases} Pr \\ k \cdot x \\ 0.618 \cdot x \end{cases}$$



Занятие 4

Рис. 4.4. Студенческие «золотые» прямоугольники

После несложной статистической обработки – определения среднего арифметического отношений высоты прямоугольников к их ширине, оказалось, что эта величина равна 0.611. На рис. 4.4 проведена зеленая прямая линия с соответствующим тангенсом угла наклона. А это ни что иное, как примерное *золотое отношение*, *золотая пропорция*, когда ширина прямоугольника относится к его высоте, как сумма ширины и высоты относится к ширине (красная прямая линия). Вот какой совершенный художественный вкус имеют студенты МЭИ! Они рисовали разные прямоугольники, но их средний прямоугольник оказался *золотым*! В золотом соотношении запрятано число, округленное значение которого равно 0.618.

Классическая более сложная статистическая обработка (регрессионный анализ) – *это метод наименьших квадратов*. На рисунке 4.5 показано, как к студенческим прямоугольникам – к векторам X и Y (см. рис. 4.4) применена линейная регрессия. В среде математической программы SMath эту работу выполняют встроенные функции Intercept (пересечение) и Slope (наклон). В стандартной конфигурации SMath этих функций нет, но их несложно подгрузить с дополнением (плагином) Statistical Tools.

Занятие 4

$$Data := \begin{bmatrix} 1430 & 868 & 955 & 799 & 950 & 878 & 928 & 1056 & 1053 & 1017 & 1080 & 950 & 1120 & 615 & 722 \\ 851 & 388 & 604 & 471 & 505 & 626 & 619 & 632 & 501 & 675 & 716 & 479 & 682 & 412 & 582 \end{bmatrix}$$

$$n := \text{cols}(Data) = 15 \quad X := \text{row}(Data, 1)^T \quad Y := \text{row}(Data, 2)^T$$

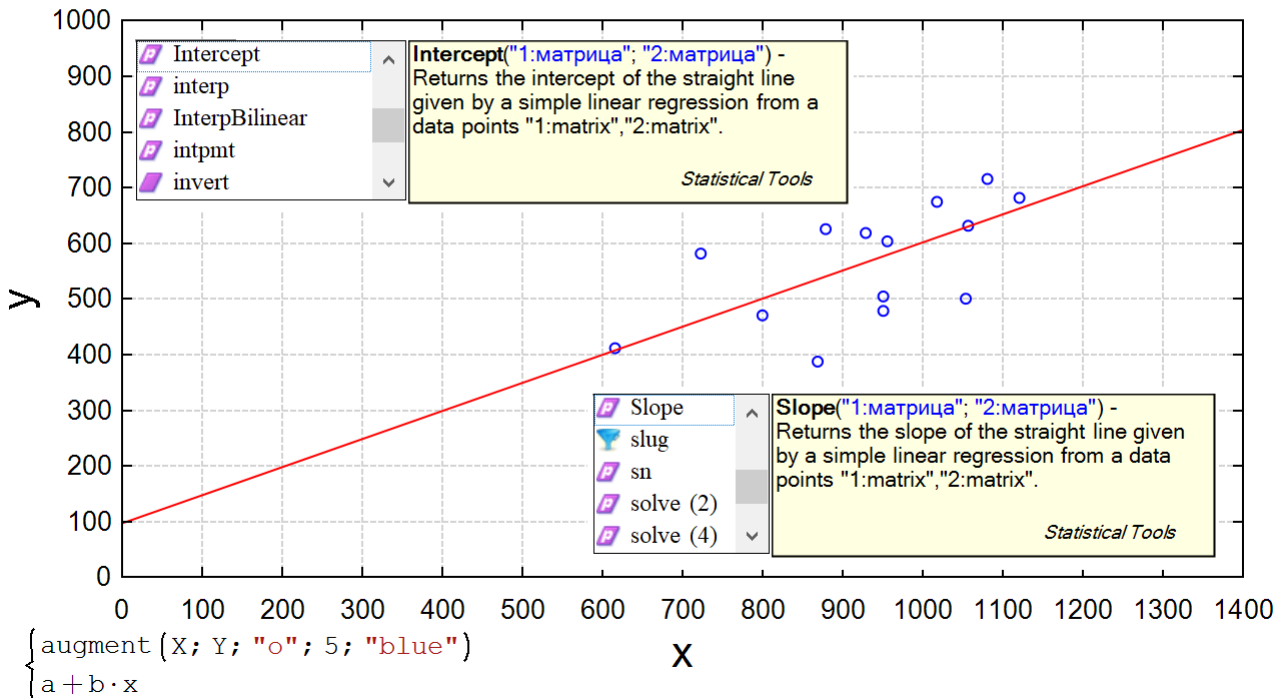
$$a := \text{Intercept}(X, Y) = 97.704 \quad b := \text{Slope}(X, Y) = 0.5046$$


Рис. 4.5. Метод наименьших квадратов

Результат статистической оценки художественного вкуса студентов вполне предсказуем. Многие из них видели в музеях картины в рамках, отношения сторон которых близки к золотой пропорции (см. рис. 4.7). Золотое сечение повсеместно окружает человека – в архитектуре, например. Многие находят его и в музыке. Да что далеко ходить – пропорции обычных экранов компьютеров близки к золотым. Экран ноутбука, на котором писался этот текст, имел размеры 207 на 332 мм. Отношение этих чисел 0.6235 близко к золотому (0.618). Все это не могло не повлиять на процесс рисование студентами прямоугольников. Было бы интересно провести описанный эксперимент с прямоугольниками на людях, никогда не видевшими никаких живописных полотен, – с дикарями Амазонии, например, если таковые ещё остались. Такой опыт в чем-то будет подобен другому схожему «языковедческому» опыту – ребенку с самого рождения не давали слушать человеческую речь, ожидая, на каком языке он в конце концов заговорит. Опыт, конечно, наивный и бесчеловечный, но имевший место. Так пытались узнать, какой язык является главным, базовым языком человеческого общения.

Занятие 4

Золотая пропорция широко используется не только в искусстве, но и в прикладной математике. Есть численные методы решения задач, где также присутствует золотое сечение. Такое сечение заложено в один из методов численного поиска минимума функции одного аргумента. А это как раз то, что нам надо!

На рис. 4.6 показана схема поиска такого минимума методом золотого сечения.

Интервал, где находится минимум (от единицы до двойки), делят с двух сторон в золотой пропорции. Эту работу выполняет вспомогательная пользовательская функция с именем *GR* (Golden Ratio – золотое отношение) с двумя аргументами. Затем проверяется, при каком золотом сечении (у нас это 1.382 слева и 1.618 справа) анализируемая функция имеет меньшее значение. Если при левом сечении (1.382), то интервал поиска минимума уменьшается со смещением влево, если при правом (1.618), то со смещением вправо. В новом уменьшенном интервале от 1 до 1.618 рассчитывается слева новое золотое сечение (1.2361) и, что очень важно, используется второе старое, уже рассчитанное сечение (1.382). Такие действия повторяют до тех пор, пока значения концов интервала станут примерно равны. Золотая пропорция позволяет в цикле вычислять значение анализируемой функции только один, а не два раза. Это сокращает время счета и делает программу «красивой». А хорошая программа, как и хорошее инженерное сооружение, должна быть красивой!

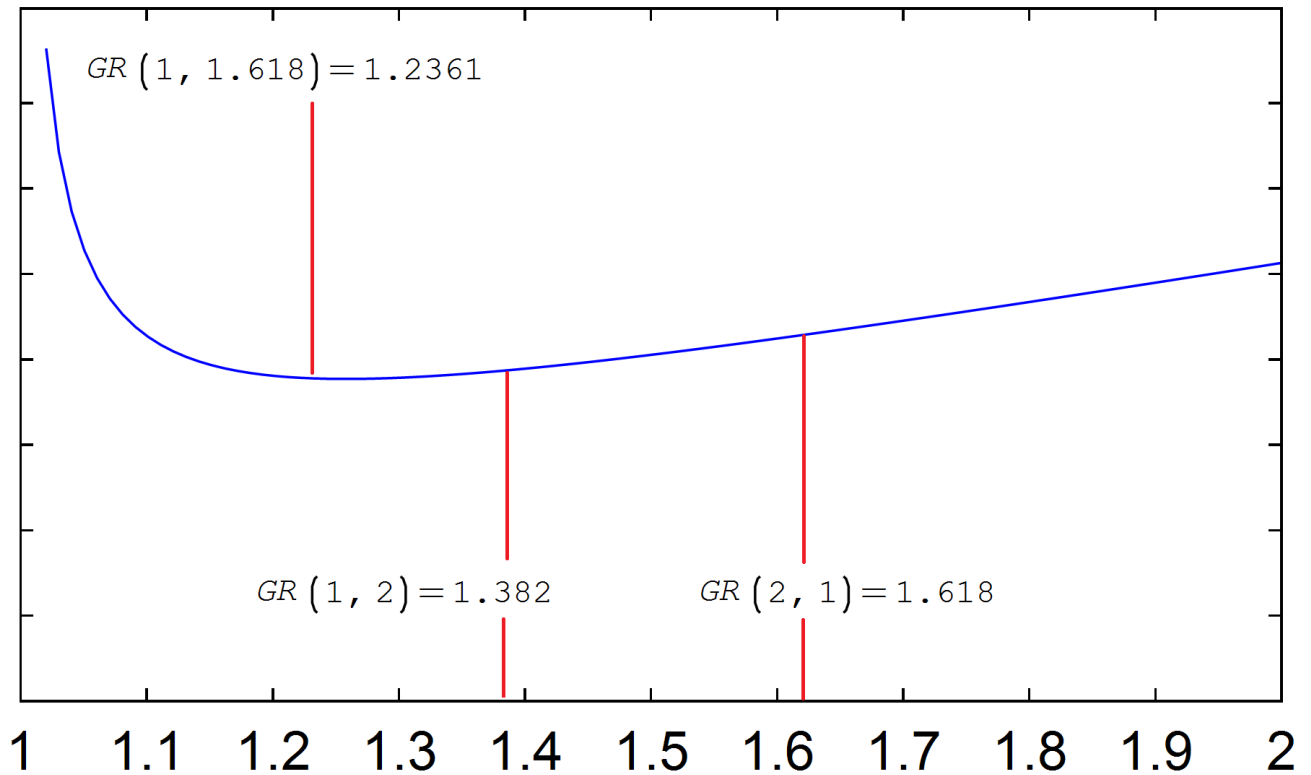


Рис. 4.6. Схема поиска минимума методом золотого сечения

На рис. 4.7 показана программа, написанная на языке, встроенном в SMath, реализующая описанный метод золотого сечения. Эта программа заслуживает того, чтобы её поместили в пышную золотую багетную раму, стороны которой находятся примерно в золотом соотношении. Там же – в золотой раме показан вызов функции *MinGR* для решения нашей задачи поиска минимума функции $F(S)$. Чтобы цепь «нежно и красиво» легла на поддерживающие её столбики, необходимо сделать её длиннее *примерно* на четверть расстояния между столбиками. При этом угол наклона цепи в точке её крепления составит *примерно* один радиан. Примерно, а не абсолютно точно: красота не любит абсолютной точности.

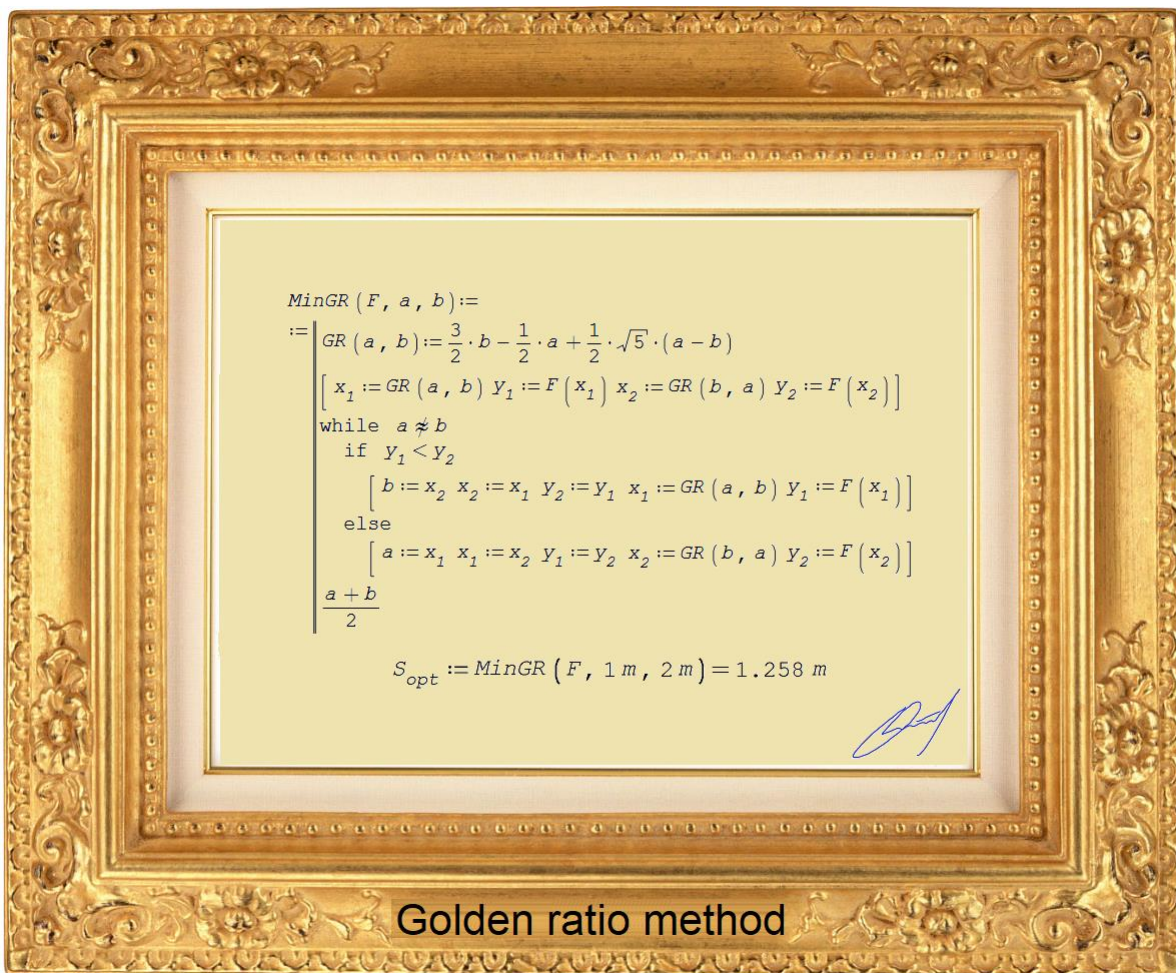


Рис. 4.7. Живописное полотно «Программа поиска минимума методом золотого сечения»

Три замечания по программе на рис. 4.7.

1. Для того, чтобы программа была более компактной и умещалась целиком на экране дисплея (а он, как мы уже отметили, примерно отвечает золотому отношению), несколько операторов были записаны на одной строке, которая представляет собой матрицу с одной строкой и несколькими столбцами. Такая матрица (горизонтальный вектор) на рис. 4.7 заключена в квадратные скобки.
2. В программе используется оператор «не примерно равно». Этот булевый оператор наряду с другим булевым оператором «примерно равно» имеется в арсенале SMath – см. рис. 2.2, занятие 2.
3. Для компактности программы первый оператор присваивания «:=» продублирован. Это делается нажатием аккорда клавиш «Ctrl+Enter».

Занятие 4

На рис. 4.8 отображена на графике наша рассчитанная цепь, подвешенная на двух и четырех столбиках, высота которых (H) соотносится к расстоянию между столбиками (L) согласно *серебряной*, а не золотой пропорции. О серебряной пропорции знают меньше, чем о золотой. Но для нашего случая она, как кажется автору, более подходит. Формула серебряного сечения показана на рис. 4.8. Если из этой формулы убрать двойку, то получится формула золотого сечения. Многие «эстеты» вполне обосновано полагают, что серебряное сечение и изящнее, и, если так можно выразиться, «математичнее» золотого потому, что в него запрятан квадратный корень из двух, а не квадратный корень из пяти, как в золотом сечении (см. функцию GR на рис. 4.7). Квадратный корень из двух поражал своим математическим изяществом ещё древних греков, доказавших, что это число иррациональное. А красота всегда иррациональна. Пропорции экранов смартфонов и широкоформатных дисплеев близки к серебряному сечению. На занятии 10 мы упомянем и о сверхзолотой пропорции.

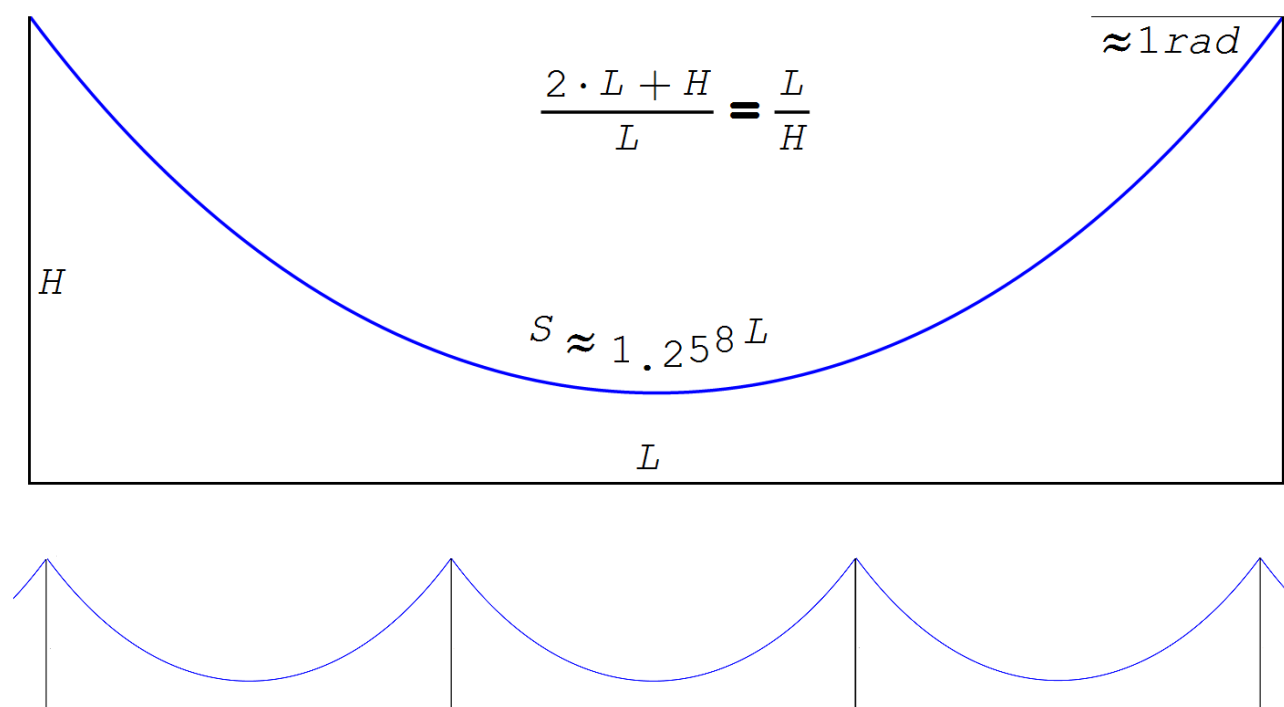


Рис. 4.8. Идеальная «серебряная» цепь на двух и четырех столбиках

Можно попросить студентов нарисовать цепь, висящую на столбиках, с позиций студенческого понимания красоты этой нехитрой инженерной конструкции, обработать рисунки и сделать вывод о том, насколько они близки к форме, показанной на рис. 4.8.

Занятие 4

Число, приближенное значение которого равно 1.258 (отношение длины оптимальной цепи к расстоянию, между точками её крепления на одном уровне), можно считать некой новой математической константой и дать ей имя π_c (цепное – a catenary, a chain – число π). Можно начать вычислительную гонку — находить все большее и большее количество знаков в этой константе наподобие того, как это делается в отношении обычного «кругового» числа π (отношение длины окружности к её диаметру), приблизительное значение которого 3.14 известно почти всем.

4.3. Совершенная цепь

Автор этой книги рассчитал цепное число π_c , (примерно 1.258) в 2015, когда готовил к публикации книгу [4] с главой о цепной линии. Возникла надежда на открытие новой математической константы. Был сделан поиск в интернете по ключу «1.258 catenary», который вывел автора на публикацию [5], сделанной в том же 2015 году. Так что автор книги немного опоздал с приоритетом на эту константу. С другой стороны, вполне допустимо считать, что эта константа открыта почти одновременно и независимо друг от друга американцем китайского происхождения Вангом и... автором этой книги.

Кстати, сама формула цепной линии открыта также одновременно и независимо друг от друга не двумя, а тремя математиками – голландцем Гюйгенсом, швейцарцем Иоганном Бернулли³ и немцем Лейбницем. До них считалось, что цепь провисает по параболе. Так полагал даже великий Галилей. Правда, в конце своей жизни он признал, что был не прав, но не успел вывести формулу этой замечательной кривой.

В пункте 2 задания читателям предлагается провести оптимизационный расчёт цепи, закрепленной на разных высотах. Поиск оптимальной длины цепи будет предваряться такой задачей.

Задача. Цепь провисает на двух столбах высотой h_1 и h_2 . Расстояние между столбами также задано и храниться в переменной L . Найти геометрические (в частности, зазор между цепью и полом) и силовые параметры цепи (силы её натяжения в точках крепления), если известна длина цепи S .

³ К фамилии этого швейцарского ученого добавлено имя потому, что к династии Бернулли принадлежат девять крупных математиков и физиков (из них три великих). Приходится уточнять, какой именно Бернулли открыл формулу цепной линии.

Занятие 4

На рис. 4.9 показано одно из возможных решений данной задачи в среде SMath.

Ввод исходных данных – численных значений переменных h_1 , h_2 и L предваряется вводом псевдоединицы длины $m := 1$. На это приходится идти из-за того, что некоторые инструменты пакета SMath не могут работать с размерными величинами. Далее на второй строке расчёта вводится неканоническая формула цепной линии с дополнительными параметрами x_0 и h – с координатами точки минимума (вершина цепной линии – см. выше).

$$\begin{aligned}
 m &:= 1 & h_1 &:= 10 \cdot m & h_2 &:= 15 \cdot m & L &:= 10 \cdot m & S &:= 20 \cdot m \\
 Y(x, a, x_0, h) &:= a \cdot \operatorname{ch}\left(\frac{x - x_0}{a}\right) - a + h \\
 a &:= 3 \cdot m & x_0 &:= 4 \cdot m & h &:= 1 \cdot m & \text{Первое приближение к решению.} \\
 Y(0 \cdot m, a, x_0, h) &= 4.0859 m & Y(L, a, x_0, h) &= 9.2866 m \\
 h_1 &= 10 m & h_2 &= 15 m & \text{Нужно, чтобы было} \\
 \int_{0 \cdot m}^L \sqrt{1 + \left(\frac{d}{dx} Y(x, a, x_0, h)\right)^2} dx &= 16.1757 m & \text{Длина цепи через интеграл} \\
 \sqrt{(Y(0 \cdot m, a, x_0, h) - h + a)^2 - a^2} + \sqrt{(Y(L, a, x_0, h) - h + a)^2 - a^2} &= 16.1757 m & \text{Длина цепи по формуле} \\
 S &= 20 m & \text{Нужно, чтобы было} \\
 \left[\begin{array}{c} a \\ x_0 \\ h \end{array} \right] &:= \operatorname{roots} \left(\left[\begin{array}{c} Y(0 \cdot m, a, x_0, h) = h_1 \\ Y(L, a, x_0, h) = h_2 \\ \sqrt{(Y(0 \cdot m, a, x_0, h) - h + a)^2 - a^2} + \sqrt{(Y(L, a, x_0, h) - h + a)^2 - a^2} = S \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} a \\ x_0 \\ h \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} a \\ x_0 \\ h \end{array} \right] \right) = \left[\begin{array}{c} 2.3586 \\ 4.3976 \\ 4.5662 \end{array} \right] m
 \end{aligned}$$

Рис. 4.9. Расчёт параметров цепи, подвешенной концами на разных уровнях

Решение задачи сводится к нахождению корня системы трех нелинейных алгебраических уравнений с тремя неизвестными a , x_0 и h . Этой цели служит встроенная в SMath функция `roots` с двумя или с тремя аргументами. Первый аргумент – это вектор с уравнениями, которые нужно решить, второй аргумент – вектор, с указанием неизвестных системы, а третий необязательный аргумент хранит вектор начальных приближений к решению.

Начальные приближения нужны, когда функция `roots` не выдает решения, или тогда, когда решений несколько и нужно получить одно из них. После ввода первого приближения, проверяется, какие значения выдают левые части уравнений. Они должны быть как можно ближе к значениям правых частей.

Занятие 4

После вызова функции `roots` и получения решения, оно проверяется – см. рис. 4.10. Для этого достаточно скопировать четыре оператора из решения на рис. 4.9 и вставить их после оператора с функцией `roots`.

Проверка решения

$$y(0 \cdot m, a, x_0, h) = 10 \text{ m} \quad y(L, a, x_0, h) = 15 \text{ m}$$
$$\int_{0 \cdot m}^L \sqrt{1 + \left(\frac{d}{d x} y(x, a, x_0, h) \right)^2} dx = 20 \text{ m}$$
$$\sqrt{(y(0 \cdot m, a, x_0, h) - h + a)^2 - a^2} + \sqrt{(y(L, a, x_0, h) - h + a)^2 - a^2} = 20 \text{ m}$$

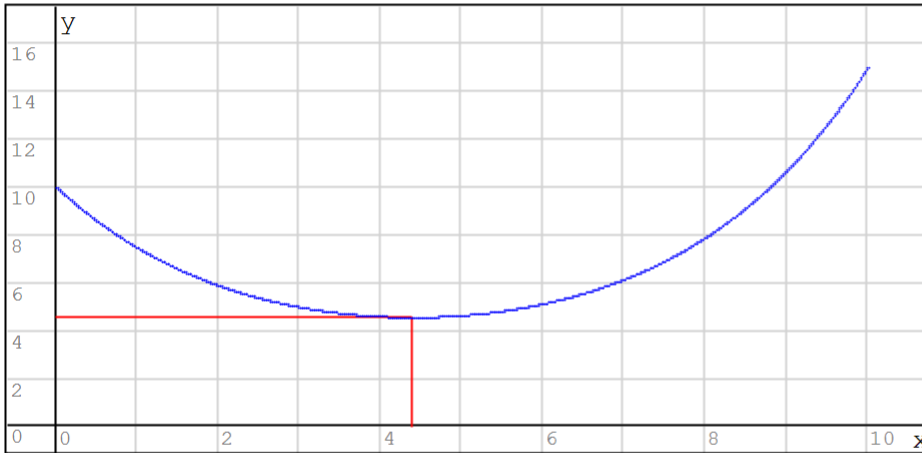
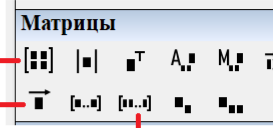
Рис. 4.10. Проверка правильности решения трех уравнений с тремя неизвестными

На рисунке 4.11 отображено графически решение задачи о провисании цепи. Используется график, который имеется в ядре пакета `SMath`. На рисунках выше были показаны графики, входящие в расширение `SMath`.

Занятие 4

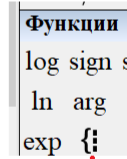
$$X := \left[(0 \cdot m), \frac{L}{1000} \dots L \right] \quad \text{Catenary} := \text{augment} \left(X, y \left(X, a, x_0, h \right), ".", 3, \text{"Blue"} \right)$$

$$\text{МИНИМУМ} := \begin{bmatrix} 0 & h \\ x_0 & h \\ x_0 & 0 \end{bmatrix}$$



$h = 4.5662 \text{ m}$

$x_0 = 4.3976 \text{ m}$



{ Catenary
МИНИМУМ

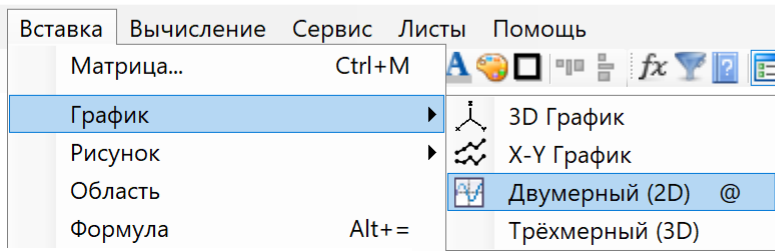


Рис. 4.11. Графическое отображение решения задачи о провисании цепи

4.3. Подвесная канатная дорога

Сравнительно недавно в Москве появился новый вид транспорта – канатная дорога. Первая из них соединила Лужники и Воробьевы Горы, вторая катает посетителей ВДНХ (рис. 4.12).

Пока это скорее аттракцион для «москвичей и гостей столицы», чем полноценный транспорт. Но со временем после сооружения таких новых надземных линий все это станет настоящим общественным транспортом, перекинутым через водные преграды и крупные дорожные магистрали – туда, куда сложно проложить маршруты обычного наземного и подземного транспорта – автобусов, трамваев или метро. Ещё один экзотический общественный транспорт – вертолет упомянут в седьмой главе данной книги.



Рис. 4.12. Канатная дорога на ВДНХ (фото автора)

Строительству любого инженерного сооружения предшествует этап проектирования и расчёта. А давайте для начала поставим две опоры, повесим на них канат (гибкую однородную нерастяжимую тяжёлую нить), прикрепим к канату груз (кабинку канатной дороги – см. рис. 4.12) и рассчитаем, как все это провиснет, и какие силы будут действовать на канат по его длине. Задача будет не менее интересна и красива, чем сама дорога, канаты которой сплетены из отдельных проволок. Наша задача будет «сплетена» из физики, теоретической механики и, конечно, математики, без которой немислима никакая другая точная наука. Ну и, само собой разумеется, не обойтись здесь без современных информационных технологий, которые сейчас пронизывают не только процесс обучения, но и всю нашу жизнь. Такая современная технология обучения, напоминаем, носит название STEM: Science, Technology, Engineering, Mathematics. Или МИТ по-русски.

На рис. 4.14 показан ввод в расчёт исходных данных и двух функций пользователя с именами y и y' . Исходными данными будут такие величины:

- длина каната, провисавшего между точками крепления S
- координаты точек крепления цепи: левой $(x_L - y_L)$ и правой $(x_R - y_R)$
- масса груза (кабинки канатной дороги) M
- удельная (линейная) масса каната m_c

Занятие 4

- расстояние по горизонтали от левой опоры до точки подвеса груза x_M

Последнюю величину можно менять от значения x_L до значения x_R , создавая тем самым кадры анимации движения кабинки канатной дороги от левой опоры к правой.

$$S := 12 \text{ m} \quad x_L := 0 \text{ m} \quad y_L := 2 \text{ m} \quad x_R := 10 \text{ m} \quad y_R := 5 \text{ m} \quad (1)$$

$$Y(x, a, x_0, h) := a \cdot \operatorname{ch}\left(\frac{x - x_0}{a}\right) - a + h \quad Y'(x, a, x_0) := \frac{d}{dx} Y(x, a, x_0, h) = \operatorname{sh}\left(\frac{x - x_0}{a}\right) \quad (2)$$

$$Y(x_L, a, x_0, h) = y_L \quad Y(x_R, a, x_0, h) = y_R \quad S = \int_{x_L}^{x_R} \sqrt{1 + (Y'(x, a, x_0))^2} dx \quad (3)$$

$$\begin{bmatrix} a \\ x_0 \\ h \end{bmatrix} := \operatorname{roots} \left(\begin{bmatrix} Y(x_L, a, x_0, h) = y_L \\ Y(x_R, a, x_0, h) = y_R \\ S = \frac{a \cdot m}{2} \cdot \left(e^{\frac{x_R - x_0}{a}} + e^{\frac{x_0 - x_L}{a}} - e^{\frac{x_0 - x_R}{a}} - e^{\frac{x_L - x_0}{a}} \right) \right) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a \\ x_0 \\ h \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ m} \quad (4)$$

$$\int_{x_L}^{x_R} \sqrt{1 + (Y'(x, a, x_0))^2} dx = 12 \text{ m} \quad Y(x_L, a, x_0, h) = 2 \text{ m} \quad Y(x_R, a, x_0, h) = 5 \text{ m} \quad (5)$$

$$x := \begin{bmatrix} x_L, x_L + \frac{x_R - x_L}{300} \dots x_R \end{bmatrix} \quad \text{Plot} := \begin{bmatrix} \operatorname{augment}\left(x, \overrightarrow{Y(x, a, x_0, h)}\right) \\ \left[x_0, h \text{ " " 5 "red"} \right] \end{bmatrix} \quad (6)$$

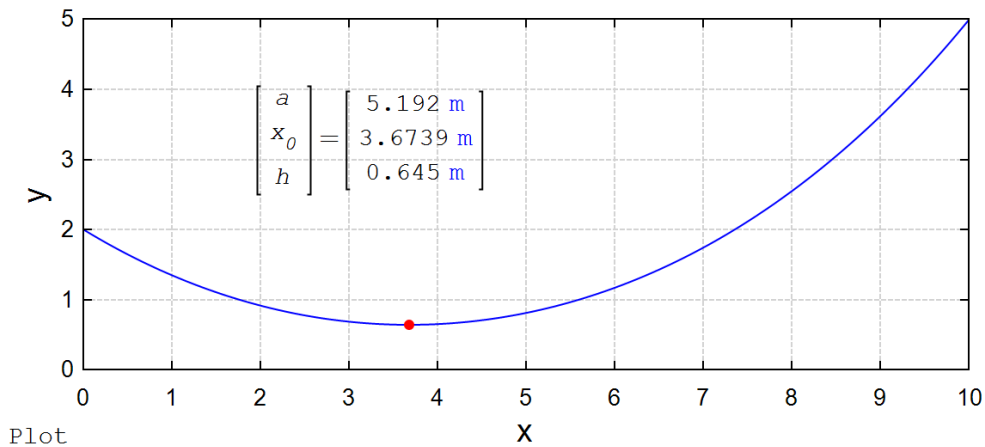


Рис. 4.13. Расчет цепной линии

Выражение для цепной линии [3] на рис. 4.13 дано опять же (см. рис. 4.2) не в привычном кратком каноническом виде $y = a \operatorname{ch}(x/a)$ с вершиной (у нас с минимумом) в точке $x = 0, y = a$, а в расширенном (неканоническом) виде с вершиной в точке $x = x_0, y = h$. Задав или рассчитав значения параметров a, x_0 и h , можно нарисовать цепную линию не только с любой кривизной, которую задает

Занятие 4

параметр a , но и в любом месте декартового графика. Что мы и сделаем ниже. Если к цепи – к гибкой однородной нерастяжимой тяжелой нити (далее мы будем называть это просто цепью) подвесить груз, то цепь разобьется на два отдельных участка, в формулах которых параметр a будет одинаковым по значению, в то время как значения параметров x_0 и h будут разными. Это можно доказать, если вспомнить о физическом смысле параметр a , который связан с выводом формулы цепной линии через решение дифференциального уравнения баланса сил на концах элементарного участка (звена) цепи. Параметр a – это, повторяем, отношение горизонтальной проекции силы, растягивающей цепь в любом её месте, к удельному весу цепи. Единица измерения параметра a – это ньютон (сила), деленный на ньютон, который в свою очередь поделен на метр (удельный вес цепи). После упрощения получается просто метр, который и будет фигурировать в наших расчётах. Если один человек из ста знает, что цепь провисает не по параболе, а по цепной линии (см. выше), то, опять же образно говоря, один человек из этих ста, знающих про цепную линию, знают и о физическом смысле параметра a и поймут, почему два отрезка цепи с подвешенным грузом будут иметь разные значения параметров x_0 и h , но одинаковые значения параметра a . Горизонтальная проекция силы, растягивающей цепь, одинакова и в точке минимума (там вертикальная проекция этой силы равна нулю), и в точке подвеса цепи (там вертикальная проекция этой силы принимает максимальное значение).

Производная цепной линии введена формулой (2) на рис. 4.13 с гиперболическим синусом. Кстати, есть простое аналитическое выражение и для длины цепной линии без гиперболических функций, а только с квадратным корнем, но мы ниже будем работать с интегралом, численное «взятие» которого вполне законно. Кроме того, интеграл сам по себе очень красив и загадочен. Вот что о нем пишут классики.

«– Самолюбия, – сказал Левин, задетый за живое словами брата, я не понимаю. Когда бы в университете мне сказали, что другие понимают интегральное вычисление, а я не понимаю, – тут самолюбие» (Лев Толстой, роман «Анна Каренина»).

«Через 120 дней заканчивается постройка ИНТЕГРАЛА. Близок великий, исторический час, когда первый ИНТЕГРАЛ взойдет в мировое пространство. Тысячу лет тому назад ваши героические предки покорили власти Единого Государства весь земной шар. Вам предстоит ещё более славный подвиг: стеклянным, электрическим, огнедышащим ИНТЕГРАЛОМ проинтегрировать бесконечное уравнение Вселенной...» (Михаил Замятин, роман-антиутопия «МЫ»)

«Идите все, идите на Урал! / Мы очищаем место бою / Стальных машин, где дышит интеграл, / С монгольской дикою ордою!» (Александр Блок, поэма «Скифы»)

В докомпьютерную эту взятие даже простейшего интеграла выливалось в большую вычислительную проблему, требовало времени, ума и таланта человека. Это и отразилось в вышеприведенных цитатах.

Занятие 4

Теперь же на компьютере это делается довольно легко и просто. Поэтому-то на рис. 4.13 формула длины цепи дана и в первоизданной чистоте – с определенными интегралами, найденными в интернете по ключевому слову «длина кривой» (5), и с выражением, полученным после аналитического взятия интеграла (4).

4.4. Канатная дорога

Решение нашей задачи о провисающей цепи с грузом сводится к решению системы пяти уравнений с пятью неизвестными – см. рис. 4.14. Без компьютера это опять же, как в случае с интегралом, вылилось бы в большую вычислительную проблему. Теперь достаточно вызвать встроенную в математический пакет некую функцию, чтобы она вернула значения неизвестных.

В среде SMath уравнения решаются с помощью функции `roots` (рис. 4.113 и рис.4.14). Первый аргумент-вектор этой функции хранит саму систему уравнений. Во втором аргументе-векторе записаны неизвестные. Необходимо также задать первое приближение к решению (третий аргумент-вектор).

$$\begin{bmatrix} a \\ x_{OL} \\ h_L \\ x_{OR} \\ h_R \end{bmatrix} := \text{roots} \left(\begin{array}{l} Y_L = Y(x_L; a; x_{OL}; h_L) \\ Y_R = Y(x_R; a; x_{OR}; h_R) \\ Y(x_M; a; x_{OL}; h_L) = Y(x_M; a; x_{OR}; h_R) \\ S = \int_{x_L}^{x_M} \sqrt{1 + Y'(x; a; x_{OL})^2} dx + \int_{x_M}^{x_R} \sqrt{1 + (Y'(x; a; x_{OR}))^2} dx \\ a \cdot m_c \cdot g_3 \cdot |Y'(x_L; a; x_{OL})| + a \cdot m_c \cdot g_3 \cdot |Y'(x_R; a; x_{OR})| = M \cdot g_3 + m_c \cdot g_3 \cdot S \end{array} \right); \begin{bmatrix} a \\ x_{OL} \\ h_L \\ x_{OR} \\ h_R \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} M$$

$$\begin{bmatrix} a \\ x_{OL} \\ h_L \\ x_{OR} \\ h_R \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} 6,3346578 \\ 3,9229196 \\ 0,745987 \\ 2,2564019 \\ -0,3524954 \end{bmatrix} M$$

Рис. 4.14. Решение системы уравнений

Система пяти уравнений с пятью неизвестными, которую численно решает функция `roots`, отображает такие моменты:

- цепь прикреплена к левой опоре
- цепь прикреплена к правой опоре
- участки цепи встречаются в точке крепления груза
- длина цепи остается заданной постоянной величиной S

Занятие 4

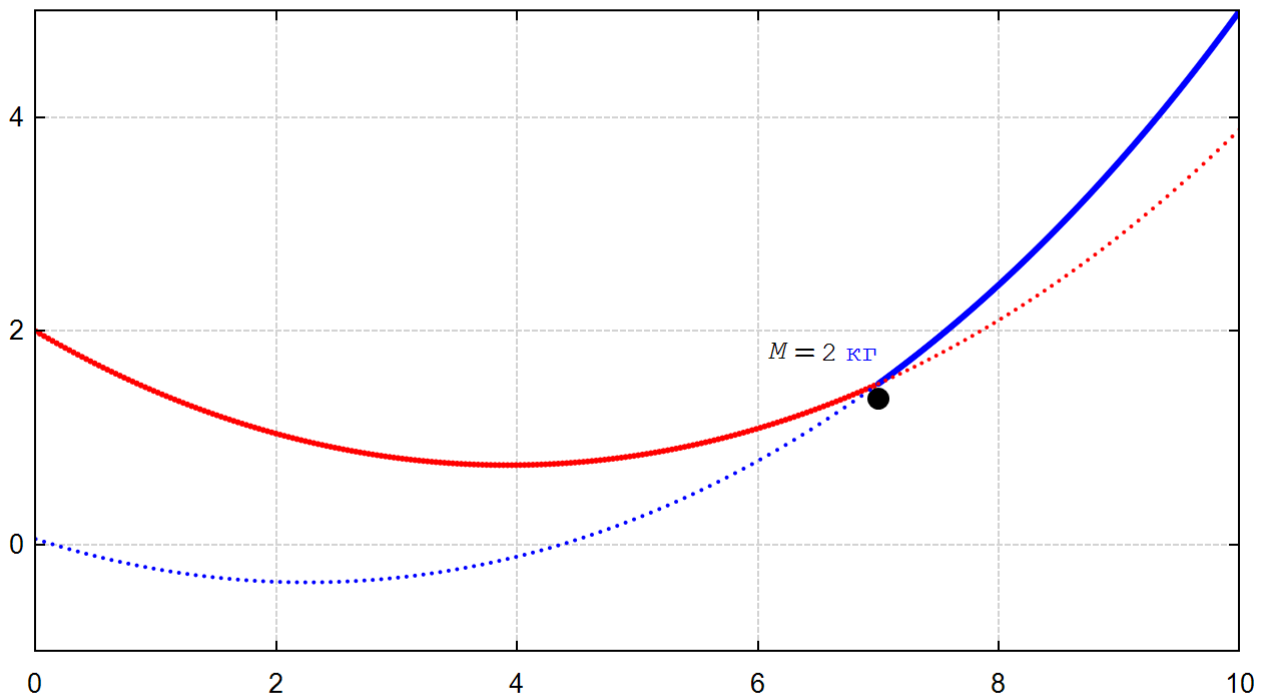
- сумма вертикальных проекций сил крепления цепи на опорах равна весу цепи с грузом

Некоторых пояснений требует только пятое уравнение. Как мы уже отметили, через параметр a цепной линии и удельный вес цепи можно рассчитать горизонтальную проекцию силы натяжения цепи, которая постоянна по всей длине цепи. Если эту силу умножить на значение первой производной цепной линии в конкретной точке, то мы получим значение вертикальной проекции силы натяжения цепи. Производная функции, напомним, численно равна тангенсу наклона касательной. А сила натяжения цепи также действует по касательной к цепи. Тангенс угла – это отношение длины противолежащего катета (вертикальная проекция силы) к длине прилежащего катета (горизонтальная проекция силы).

На рисунке 4.15 показано, как будет провисать наша цепь с грузом при найденных значениях неизвестных системы уравнений – параметров двух участков цепной линии. Пунктирами отмечены фантомные продолжения цепных линий.

Занятие 4

$$\begin{aligned}
 xx_L &:= \left[x_L, x_L + \frac{x_M - x_L}{200} \dots x_M \right] & y1 &:= \text{augment} \left(xx_L, \overrightarrow{Y(x_L, a, x_{0L}, h_L)}, \dots, 2, \text{"red"} \right) \\
 xx_R &:= \left[x_M, x_M + \frac{x_R - x_M}{500} \dots x_R \right] & y2 &:= \text{augment} \left(xx_R, \overrightarrow{Y(x_R, a, x_{0R}, h_R)}, \dots, 2, \text{"blue"} \right) \\
 xx_L &:= \left[x_L, x_L + \frac{x_M - x_L}{100} \dots x_M \right] & y3 &:= \text{augment} \left(xx_L, \overrightarrow{Y(x_L, a, x_{0R}, h_R)}, \dots, 1, \text{"blue"} \right) \\
 xx_R &:= \left[x_M, x_M + \frac{x_R - x_M}{50} \dots x_R \right] & y4 &:= \text{augment} \left(xx_R, \overrightarrow{Y(x_R, a, x_{0L}, h_L)}, \dots, 1, \text{"red"} \right)
 \end{aligned}$$



$$\begin{cases}
 y1 \\
 y2 \\
 \text{augment} \left(x_M, Y(x_M, a, x_{0L}, h_L) - 0.14, \dots, 10, \text{"black"} \right) \\
 y3 \\
 y4
 \end{cases}$$

Рис. 4.15. График провисания цепи с грузом

На рисунке 4.16 показано графическое отображение значения сил, действующих на цепь в разных её точках – горизонтальной F_H (красная линия) и вертикальной F_V (зеленая линия) проекций этой силы и полной силы F (синяя линия). Этот график обычно называют эпюрой сил, действующих на элементы конструкции – балки, консоли или нашей цепи с грузом. Эпюры, как правило, связывают с силами, которые работают на изгиб. Но таких сил у цепи нет. Есть только силы разрыва.

Занятие 4

Горизонтальная проекция силы постоянна по длине цепи. Значение вертикальной проекции определяется через знание значения производной цепной линии – тангенса наклона касательной. Полное значение силы рассчитывается с опорой на теорему Пифагора.

$$F_H := a \cdot m_c \cdot g_s = 62.1215 \quad F_V(x) := F_H \cdot \begin{cases} \text{if } x < x_M \\ Y'(x, a, x_{OL}) \\ \text{else} \\ Y'(x, a, x_{OR}) \end{cases} \quad F(x) := \sqrt{F_H^2 + F_V(x)^2}$$

$$X := [x_L, x_L + 0.001 \dots x_R] \quad XF := \text{augment}(X, \overrightarrow{F(X)}) \quad XF_V := \text{augment}(X, \overrightarrow{F_V(X)})$$

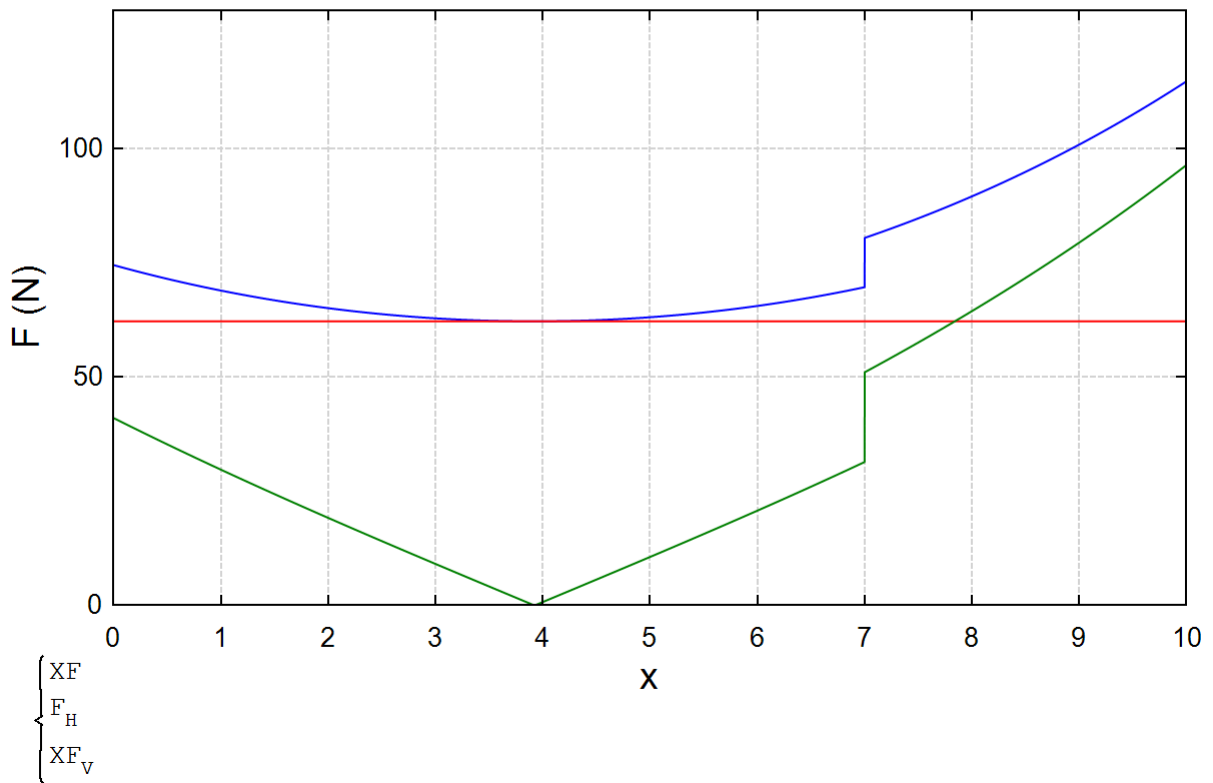


Рис. 4.16. Эпюра сил, действующих на цепь с грузом

Правильность расчёта можно оценить так – задать такие начальные условия, при которых ответ будет заранее известен. При отсутствии груза два участка цепи должны слиться в одну цепную линию. Если же масса груза будет намного превышать массу цепи, то её участки примут почти прямолинейную форму струны. Это будет уже не цепь с грузом, а так называемый веревочный многоугольник [6].

4.5. Кабина канатной дороги

А давайте теперь спроектируем оптимальную люльку канатной дороги для перевозки грузов.

Занятие 4

4.5.1. Прямоугольный параллелепипед

Есть такая "народная" задача оптимизации. Народная, в том смысле, что она широко "гуляет" по интернету, но её автор неизвестен. В этом несложно убедиться, если в каком-либо поисковике сделать запрос по ключу "Коробка максимального объема".

Суть задачи. Берется квадратный лист бумаги, в углах которого вырезаются четыре одинаковых квадрата меньшего размера – см. первый кадр анимации на рис. 4.17. Далее из такой крестообразной заготовки складывается коробка загибанием прямоугольных участков вверх – см. остальные три кадра анимации.

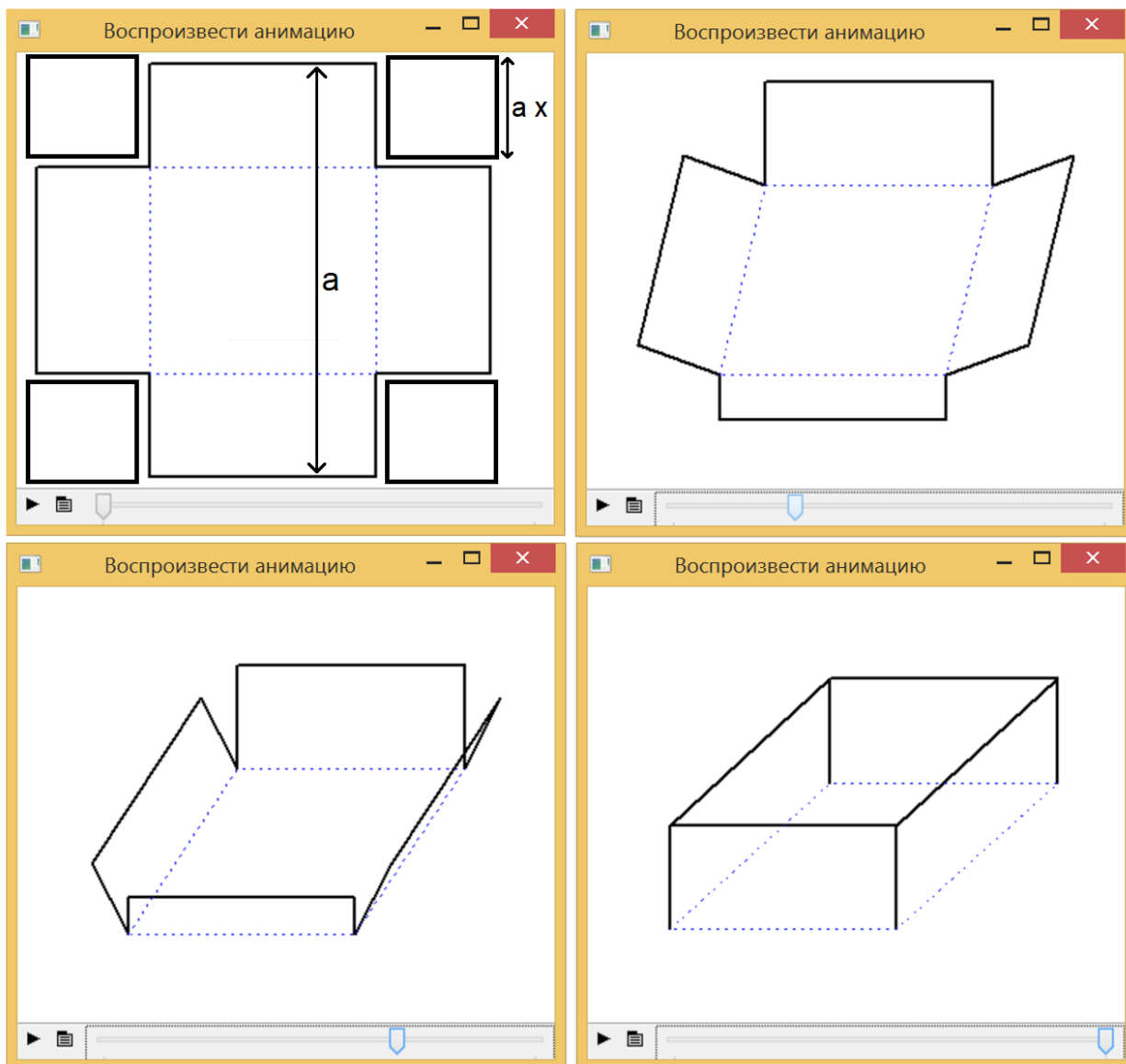


Рис. 4.17. Кадры анимации изготовления коробки из квадратной заготовки

Анимация, четыре кадра которой показаны на рис. 4.17, делалась так: в расчёт вводились векторы, хранящие координаты вершин двенадцати прямых углов крестообразной заготовки (первый кадр анимации) и этих же точек на свернутой коробке (последний кадр). Затем значения координат

Занятие 4

вершин углов заготовки плавно менялись до значений координат сложенной коробки. У последнего кадра анимации не хватает перспективы, поэтому основание коробки кажется не квадратным, а прямоугольным. Но анимацию можно доработать.

Спрашивается, каким должен быть размер вырезаемых квадратов, чтобы объем полученной коробки был максимальным? На схеме задачи параметр a – это длина стороны квадратной заготовки, а переменная x – отношение длины стороны квадратной вырезки к параметру a .

На рисунке 4.18 показано решение этой задачи с помощью дополнения `maple` и её функции `solve` аргументом которой записана производная функция, возвращающей объем коробки с единичной длиной стороны заготовки – произведение площади основания коробки $(1 - 2x)^2$ на её высоту x . От этой функции, представляющей собой кубический полином, берется первая производная. Получается квадратный полином, у которой ищутся нули. Все это можно сделать и в уме, расписывая ход решения на бумаге, но мы сейчас все чаще и чаще делаем подобные аналитические преобразования на компьютере. У квадратного полинома два нуля: $1/2$ – локальный минимум функции (нулевой объем коробки) и $1/6$ – искомый максимум. Это и есть решение нашей "народной" задачи оптимизации раскроя коробки: длины сторон вырезаемых четырех квадратиков должна равняться одной шестой длины стороны исходного квадрата-заготовки.

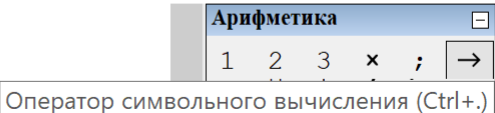
$$\text{maple} \left(\text{solve} \left(\frac{d}{d x} (1 - 2 \cdot x)^2 \cdot x \right) \right) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$


Рис. 4.18. Решение задачи о коробке максимального объема

Показанное на рисунке 4.18 решение, повторяем, можно найти во многих бумажных и интернетовских источниках. Но задача об оптимальной коробке имеет довольно неожиданное и интересное продолжение [7], в которое по понятным причинам опасались "залезать" в докомпьютерную эру.

Можно четыре квадрата, отрезанных от исходной заготовки (см. левый верхний кадр анимации на рис. 4.17) не выбрасывать, а пустить в дело – сделать из них четыре новые одинаковые коробки меньшего размера по той же схеме раскроя. Из шестнадцати $(4 \cdot 4)$ новых отрезанных квадратов можно опять же сделать новые коробки с новыми обрезками. Из шестидесяти четырех $(16 \cdot 4)$ новых отрезанных квадратов снова можно сделать ещё меньшие новые коробки и т.д. до бесконечности. В математике подобные объекты, образуемые повторением одной и той же операции, но на новом уровне, называют *фракталами* [8]. Если в том же интернете провести поиск по данному ключевому слову, то можно найти

Занятие 4

изображения и описания фракталов различной формы, в том числе и состоящих из квадратов или кубиков, а также параллелепипедов (коробок) с квадратным основанием уменьшающегося размера, подобные тем, какие мы только что описали.

Но наш "коробочный" фрактал можно попытаться *оптимизировать* – определить размеры сторон квадратных вырезов, при которых суммарный объем полученных коробок будет максимальным.

На рисунке 4.19 показано нахождение оптимального раскроя квадрата на пять коробок – одной большой и четырех маленьких. Ясно, что при втором шаге раскроя четырех маленьких квадратов нужно сохранить пропорцию $1/6$, чтобы суммарный объем этих четырех коробок малого размера был максимален. Эта пропорция ($x/6$) и зафиксирована в решении на рис. 4.19. Тут, как правило, многие полагают, что при раскрое большой коробки должна сохраняться пропорция $1/6$. Но это не так – эта пропорция несколько больше, чем одна шестая (это будет показано на рис. 4.20).

$$\text{maple} \left(\text{solve} \left(\frac{d}{d x} (1 - 2 \cdot x)^2 \cdot x + 4 \cdot \left(x - 2 \cdot \frac{x}{6} \right)^2 \cdot \frac{x}{6} \right) \right) = \left[\begin{array}{c} \frac{3 \cdot (6 + \sqrt{7})}{58} \\ \frac{3 \cdot (6 - \sqrt{7})}{58} \end{array} \right]$$
$$\left[\begin{array}{c} \frac{3 \cdot (6 + \sqrt{7})}{58} \\ \frac{3 \cdot (6 - \sqrt{7})}{58} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} 0,4472 \\ 0,1735 \end{array} \right]$$

Рис. 4.19. Решение задачи о пяти коробках максимального объема

Третий шаг раскроя, дающий 21 коробку – одну большую, четыре средних и 16 маленьких также отображен на рис. 4.20. Используются не аналитические (рис. 4.18 и 4.19), а численные методы, в частности, функция SMath с именем *solve*. Заодно продублированы численно ответы, полученные в аналитических решениях – одна шестая (рис. 4.18) и второе выражение с квадратным корнем из семи (рис. 4.19).

Занятие 4

$$a := 1 \text{ m} \quad V_1(x) := (a - 2 \cdot a \cdot x)^2 \cdot a \cdot x$$

$$x_{opt1} := \text{solve} \left(\frac{d}{d x} V_1(x), x, 0.1, 0.2 \right) = 0.166666666649975$$

$$V_5(x) := V_1(x) + 4 \cdot (a \cdot x - 2 \cdot a \cdot x \cdot x_{opt1})^2 \cdot a \cdot x \cdot x_{opt1}$$

$$x_{opt5} := \text{solve} \left(\frac{d}{d x} V_5(x), x, 0.1, 0.2 \right) = 0.17349562184136$$

$$\frac{3 \cdot (6 - \sqrt{7})}{58} = 0.17349562184149$$

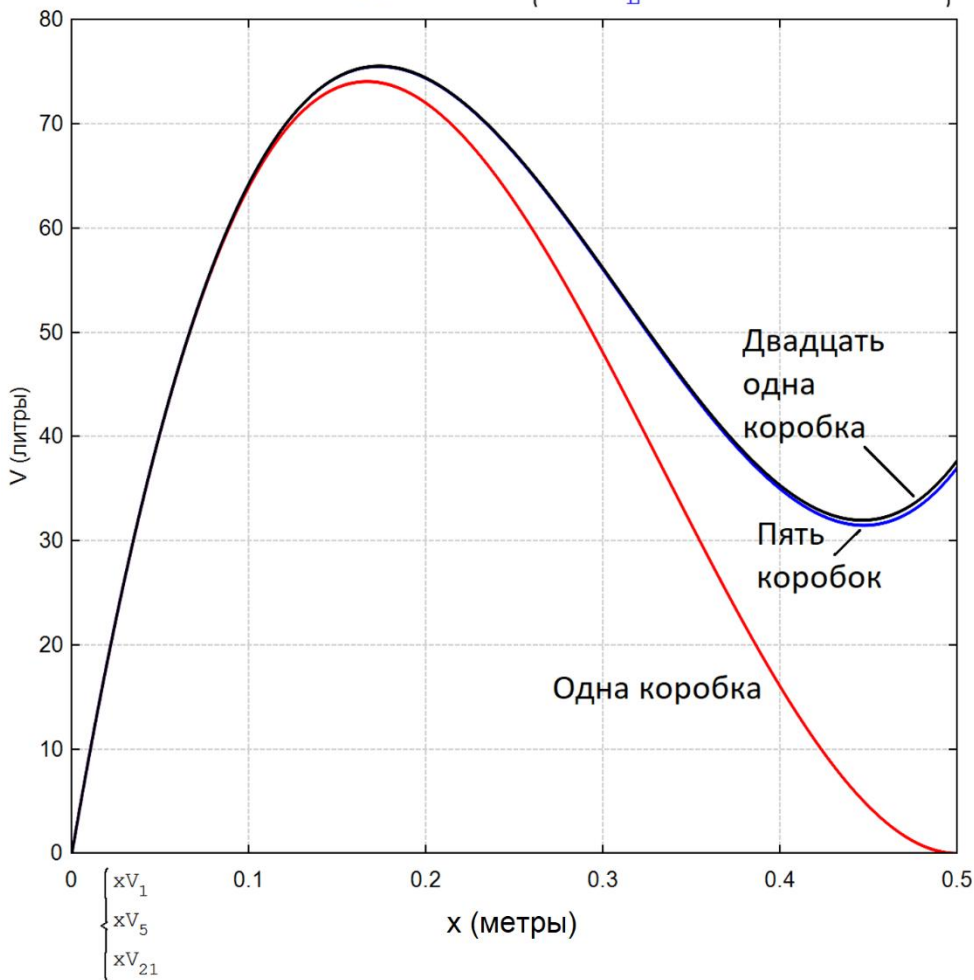
$$V_{21}(x) := V_5(x) + 16 \cdot (a \cdot x \cdot x_{opt1} - 2 \cdot a \cdot x \cdot x_{opt1} \cdot x_{opt5})^2 \cdot a \cdot x \cdot x_{opt1} \cdot x_{opt5}$$

$$x_{opt21} := \text{solve} \left(\frac{d}{d x} V_{21}(x), x, 0.1, 0.2 \right) = 0.17363620367393$$

$$x := [0, 0.0001 \dots 0.5] \quad xV_1 := \text{augment} \left(x, \frac{V_1(x)}{L}, ". ", 0.5, "red" \right)$$

$$xV_5 := \text{augment} \left(x, \frac{V_5(x)}{L}, ". ", 0.5, "blue" \right)$$

$$xV_{21} := \text{augment} \left(x, \frac{V_{21}(x)}{L}, ". ", 0.5, "black" \right)$$



Занятие 4

Рис. 4.20. Решение задачи об одной, пяти и 21 коробке максимального объема

Из графиков на рис. 4.20 и из численных значений видно, что четвертый шаг раскроя даст очень незначительный прирост суммарного объема у 21 коробки (1+4+16).

Задачу о пяти коробках – одной большой и четырех маленьких можно решить и по-иному, забыв на время про пропорцию $1/6$ (раскрой четырех маленьких периферийных квадратов – см. рис. 4.19) и проанализировав функцию V_5 не с одним (рис. 4.20), а с двумя аргументами: x (пропорция для первого шага раскроя) и y (пропорция для второго шага раскроя – см. рис. 4.21, где была построена соответствующая поверхность).

$$f(x, y) := \begin{bmatrix} (1 - 2 \cdot x)^2 \cdot x + 4 \cdot (x - 2 \cdot x \cdot y)^2 \cdot x \cdot y \\ x \\ y \end{bmatrix}$$

$S := \text{CreateMesh}(f(x, y), -0.1, 0.7, -0.1, 0.7, 40, 40)$

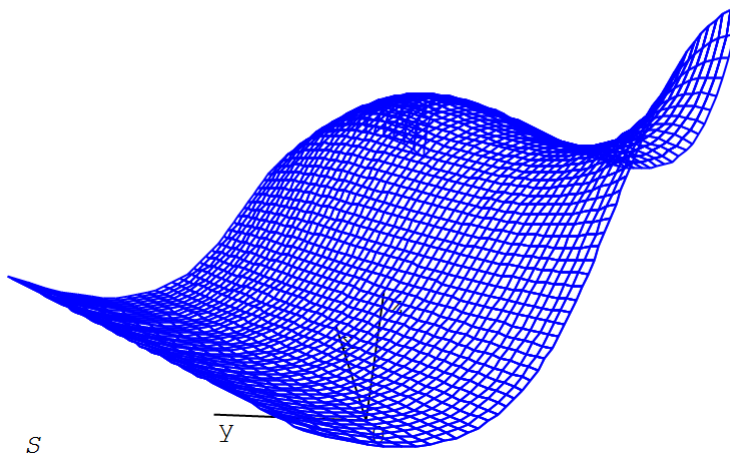


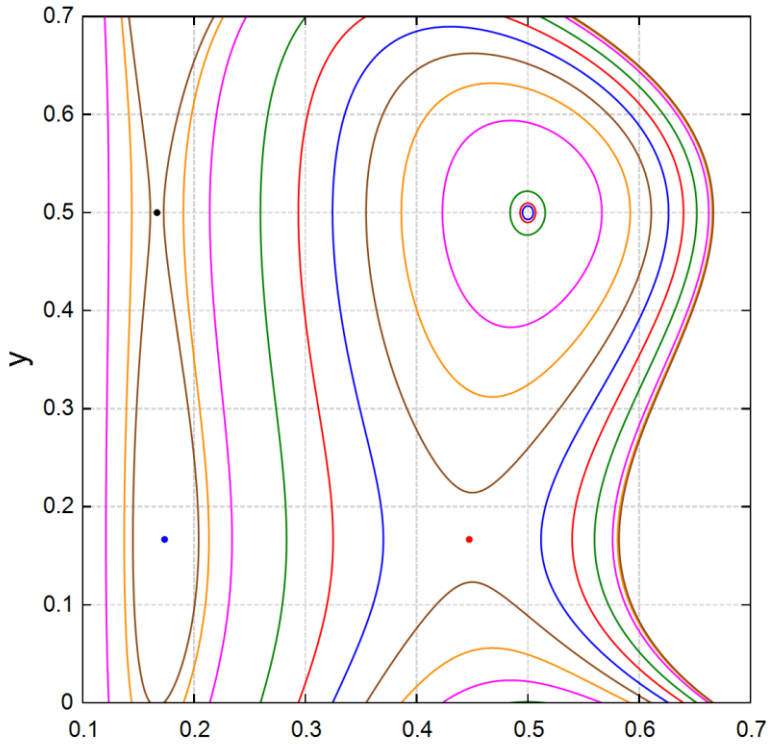
Рис. 4.21. Графическое решение задачи о пяти коробках максимального объема – поверхность

На поверхности, если её вращать мышкой (не здесь в тексте, а в среде SMath), можно при желании увидеть особые точки – максимум, минимум и две седловые точки. Эти точки хорошо просматриваются на рис. 4.22, где построено семейство линий неявной функции с именем V_5 . Тем самым получена не поверхность (см. рис. 4.21), а контурный график – график линий одного уровня, на котором отмечены четыре точки: максимум, минимум и две седловые. Точка минимума ($x=0.5, y=0.5$) обведена круглой линией одного уровня, равного 0.00005. Точка максимума ($x=0.1735, y=0.1667$) должна быть тоже по идее обведена овальной линией одного уровня. То, что это максимум, видно из графиков на рис. 4.20.

Занятие 4

$$V_5(x, y) := (1 - 2 \cdot x)^2 \cdot x + 4 \cdot (x - 2 \cdot x \cdot y)^2 \cdot x \cdot y$$

```
S := stack(0.00005, 0.0001, 0.0005, [0.01, 0.02..0.07], 0.073, 0.074)
Plot := {1
for i ∈ [1..length(S)]
  Plot_i := V_5(x, y) - S_i
Plot
```



```
Plot
{ [ 1/6 1/2 "." 3 "black" ]
{ [ 3*(6+sqrt(7))/58 1/6 "." 3 "red" ]
{ [ 3*(6-sqrt(7))/58 1/6 "." 3 "blue" ]
roots ( [ [ d/dx V_5(x, y) = 0 ]
[ d/dy V_5(x, y) = 0 ] ], [ x ], [ 0.15 ] ) = [ 0.173495621841487
[ 0.1666666666666666 ]
3*(6-sqrt(7))/58 = 0.173495621841487
roots ( [ [ d/dx V_5(x, y) = 0 ]
[ d/dy V_5(x, y) = 0 ] ], [ x ], [ 0.4 ] ) = [ 0.447194033330927
[ 0.1666666666666666 ]
3*(6+sqrt(7))/58 = 0.447194033330927
roots ( [ [ d/dx V_5(x, y) = 0 ]
[ d/dy V_5(x, y) = 0 ] ], [ x ], [ 0.15 ] ) = [ 0.1666666666666666
[ 0.4999999999999999 ]
1/6 = 0.1666666666666667
```

Занятие 4

Рис. 4.22. Графическое и численное решение задачи о пяти коробках максимального объема – линии одного уровня

Под контурным графиком на рис. 4.22 показан трехкратный вызов встроенной в SMath функции `roots`, решающий одну и ту же систему двух уравнений при разных начальных значениях неизвестных x и y .

4.5.2. Конус

А вот ещё одна довольно интересная задача на раскрой заготовки с утилизацией отходов. Для перевозки на канатной дороге сыпучих грузов нужна люлька не в виде прямоугольного параллелепипеда (коробки – см. выше), а в виде конуса.

Из круглой заготовки по несложной технологии изготавливается емкость в виде прямого кругового конуса: вырезается сектор с углом α (альфа), затем полученная выкройка сворачивается в конус, а шов сваривается (паяется, склеивается – см. рис. 4.23). Когда-то давно продавцы в магазинах ловко сворачивали подобные конусы из листа грубой серой оберточной бумаги и насыпали в получившийся кулек сахарный песок, крупу и прочую бакалею.

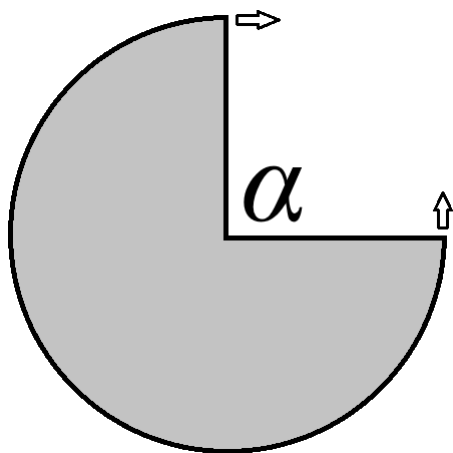


Рис. 4.23. Задача о конической емкости: схема решения

Требуется найти угол вырезки α , при котором объем конуса будет максимальным. Пожарное ведро, как правило, имеет форму конуса.

Мы сразу рассмотрим численное решение задачи на SMath – см. рис. 4.24, где радиус круглой заготовки принимается за единицу. Точнее, за один метр (единицы измерения тут задействованы для того, чтобы не было допущено ошибок при вводе формул). Создаются две вспомогательные функции с именами r (радиус основания конуса) и h (его высота), которые затем формируют функцию V_1 (объем одного конуса). Вырезка не выкидывается – из нее скручивается вторая емкость в виде конуса. Функция V_2 – это суммарный объем двух конусов. Далее строятся два графика, показывающих изменение объема одного конуса и двух конусов в зависимости от угла вырезки. В график дополнительно введена вторая (правая) ось ординат, инструменты форматирования которого показаны на рис. 4.25. Они вызываются

Занятие 4

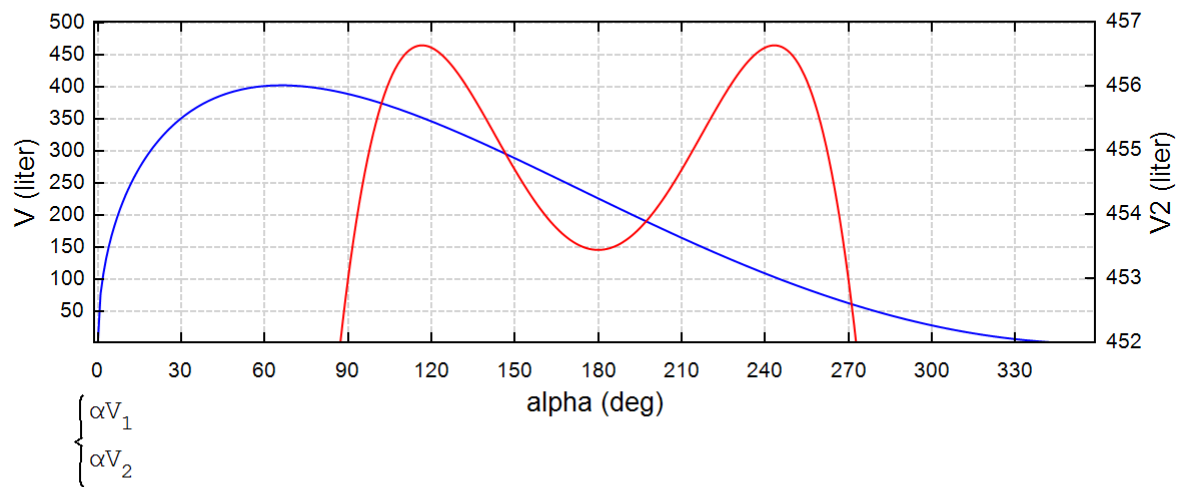
двойным щелчком мыши по графику. В появившемся меню формируются параметры второй оси ординат (Y2-Axis – см. верхнюю часть рис. 4.25) и через позицию <List...> вызывается окно Редактор коллекции Series, где позиции IsY2Data задается значение True. Все это описывать довольно сложно – нужно просто поработать с этими инструментами. А можно и не вводить дополнительную ось ординат, а построить два отдельных графика один под другим, сделав у них одинаковыми масштабы осей абсцисс. Это предпочтительнее и потому, что пересечение кривых ассоциируется с графическим решением систем уравнений (см. например, рис. 10.13 в главе 10). Точки пересечения кривых – это корни системы. На графике же рис. 4.24 точки пересечения кривых не имеют никакого физического смысла, но можно поискать их координаты просто для тренировки.

$$R := 1 \text{ m} \quad r(\alpha) := R \cdot \left(1 - \frac{\alpha}{2 \cdot \pi}\right) \quad h(\alpha) := \sqrt{R^2 - r(\alpha)^2}$$

$$V_1(\alpha) := \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r(\alpha)^2 \cdot h(\alpha) \quad V_2(\alpha) := V_1(\alpha) + V_1(2 \cdot \pi - \alpha)$$

$$\alpha := [0 \text{ deg}, 1 \text{ deg} \dots 360 \text{ deg}]$$

$$\alpha V_1 := \text{augment} \left(\frac{\alpha}{\text{deg}}, \frac{V_1(\alpha)}{\text{L}} \right) \quad \alpha V_2 := \text{augment} \left(\frac{\alpha}{\text{deg}}, \frac{V_2(\alpha)}{\text{L}} \right)$$



$$\begin{bmatrix} \alpha_{opt1} \\ No \\ No \end{bmatrix} := \left(\text{solve} \left(\frac{d}{d \alpha} V_1(\alpha) = 0, \alpha \right) \right) = \begin{bmatrix} 66.0613 \\ 360 \end{bmatrix} \text{ deg} \quad V_1(\alpha_{opt1}) = 403.07 \text{ L}$$

$$\begin{bmatrix} \alpha_{opt2} \\ No \\ No \end{bmatrix} := \left(\text{solve} \left(\frac{d}{d \alpha} V_2(\alpha) = 0, \alpha \right) \right) = \begin{bmatrix} 116.6448 \\ 180 \\ 243.3549 \end{bmatrix} \text{ deg} \quad V_2(\alpha_{opt2}) = 456.64 \text{ L}$$

Рис. 4.24. Графическое и численное решение задачи об одной и двух конических емкостях

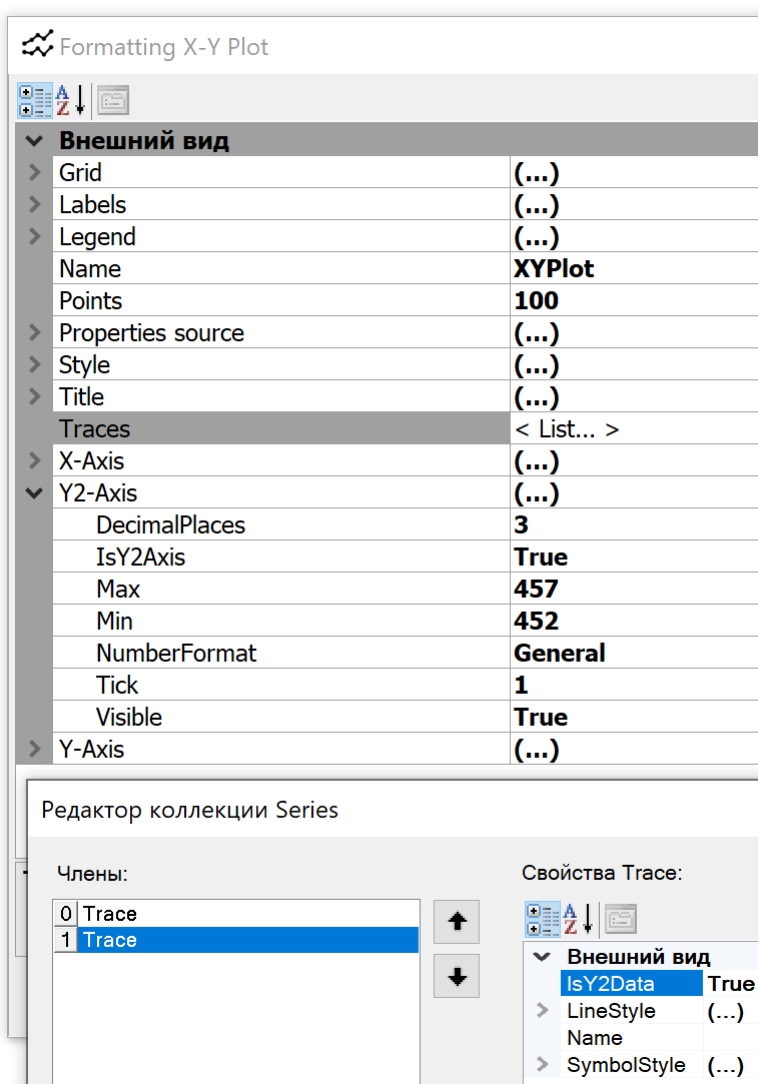


Рис. 4.25. Инструменты создания второй оси ординат декартового графика

Для точного определения оптимального угла вырезки задействована уже знакомая нам функция `solve`, но не с четырьмя, а с двумя аргументами. Четыре аргумента были в решении на рис. 4.20. Двухаргументная функция `solve` вернула не один, а два (одна коническая емкость) и три (две емкости) ответа. Первые элементы векторов являются решением нашей задачи.

А можно ли из круглой заготовки изготовить не две, а три конические емкости, суммарный объем которых превысит объем двух емкостей? Решение этой задачи в среде SMath очерчено на рис. 4.26, где через несложные геометрические преобразования с котангенсом и синусом создана так называемая треугольная диаграмма, из которой на первый взгляд видно, что третья коническая емкость будет лишней. Стороны треугольника – это вид сверху на двугорбую кривую, показанную на рис. 4.24. На этих сторонах находятся по два максимума (а всего их шесть), в которые попадают, когда ищут максимум функции $\Sigma V(\alpha, \beta)$ с ограничениями, заданными равносоставленным прямоугольником.

Занятие 4

$$r(\alpha) := \frac{\alpha}{2 \cdot \pi} \quad h(\alpha) := \sqrt{1 - r(\alpha)^2} \quad V(\alpha) := \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r(\alpha)^2 \cdot h(\alpha)$$

$$\Sigma V(\alpha, \beta) := \begin{cases} \Sigma V'(\alpha, \beta) := V(\alpha) + V(\beta) + V(2 \cdot \pi - \alpha - \beta) \\ \alpha' := \alpha - \beta \cdot \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ \beta' := \frac{\beta}{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)} \\ \text{if } ((\alpha' + \beta' > 2 \cdot \pi) \vee (\alpha' < 0)) \vee (\beta' < 0) \\ \quad 0 \\ \text{else} \\ \quad \Sigma V'(\alpha', \beta') \end{cases}$$

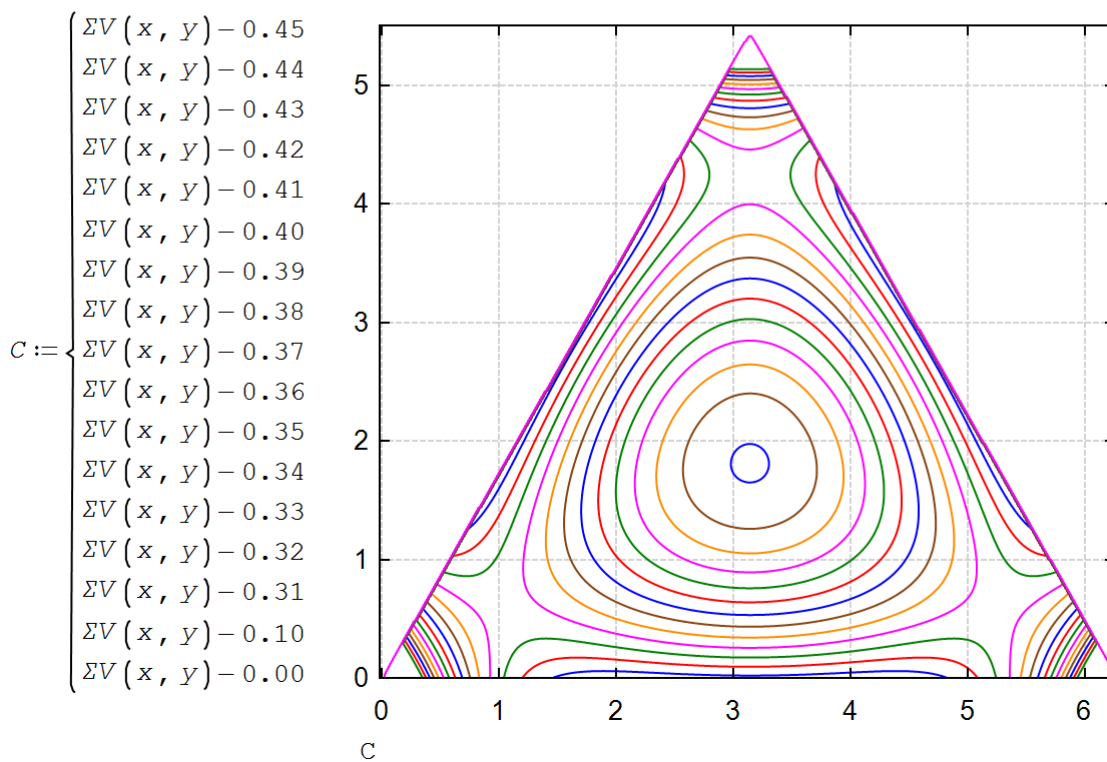


Рис. 4.26. Задача о третьей конической емкости: треугольная система координат

Если контурный график, показанный на рис. 4.26, превратить в поверхность, подобную той, которая отображена на рис. 4.21, то получится некий трехногий табурет с локальным минимумом посередине сидения и с шестью максимумами на трех сторонах треугольного сидения.

С треугольной диаграммой здесь нужно работать потому, что аргументы анализируемой функции ΣV связаны соотношением $\alpha + \beta$ меньше или равно 2π . Если $\alpha + \beta$ равно 2π , то мы находимся на краях треугольника. Если $\alpha + \beta$ меньше 2π , то мы находимся внутри треугольника. Углы α и β – это, напоминаем углы вырезов из круглой заготовки для изготовления двух конических емкостей.

Занятие 4

Интересный треугольный график линий одного уровня (рис. 4.27) получается, если функцию ΣV не ограничивать треугольником « $\alpha + \beta$ меньше или равно 2π », а показывать во всем диапазоне значений аргументов, при которых функция ΣV выдает действительные значения («лицо богомола» – см. также подобное мистическое «лицо» на рис. 10.16 в главе 10). В середине большого равностороннего перевернутого треугольника всех значений аргументов находится дугой маленький неперевернутый равносторонний треугольник из рис. 4.26, очерчивающий область реальных аргументов, связанных с нашей задачей. На рис. 4.27 четко просматриваются три точки максимума в углах большого треугольника, шесть седловых точек в углах и у середины сторон маленького треугольника и одна точка локального минимума в центре двух треугольников. По сторонам маленького внутреннего равностороннего треугольника находятся шесть точек – решение задачи о двух конусах с максимальной суммой объемов. Третий конус лишний!

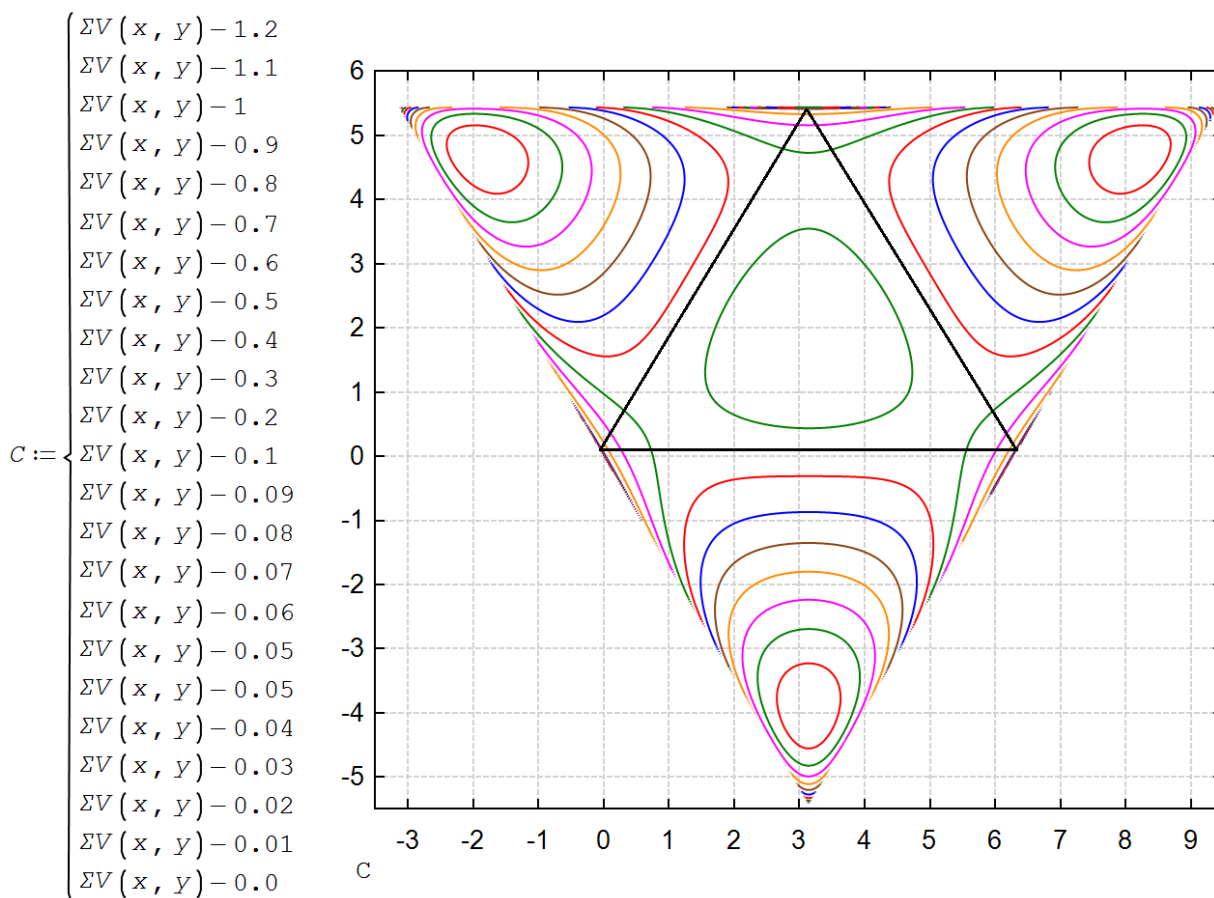


Рис. 4.27. Задача о трех конических емкостях с полной областью двух аргументов

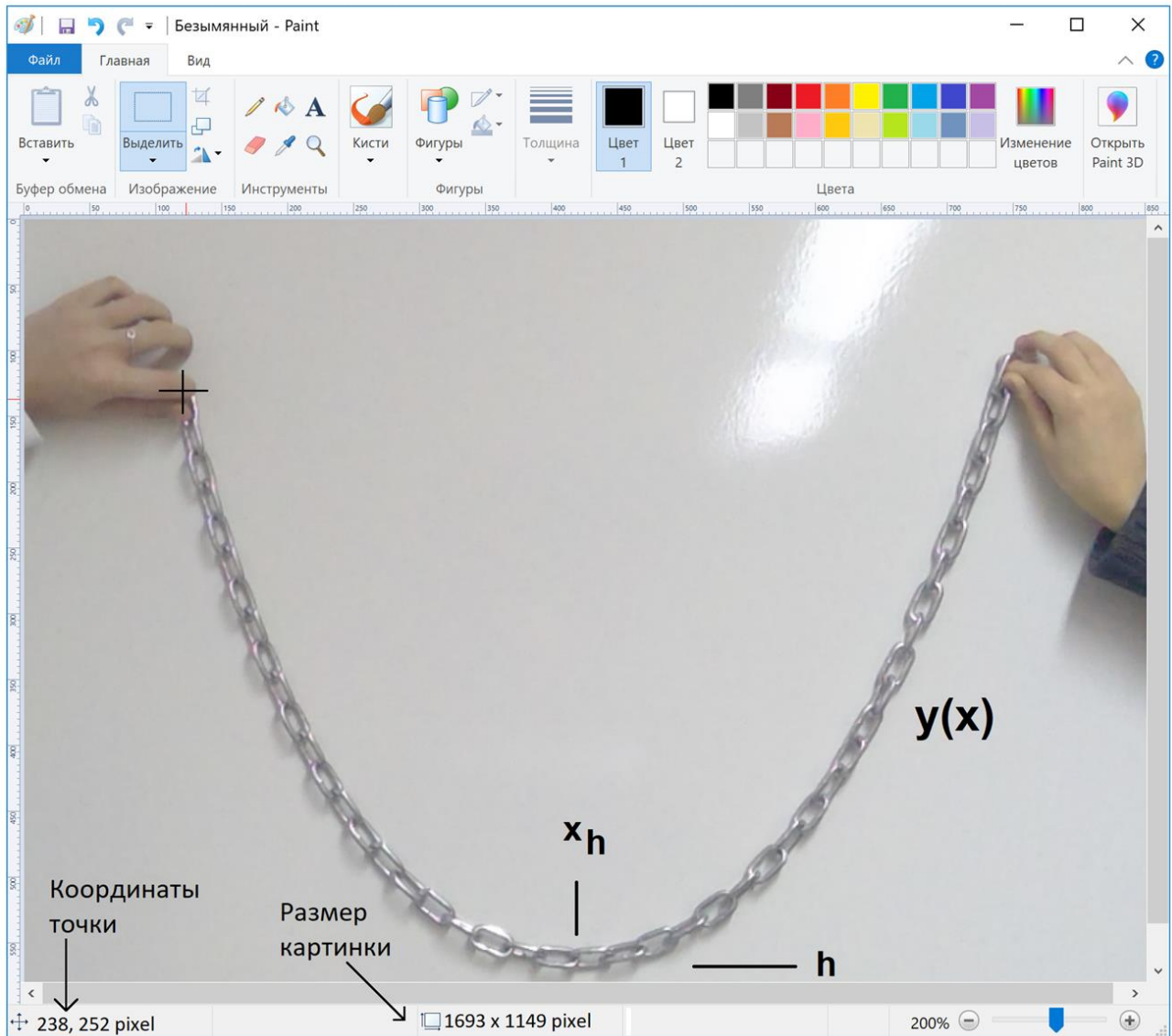
4.6. Лабораторная работа с цепью

На рисунке 4.28 показано вот что.

В среде графического редактора Paint открыта фотография металлической цепи, прижатой за два её конца к школьной доске так, чтобы она свободно повисала, но не покачивалась.

Занятие 4

Прижали цепь к доске два ученика, проводящие эту интересную физико-математическую лабораторную работу.



$$X := \begin{bmatrix} 238 \\ 386 \\ 833 \\ 1297 \\ 1477 \end{bmatrix} \quad Y := 1149 - \begin{bmatrix} 252 \\ 680 \\ 1107 \\ 735 \\ 252 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 897 \\ 469 \\ 42 \\ 414 \\ 897 \end{bmatrix}$$

Рис. 4.28. Подопытная цепь

В среде Paint цепь была «оцифрована» так. К изображениям элементов цепи подводился курсор мышки, координаты которого (в пикселях) показывались в левом нижнем углу этого

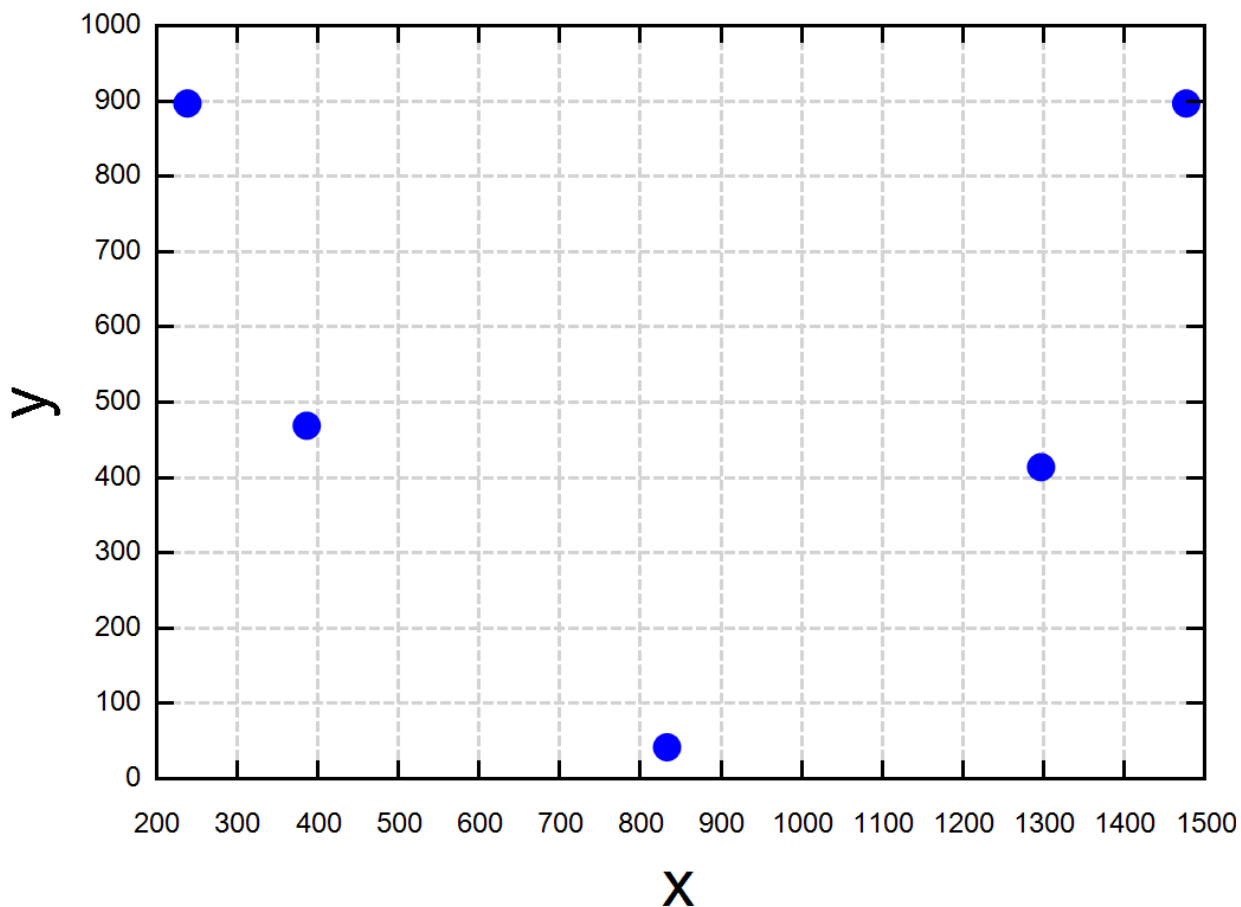
Занятие 4

графического редактора. Из рисунка 4.28 видно, что курсор мышки находится на левом конце цепи – на 238-м пикселе от левого края картинке и на 252-м пикселе от её верхнего края. Эти два числа были записаны первыми элементами векторов X и Y в среде математического пакета SMath Studio, который свободно скачивается с сайта www.smath.com. Затем курсор мышки перемещался на другую точку изображения провисающей цепи, и новая пара чисел (386 и 680) заносилась в векторы X и Y . Подобным образом были сняты координаты и других точек вплоть до последней (1477 и 252 – точка крепления цепи в правом её конце). Мы «оцифровали» только пять точек на цепи. Их число можно увеличить, но это не сильно скажется на результатах нашего физико-математического компьютерного эксперимента. Можно определить длину между пикселями на рис. 4.28 и оперировать уже не безразмерными координатами, а реальными расстояниями в миллиметрах, сантиметрах или метрах. Но это опять же не поменяет суть нашего опыта и последующего расчета.

Следует упомянуть, что есть специальные программы, автоматизирующие процесс «оцифровки» изображений: пользователь последовательно щелкает мышкой по изображению кривой линии и автоматически получает два вектора с координатами точек. Но у нас, повторяем, всего лишь пять точек, поэтому такую работу мы сделали вручную, воспользовавшись самым распространенным и самым простым графическим редактором Paint.

На рисунке 4.28 показано, что значения элементов вектора Y вычитаются из величины 1149 (высота в пикселях картинке на рис. 4.28). Это сделано для того, чтобы «перевернуть» ось ординат: точка с нулевыми координатами на рис. 4.28 находится в *верхнем* левом углу, а на наших последующих графиках она будет находиться в *нижнем* левом углу (точка начала координат в прямоугольной системе).

На рис. 4.29 точки, координаты которых хранятся в векторах X и Y , отображены на графике.



```
augment (X, Y, ".", 7, "blue")
```

Рис. 4.29. Пять точек провисающей цепи

Предположим, что цепь, как ошибочно считал Галилей (см. выше), провисает по параболе.

Известно, что параболу в каноническом её виде можно провести через три точки. Каноническое уравнение этой кривой второго порядка в прямоугольной системе координат имеет вид $x^2 = 2p \cdot y$, где p – это фокальный параметр, который равен расстоянию от фокуса до директрисы параболы. Есть и более привычная («школьная») квадратичная формула для этой кривой: $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$. Но мы будем использовать еще одну – менее известную, но более подходящую для нашей задачи формулу $a \cdot (x - x_h)^2 + h$ – см. первый оператор на рис. 4.30. У функции с именем y_p один аргумент x и три параметра: a , x_h и h . Конечно, с позиций математики и информатики у этой функции просто четыре аргумента: x , a , x_h и h . Деление аргументов на собственно аргументы и параметры мы сделали с позиций физики задачи. Параметр a отвечает за форму и «крутизну» кривой: при $a > 0$ мы имеем «провисающую»

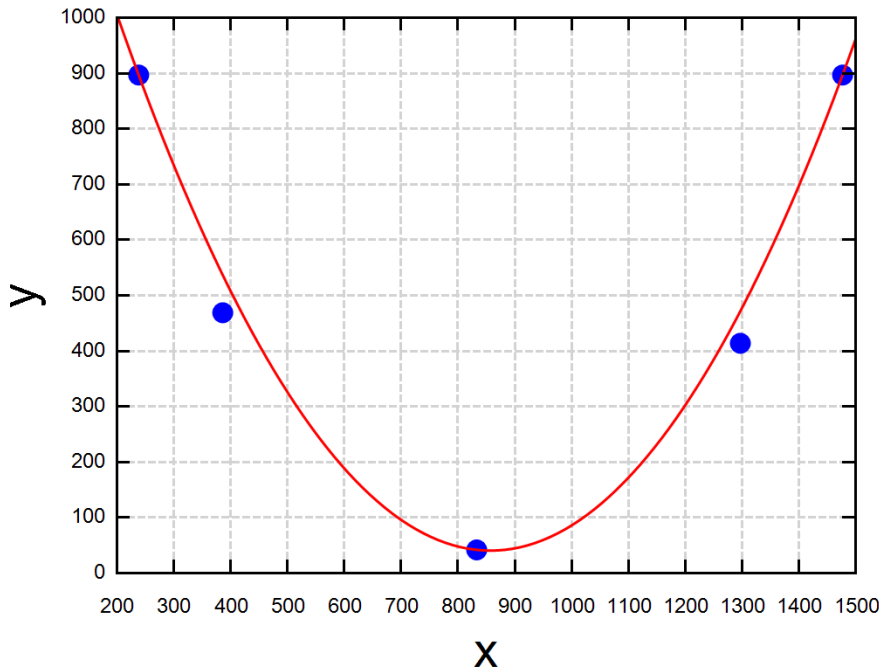
Занятие 4

параболу, а при $a < 0$ – параболу в виде арки. При значении a , стремящемся к нулю, парабола будет «снизу или сверху» стремиться к прямой, параллельной оси абсцисс. Параметры x_h и h фиксируют координаты вершины параболы: минимум провисающей кривой или максимум кривой в виде арки. На рисунке 4.30 показано, как были найдены значения параметров a , x_h и h , при которых парабола проходит через первую (левый край цепи), третью (нижний край) и пятую (правый край) точки, координаты которых хранятся в векторах X и Y . Для этого была составлена система трех алгебраических уравнения, которые решаются численно в среде пакета SMATH с использованием встроенной функции `roots` (корни), которая меняет значения своих неизвестных (второй аргумент), начиная от первого предположения (третий аргумент), заданного пользователем, так чтобы три уравнения (первый аргумент) превратились в тождества. Вернее, почти в тождества: правые и левые части уравнений должны отличаться друг от друга не более, чем на заданную малую величину. Первые предположения для параметров x_h и h взяты, исходя из предполагаемых координат минимума искомой параболы: 40 и 860. Для параметра a первое предположение (0.003) взято слегка «наобум». Главное, чтобы оно было больше нуля («провисающая» парабола, а не арка). Если бы мы использовали привычную квадратичную формулу для параболы $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$, то задавать первые предположения для коэффициентов (параметров) a , b и c было сложнее. Этим и объясняется применение нами несколько необычной формы записи параболы на рис. 4.30. Полученное решение системы уравнений можно перенести на место первого предположения и убедиться, что решение ($a = 0.002231$, $x_h = 857.5$ и $h = 40.66$) не изменится.

Занятие 4

$$Y_p(x, a, x_h, h) := a \cdot (x - x_h)^2 + h \quad \text{Parabola}$$

$$\begin{bmatrix} a \\ x_h \\ h \end{bmatrix} := \text{roots} \left(\begin{bmatrix} Y_1 = Y_p(X_1, a, x_h, h) \\ Y_3 = Y_p(X_3, a, x_h, h) \\ Y_5 = Y_p(X_5, a, x_h, h) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a \\ x_h \\ h \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0.003 \\ 860 \\ 40 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0.002231 \\ 857.5 \\ 40.66 \end{bmatrix}$$



$$\left\{ \begin{array}{l} \text{augment}(X, Y, ".", 7, "blue") \\ Y_p(x, a, x_h, h) \end{array} \right.$$

Рис. 4.30. Провисает ли цепь по параболе? Нет!

Детали решения систем уравнений, показанных на рис. 4.30, обсуждались на форуме пользователей SMath по адресу:

https://en.smath.com/forum/yaf_postsm85735_al-nl-question.aspx.

На графике на рисунке 4.30 можно видеть, как наша парабола проходит через точки, «снятые» с фотографии цепи: три точки она «пронизывает», а около двух точек кривая проходит рядом.

Отсюда вывод: цепь провисает не по параболе, а по какой-то другой кривой, достаточно близкой к параболе. Эта кривая называется *цепной линией*.

Формулу цепной линии, включающей в себя гиперболический косинус, которую мы будем использовать ниже в расчете, открыли почти одновременно и независимо друг от друга

Занятие 4

Лейбниц, Гюйгенс и Иоганн Бернулли. Это было сделано посредством решения дифференциального уравнения, вытекающего из анализа провисающей цепи. Ниже показан вывод этого дифференциального уравнения, а также его аналитическое решение. Это все несложно найти в интернете по ключу поиска «Дифференциальное уравнение провисающей цепи», например. Очень много ресурсов посвящено этой физико-математической задаче. Наиболее интересный и понятный по мнению автора находится на сайте www.math24.ru. Давайте воспроизведем это решение в среде пакета SMath.

Из схемы задачи, показанной на рис. 4.31, можно вывести уравнение равновесия произвольного малого элемента (звена) цепочки длиной Δs , на который действуют распределенная сила тяжести, равная $g \cdot \rho \cdot A \cdot \Delta s$, где g – ускорение свободного падения, ρ – плотность материала цепочки, A – площадь поперечного сечения цепочки, Δs – длина элемента цепочки и ΔP – вес этого элемента цепочки.

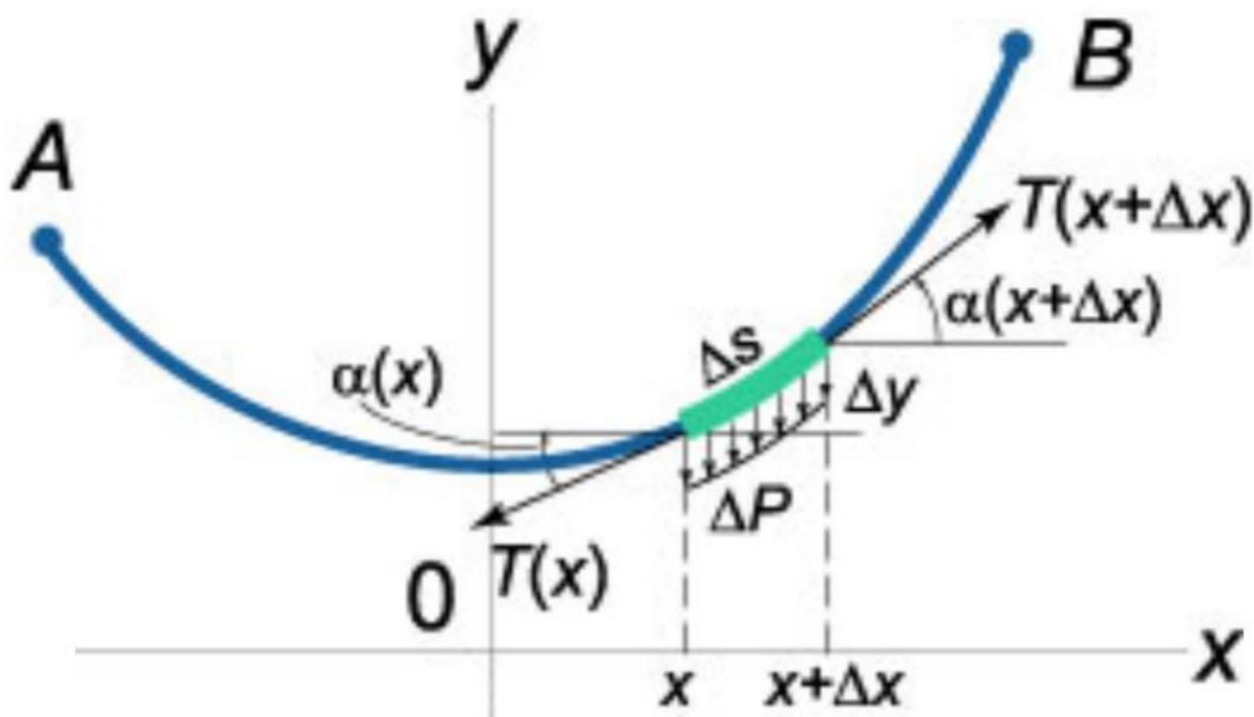


Рис. 4.31. Схема задачи о провисающей цепочке (силы натяжения $T(x)$ и $T(x+\Delta x)$ в точках x и $x+\Delta x$)

На рисунке 4.32 записаны балансы сил T , действующих на элемент цепочки в горизонтальном и вертикальном направлениях с опорой на вспомогательную функцию $\alpha(x)$ – угол наклона касательной. Горизонтальная проекция силы натяжения цепочки является постоянной

Занятие 4

величиной и равна силе натяжения цепочки в её вершине – в самой нижней точке $T(0)$, где вертикальная проекция силы натяжения равна нулю. На рисунке 4.32 зафиксирован ключевой момент всего нашего математического анализа: переход от конечной разности Δ к бесконечно малому дифференциалу d , подстановка в уравнение «вертикального» баланса сил, уравнения «горизонтального» баланса сил, появление тангенса вместо синуса, деленного на косинус, замена тангенса на производную и, наконец, появление самого дифференциального уравнения второго порядка с коэффициентом (параметром) a , включающего в себя ускорение свободного падения g , плотность материала цепочки ρ и площадь поперечного сечения цепочки A . Параметр a имеет четкий физический смысл! Это отношение горизонтальной проекции силы, разрывающей цепочку, к удельному (погонному) весу цепочки. Сила измеряется в ньютонах, а удельный вес цепочки в ньютонах, деленных на метр. Отсюда вывод – размерность параметра a – это расстояние, измеряемое метрами, которые при расчетах обычно не учитывают.

Занятие 4

$$T(x) \cdot \cos(\alpha(x)) = T(x + \Delta x) \cdot \cos(\alpha(x + \Delta x))$$

$$T(x) \cdot \cos(\alpha(x)) = T(0) \Rightarrow T(x) = \frac{T(0)}{\cos(\alpha(x))}$$

$$T(x) \cdot \sin(\alpha(x)) - T(x + \Delta x) \cdot \sin(\alpha(x + \Delta x)) = g \cdot \rho \cdot A \cdot \Delta s$$

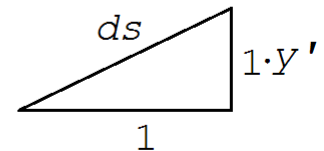
$$d(T(x) \cdot \sin(\alpha(x))) = g \cdot \rho \cdot A \cdot ds \quad \Delta x = dx$$

$$d\left(\frac{T(0)}{\cos(\alpha(x))} \cdot \sin(\alpha(x))\right) = g \cdot \rho \cdot A \cdot ds$$

$$d(T(0) \cdot \operatorname{tg}(\alpha(x))) = g \cdot \rho \cdot A \cdot ds \quad y'(x) = \operatorname{tg}(\alpha(x))$$

$$T(0) \cdot d(y'(x)) = g \cdot \rho \cdot A \cdot \sqrt{1 + (y'(x))^2} \cdot dx$$

$$d(y'(x)) = \frac{g \cdot \rho \cdot A}{T(0)} \cdot \sqrt{1 + y'(x)^2} \cdot dx$$



$$y''(x) = \frac{1}{a} \cdot \sqrt{1 + (y'(x))^2} \quad a = \frac{T(0)}{g \cdot \rho \cdot A}$$

Рис. 4.32. Вывод дифференциального уравнения цепной линии

На рисунке 4.34 показано аналитическое решение уравнения цепной линии с помощью приложения Maple, подключенному к пакету SMath. Сначала дается общее решение с двумя константами интегрирования $_C1$ и $_C2$. Затем после ввода первого условия (цепная функция при $x=0$ равна параметру a) остается одна константа интегрирования $_C1$. И наконец после ввода второго условия (производная цепной функции при $x=0$ равна нулю) мы получаем каноническое уравнение цепной линии с гиперболическим косинусом. Это условие вводится с использованием аккорда клавиш Shift+Ctrl+K, позволяющего в имена переменных вводить спецсимволы – круглые скобки: $D(y)(0)$. После этого такая необычная переменная приравнивается нулю.

Занятие 4

$$\text{maple} \left(\text{dsolve} \left(\frac{d^2}{dx^2} y(x) = \frac{1}{a} \cdot \sqrt{1 + \frac{d}{dx} y(x)^2} \right) \right) = \left[\begin{array}{l} y(x) = -C1 - i \cdot x \\ y(x) = -C1 + i \cdot x \\ y(x) = -C2 + a \cdot \text{ch} \left(\frac{x + C1}{a} \right) \end{array} \right]$$

$$\text{maple} \left(\text{dsolve} \left(\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2}{dx^2} y(x) = \frac{1}{a} \cdot \sqrt{1 + \frac{d}{dx} y(x)^2} \\ y(0) = a \end{array} \right. \right) \right) = \left[\begin{array}{l} y(x) = a - i \cdot x \\ y(x) = a + i \cdot x \\ y(x) = a \cdot \left(1 + \text{ch} \left(\frac{x + C1}{a} \right) - \text{ch} \left(\frac{C1}{a} \right) \right) \end{array} \right]$$

$$\text{maple} \left(\text{dsolve} \left(\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2}{dx^2} y(x) = \frac{1}{a} \cdot \sqrt{1 + \frac{d}{dx} y(x)^2} \\ y(0) = a \\ D(y)(0) = 0 \end{array} \right. \right) \right) = y(x) = a \cdot \text{ch} \left(\frac{x}{a} \right)$$

Рис. 4.33. Аналитическое решение дифференциального уравнения цепной линии

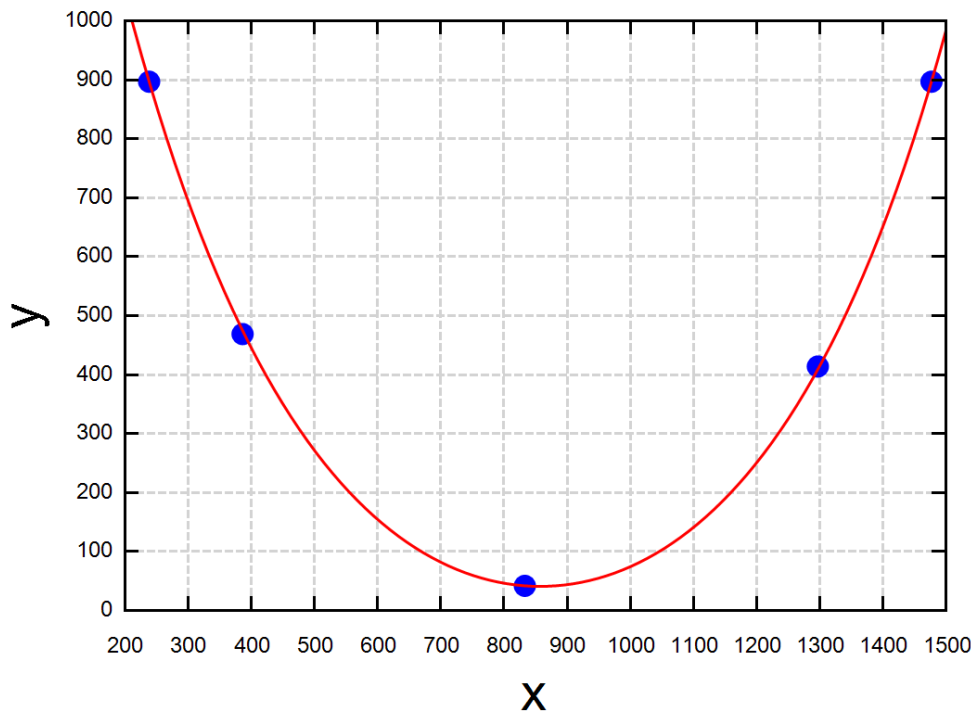
Через наши точки, расположенные на цепи (рис. 4.28), нужно проводить не параболу, а линию, которая так и называется – *цепная* линия. Её каноническая формула имеет один аргумент x и один параметр a : $a \cdot \text{ch}(x/a)$ – см. рис. 4.33. В этой формуле задействован гиперболический косинус ch . Что это за функция?

Есть такое редкое животное *овцебык*. С овцой его роднит густая шерсть, а с быком – размеры. Гиперболический косинус перенял от отдельной ветви гиперболы свою «провисающую» форму или форму арки. Но не от традиционной «школьной» гиперболы $y = 1/x$, а от «школьной» гиперболы, повернутой на 90° . Косинусом же функция ch называется потому, что она подобно обычному косинусу имеет первую производную, равную синусу – гиперболическому синусу sh , но без смены знака. В свою очередь производная гиперболического синуса равна гиперболическому косинусу. Гиперболический косинус – это $(e^x + e^{-x})/2$, где e – это основание натурального логарифма 2.7.... Гиперболический же синус – это $(e^x - e^{-x})/2$. Правда, гиперболические функции в отличие от своих тригонометрических «тёзок» периода не имеют. «Период» имеет цепь, подвешенная на ряд столбиков – на ограду памятника, например – см. рис. 4.8.

На рисунке 4.34 показано повторение расчета на рис. 4.30, но не для параболы, а для цепной линии. Красная линия пронизывает все пять синих точек (кружочков)! Что и требовалось доказать!

$$Y_c(x, a, x_h, h) := a \cdot \operatorname{ch}\left(\frac{x - x_h}{a}\right) - a + h \quad \text{Catenary}$$

$$\begin{bmatrix} a \\ x_h \\ h \end{bmatrix} := \operatorname{roots} \left(\begin{bmatrix} Y_1 = Y_c(X_1, a, x_h, h) \\ Y_3 = Y_c(X_3, a, x_h, h) \\ Y_5 = Y_c(X_5, a, x_h, h) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a \\ x_h \\ h \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 300 \\ 850 \\ 50 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 309.7 \\ 857.5 \\ 41.03 \end{bmatrix}$$



$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{augment}(X, Y, ".", 7, "blue") \\ Y_c(x, a, x_h, h) \end{array} \right.$$

Рис. 4.34. Повисает ли цепь по цепной линии? Да!

4.7. Цепь с грузом

На рисунке 4.35 показан фантазийный расчёт (научно-фантастическое программирование – см. также рис. 7.12 и 7.13 в главе 7) провисания цепи с грузом. Описание этого расчёта дано здесь [9] и здесь https://en.smath.com/forum/yaf_postst25450_Chain-with-load.aspx. Функции *minimize* в среде SMath пока нет, но будем надеяться, что она скоро появится.

Занятие 4

$$Y(x, a, x_U, Y_U) := a \cdot \operatorname{ch}\left(\frac{x - x_U}{a}\right) - a + Y_U \quad Y'(x, a, x_U) := \operatorname{sh}\left(\frac{x - x_U}{a}\right) \quad \text{Catenary}$$

$$L_c(x_1, x_2, a, x_U) := \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + Y'(x, a, x_U)^2} \, dx \quad \text{Length of the catenary}$$

$$Y_{cg}(x_1, x_2, a, x_U, Y_U) := \frac{\int_{x_1}^{x_2} Y(x, a, x_U, Y_U) \cdot \sqrt{1 + Y'(x, a, x_U)^2} \, dx}{L_c(x_1, x_2, a, x_U)} \quad \text{Ordinate of the center of gravity}$$

$$\begin{aligned} PE(a, x_{UL}, Y_{UL}, x_{UR}, Y_{UR}) := & m_c g_e \cdot L_c(0 \, \text{m}, x, a, x_{UL}) \cdot Y_{cg}(0 \, \text{m}, x, a, x_{UL}, Y_{UL}) + \\ & + m g_e \cdot Y(x, a, x_{UL}, Y_{UL}) + \\ & + m_c g_e \cdot L_c(x, L, a, x_{UR}) \cdot Y_{cg}(x, L, a, x_{UR}, Y_{UR}) \end{aligned}$$

Potential energy

$$L := 6 \, \text{m} \quad S := 12 \, \text{m} \quad H_L := 7 \, \text{m} \quad H_R := 5 \, \text{m} \quad m := 0.1 \, \text{kg} \quad m_c := 0.1 \, \frac{\text{kg}}{\text{m}} \quad x := 4 \, \text{m}$$

$$\begin{bmatrix} a \\ x_{UL} \\ Y_{UL} \\ x_{UR} \\ Y_{UR} \end{bmatrix} := \operatorname{minimize} PE, \begin{bmatrix} S = L_c(0 \, \text{m}, x, a, x_{UL}) + L_c(x, L, a, x_{UR}) \\ H_L = Y(0 \, \text{m}, a, x_{UL}, Y_{UL}) \\ Y(L, a, x_{UR}, Y_{UR}) = H_R \\ Y(x, a, x_{UL}, Y_{UL}) = Y(x, a, x_{UR}, Y_{UR}) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a \\ x_{UL} \\ Y_{UL} \\ x_{UR} \\ Y_{UR} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} \, \text{m}$$

$$a = 2.5614407 \, \frac{\text{N}}{\text{N m}^{-1}} \quad x_{UL} = 4.4116127 \, \text{m} \quad Y_{UL} = 2.163828 \, \text{m} \\ x_{UR} = 2.1353467 \, \text{m} \quad Y_{UR} = 1.4877577 \, \text{m}$$

$$x_L := \left[0 \, \text{m}, \frac{x}{300} \dots x \right] \quad x_R := \left[x, x + \frac{L - x}{300} \dots L \right]$$

$$\text{Plot} := \begin{cases} \operatorname{augment} \left(\frac{x_L}{m}, \frac{Y(x_L, a, x_{UL}, Y_{UL})}{m} \right) \\ \operatorname{augment} \left(\frac{x_R}{m}, \frac{Y(x_R, a, x_{UR}, Y_{UR})}{m} \right) \end{cases}$$

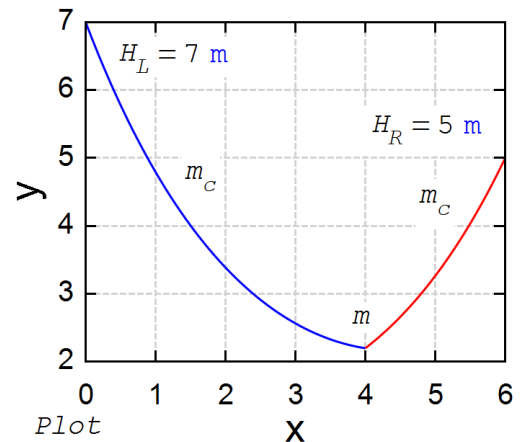


Рис. 4.35. Расчет провисания цепи с грузом через минимизацию потенциальной энергии

Задания читателям:

1. Воспроизведите расчёты, описанные выше.

Занятие 4

2. Найдите оптимальное значение длины цепи, когда она подвешена на столбах разной длины (рис. 4.11). Минимизировать нужно будет сумму сил в двух точках подвеса цепи.
3. Постройте график изменения по длине цепи силы, растягивающую цепь. Высоты опор разные – см. п. 2 заданий.
4. Подвесить на цепи два, три, четыре груза разной массы и рассчитать её провисание.
5. Задать не отступ груза от левой опоры по горизонтальной оси, а длину цепи от левой опоры до груза.
6. Задав модуль упругости цепи, рассчитать её провисание, сняв ограничение на нерастяжимость цепи.
7. Задав коэффициент термического расширения материала цепи (стали), рассчитать её параметры зимой и летом.
8. Попытаться взять интегралы (показанные на рисунках) – заменить их на выражения с элементарными функциями.
9. Найдите аналитические решения задачи о 21, 85 и т.д. коробках (третий, четвертый и т.д. шаги раскроя).
10. Докажите аналитически, что третья коническая емкость, изготавливаемая их круглой заготовки, будет лишней, если иметь ввиду максимизацию суммарного объема.
11. Постройте объемное изображение тренажника, вид сверху на который показан на рис. 4.26.
12. Тренажник, вид сверху на который показан на рис. 4.26, имеет в верхней части углубление с точкой локального минимума в центре. Определить, какой объем жидкости можно налить в это углубление.

Литература:

1. Очков В. Ф., Попова К., Камалов М. Цепная линия // Физика для школьников. № 4. 2018. С. 24–32 (http://tw.t.mpei.ac.ru/ochkov/fizika_dlya_shkolnikov_2018_04.pdf)
2. Очков В.Ф., Шевяков М.Ю., Чудова Ю.В. Цепная линия: переступить или переехать? // Математика в школе, № 3, 2021 (<http://www.tw.t.mpei.ac.ru/ochkov/Bike-Chain.pdf>)
3. Меркин Д.Р. Введение в механику гибкой нити. — М.: Наука, 1980. — 240 с. (<https://bookree.org/reader?file=469121&pg=3> или <https://dwg.ru/lib/1317>)
4. Очков В.Ф., Богомолова Е.П., Иванов Д.А. Физико-математические этюды с Mathcad и Интернет. Издательство Лань. 2016 (<http://www.tw.t.mpei.ac.ru/ochkov/T-2018/PhysMathStudies.pdf>)

Занятие 4

5. C Y Wang The optimum spanning catenary cable European Journal of Physics, Volume 36, Number 2 (<https://iopscience.iop.org/article/10.1088/0143-0807/36/2/028001>)
6. Очков В.Ф., Ленер Ф., Чудова Ю. В., Капитонец В. К., Тараканова Д. Ю. Физика vs информатика: веревочный многоугольник с гирьками в статике, кинематике и динамике Или Ньютон vs Лагранж // Cloud of Science Том 4 № 2. 2017. С. 147-180 (<http://www.twt.mpei.ac.ru/ochkov/Polygon.pdf>)
7. Очков В. Ф., Калова Яна, Никульчев Е.В. Оптимизированный фрактал или ФМИ // Cloud of Science. 2015. Т. 2. № 4. С. 544-561 (http://www.twt.mpei.ac.ru/ochkov/Opt_Fractal.pdf)
8. Очков В.Ф., Тихонов А.И. Узоры и фракталы на Python // Cloud of Science. 2020. Т. 7. № 4 С. 764-789 (http://www.twt.mpei.ac.ru/ochkov/CoS_28.pdf)
9. Очков В.Ф., Чудова Ю.В. Проектируем канатную дорогу // Физика в школе № 5. 2023. С. 40-46 (http://twt.mpei.ac.ru/ochkov/Cable_Car.pdf)