

## Занятие 5. Наш старый знакомый маятник

### 5.1. Просто маятник

Разбудите старшеклассника или студента и спросите его, чему равен период колебания маятника. Он без запинки ответит: *"Два пи, помноженное на корень от эль, деленное на же"*. Но вряд ли кто скажет, какое ограничение заложено в этой формуле и верна ли она вообще по большому счету.

Давайте за пару минут установим на компьютере отечественную свободно распространяемую физико-математическую программу SMath Studio ([www.smath.com](http://www.smath.com)) и решим с её помощью задачу о колебании маятника.

В главе 2 на рис. 2.1 был показан кадр из фильма "Амаркорд" со сценой урока математики. А вот кадр из того же «физико-математического» фильма со сценой урока физики: учитель демонстрирует колебание маятника – рис. 5.1.



Рис. 5.1. Кадр из фильма "Амаркорд": маятник

К жилету учителя физики, кстати, прикреплена цепочка с часами. Её можно использовать для демонстрации провисающего каната подвесной дороги – см. главу 4.

Итак, мы сажаем в компьютерном классе (а лучше в компьютеризированном физическом кабинете) школьников или студентов и целый день в рамках занятий по новой учебной дисциплине МИТ (Математика-Информатика-Техника) разбираем задачу о колебании маятника. Предварить такое занятие можно реальным экспериментом – демонстрацией раскачивания маятника (рис. 5.1),

## Занятие 5

благо он есть почти в каждом физическом кабинете. Можно измерять два значения: длину нити маятника и период его колебания – запустить секундомер и подсчитать количество «взмахов» маятника за определенный период времени. Можно менять длину нити маятника и попытаться связать этот параметр с периодом колебания маятника – пометить эти точки на графике и провести через них кривую – линию тренда, как сейчас говорят.

На рисунке 5.2 показана схема задачи о маятнике, позволяющая составить дифференциальное уравнение, показанное на рис. 5.3. Маятник у нас математический – это материальная точка, имеющая массу  $m$ , но не имеющая размеров, подвешенная к неподвижной точке с помощью невесомого жесткого стержня длиной  $L$  в однородном гравитационном поле с ускорением свободного падения  $g$ .

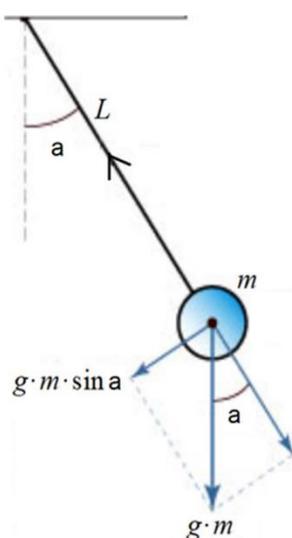


Рис. 5.2. Схема задачи о колебании математического маятника

На рисунке 5.3 показано, как в среде самого мощного в мире математического пакета Maple<sup>1</sup> вводится дифференциальное уравнение (ДУ) второго порядка и начальные условия (НУ) задачи: маятник отклонили от вертикали на угол  $a_0$  и отпустили с нулевой начальной скоростью. Угол  $a_0$  может быть больше  $90^\circ$ , а начальная скорость ненулевой. Поэтому-то мы и упомянули стержень, а не нить подвески маятника. Если стержень имеет вес, то это будет уже не математический, а физический маятник. Maple-выражение  $D(a)(0)$  означает, что угловая скорость маятника (первая производная функции угла  $a$  по времени) равна нулю. Далее вызывается встроенная в Maple функция  $dsolve$ , которая выдала ответ, иллюстрирующий известный афоризм о том, что математики часто дают абсолютно точный и абсолютно бесполезный ответ.

---

<sup>1</sup> Эту пальму первенства оспаривает пакет Mathematica, сетевую версию которого под названием WolframAlpha знают многие школьники и студенты. WolframAlpha, кстати, решил задачу, показанную на рис. 5.2, только в своей платной (лицензионной) версии, которую у нас в настоящее время по понятным причинам легально получить невозможно.

Занятие 5

$$DY := m \cdot \frac{d^2}{dt^2} a(t) \cdot L = -g \cdot m \cdot \sin(a(t)) :$$

$$HY := a(0) = a_0, \quad D(a)(0) = 0 :$$

$dsolve(\{DY, HY\})$

$$a(t) = \text{RootOf} \left( \int_{-Z}^{a_0} \frac{L}{\sqrt{-2Lg(\cos(a_0) - \cos(_a))}} d\_a + t \right),$$

$$a(t) = \text{RootOf} \left( \int_{a_0}^{-Z} \frac{L}{\sqrt{-2Lg(\cos(a_0) - \cos(_a))}} d\_a + t \right)$$

Рис. 5.3. Аналитическое решение задачи о математическом маятнике в среде Maple

Уравнение в первой строке рисунка 5.3, является математической записью второго закона Ньютона. Масса маятника  $m$ , умноженная на его тангенциальное ускорение (на вторую производную от углового перемещения, умноженную на длину маятника), равна силе, приложенной к маятнику в том же тангенциальном направлении. Эта проекция силы равна произведению  $g \cdot m$ , умноженному на **синус** угла  $a$  отклонения маятника от вертикали. Синус здесь выделен жирным шрифтом неслучайно: решение этого простого дифференциального уравнения с начальными условиями (задача Коши) вылилось в довольно сложное выражение. Нужно думать, что с ним делать дальше. Это так называемый синус Якоби, где присутствует корень выражения (*RootOf*), интеграл, но никак не просматривается вышеупомянутая простая формула периода колебания маятника. Да и самих решений два. Но если из исходного уравнения убрать синус (а это позволительно делать только при малых углах отклонения маятника от вертикали, когда синус примерно равен значению самого угла), то решением будет всем известное «школьное» уравнение колебания маятника (см. рис. 5.4) с косинусом и с периодом  $\tau$ , который спросонья без запинки «озвучит» старшеклассник или студент.

$a_s(t) := \text{maple} \left( \text{rhs} \left( \text{dsolve} \left\{ \begin{array}{l} m \cdot \frac{d^2}{dt^2} a(t) \cdot L = -m \cdot g \cdot a(t) \\ a(0) = a_0 \\ D(a)(0) = 0 \end{array} \right\} \right) \right)$

$= a_0 \cdot \cos \left( \frac{\sqrt{g \cdot L} \cdot t}{L} \right)$

$\tau := 2 \cdot \text{maple} \left( \text{solve} \left( a_s(t) = -a_0, t \right) \right) = \frac{2 \cdot \pi \cdot L}{\sqrt{g \cdot L}} = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{L}{g}}$

См. ниже инструкцию в тексте, как можно ввести в расчет это выражение через аккорд Shift-Ctrl-k

maple("символьноеВыражение") - выполнить символьное преобразование выражения. Maple Tools

Нажмите TAB для вставки

## Занятие 5

### Рис. 5.4. Аналитическое решение упрощенной задачи о математическом маятнике в среде SMath

Решение, показанное на рис. 5.4, получено в среде SMath, к которой подсоединили дополнение (плагин) с инструментами пакета Maple. Вызываются три Maple-функции: *dsolve* (аналитическое решение дифференциального уравнения), *rhs* (возврат правой части уравнения – right hand side) и *solve* (аналитическое решение алгебраического уравнения). Последняя функция возвратила выражение для значения времени, при котором наш маятник качнется на угол, равный минус  $a_0$  (максимально отклонится в другую сторону). Если полученное выражение умножить на два, то и выйдет формула периода колебания маятника, которую вручную преобразовали до всем известного вида: "Два пи, помноженное на корень от эль, деленное на же".

Выражение  $D(a)(0) = 0$  в решении на рис. 5.4 означает, что первая производная (D – differential) функции с именем  $a$  равна нулю ( $= 0$ ) при аргументе равном нулю ( $0$ ) – скорость маятника в нулевой момент времени равна нулю. Ввод этого выражения (оно прописано и на рис. 5.3) в среде SMath ведется так. Водится в расчёт буква D, затем нажимаются одновременно три клавиши – Shift, Ctrl и k. После ввода такого «аккорда» цвет курсора станет красным. После этого можно будет набрать шесть символов: «(», «a», «)», «(», «0» и «)». Появится выражение  $D(a)(0)$ . Затем нужно ещё раз одновременно нажать три клавиши – Shift, Ctrl и k. Красный цвет курсора пропадет и можно будет дописать выражение – ввести символ булева оператора «равно» (Ctrl+=) и цифру ноль.

Полное (с синусом), а не упрощенное дифференциальное уравнение маятника можно также решить в среде SMath, но не аналитически<sup>2</sup>, а численно – см. рис. 5.5. Для этого отрезок времени от нуля до  $4\tau$  (четыре периода колебания маятника) разбивается на 1000 отрезков, где по особому алгоритму вычисляются дискретные значения функции  $a(t)$  и её первой производной. Все это делает функция *rkfixed*<sup>3</sup>. Вычисленные значения помещаются в три столбца матрицы  $M$ , из которой функцией *col* изымаются векторы  $t$  (время) и  $a$  (угол). По этим точкам с помощью интерполяции легко создать функцию, а можно просто эти точки отобразить на графике – см. нижнюю часть рис. 5.5.

Примечание: Три оператора в Mathcad-блоке на рис. 5.5 создавались так. Они записывались вне данного блока, а затем перетаскивались в блок протяжкой «мышью». Прямо записать их в блок невозможно, но потом, правда, можно редактировать в блоке.

---

<sup>2</sup> Если решать дифференциальное уравнение (рис. 5.4) в полном виде, с синусом, то в процессе расчёта в пакете SMath программа зависает. Дело в том, что SMath использует плагин Maple в версии аж 1998 года. На рисунке 5.3 показана работа пакета Maple версии 2020 года, которую автор получил ещё до революции, пардон, до санкций. Законность использования в среде SMath инструментов из других математических пакетов не совсем ясна.

<sup>3</sup> В неё заложен метод Рунге – Кутты (rk) с фиксированным (fixed) шагом ([https://ru.wikipedia.org/wiki/Метод\\_Рунге\\_—\\_Кутты](https://ru.wikipedia.org/wiki/Метод_Рунге_—_Кутты)). Чтобы вызвать эту функцию, нужно к среде SMath подсоединить ещё один плагин – инструменты пакета Mathcad.

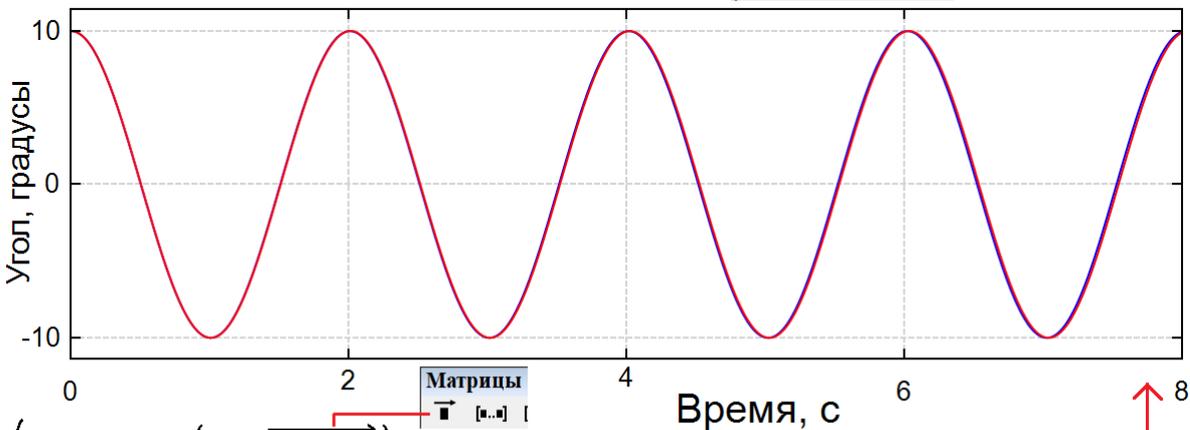
$$a_0 := 10^\circ \quad L := 1 \text{ m} \quad g := g_e = 9.8066 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \quad \tau = 2.0064 \text{ s}$$

$$a''(t) \cdot L = -g \cdot \sin(a(t)) \quad a(0) = a_0 \quad a'(0) = 0$$

```
M := rkfixed(a(t), 4 * tau, [ [ m := 1 s := 1 ] ], 1000)
```

```
t := col(M, 1) s
```

```
a := col(M, 2) rad
```



```
augment(t, a_s(t) / deg)
augment(t, a / deg)
```

Вставка    Вычисление    Сервис

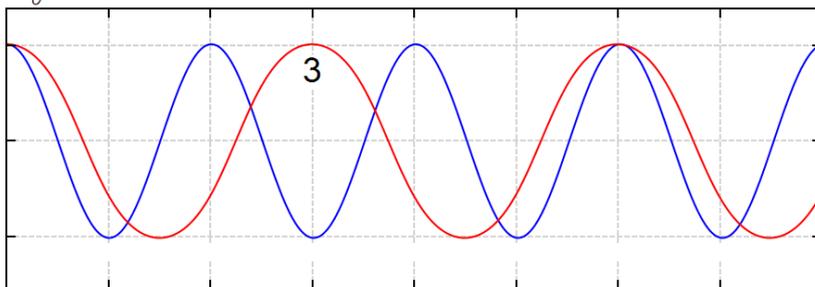
График    X-Y График

Рис. 5.5. Численное решение полной задачи о маятнике в среде SMath

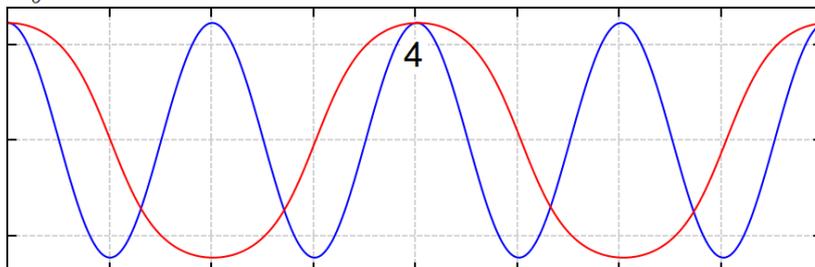
На графике отображены численное решение задачи о маятнике функция  $a_s(t)$ , полученная ранее при аналитическом (символьном – s) решении задачи, показанном на рис. 5.4 (так называемое гармоническое колебание). Эти решения слились в одну кривую. Только на правом конце графика, прищуриив глаза, можно заметить их незначительное отклонение друг от друга. Если увеличивать угол начального отклонения маятника или (а об этом часто забывают при реальной или виртуальной работе с маятником) сделать начальную скорость маятника ненулевой – подтолкнуть его в начале полета, то эти две кривые перестанут совпадать – см. рис. 5.6.

Занятие 5

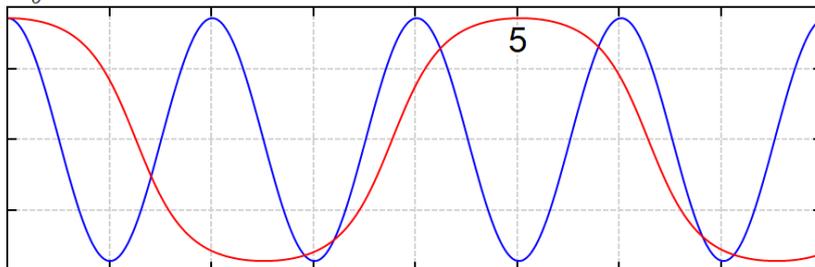
$a_0 \approx 132^\circ$



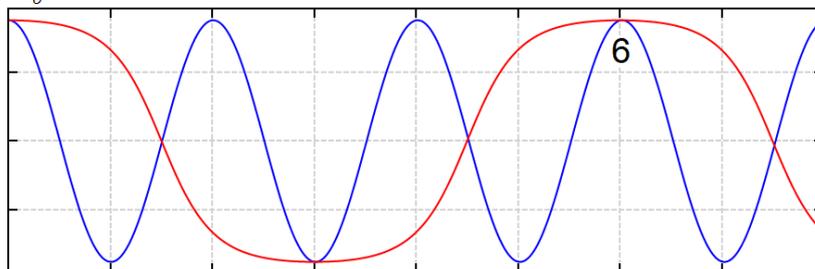
$a_0 \approx 160^\circ$



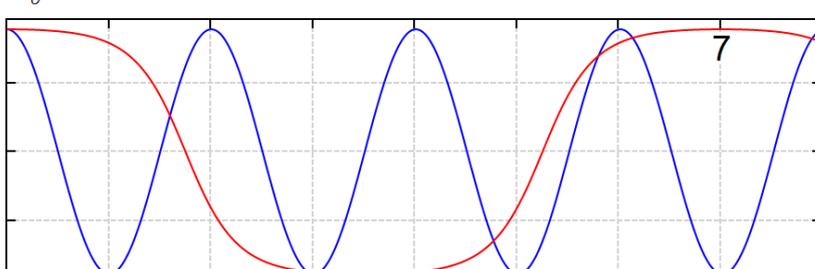
$a_0 \approx 171^\circ$



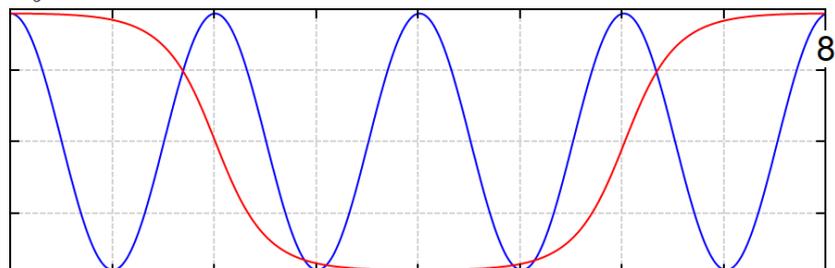
$a_0 \approx 175.8^\circ$



$a_0 \approx 178.1^\circ$



$a_0 \approx 179.15^\circ$



0 1 2 3 4 5 6 7 8

## Занятие 5

Рис. 5.6. Графическое отображение численного решения упрощенной и полной задачи о маятнике при разных начальных углах отклонения маятника от вертикали

Можно провести несложный численный эксперимент и показать, что двойка в формуле периода колебания математического маятника легко превращается (см. рис. 5.6) в тройку, четверку, пятерку, шестерку, семерку, восьмерку... И вообще, там может быть любое действительное число от двух до бесконечности... Бесконечность здесь имеет конкретный математический смысл: если маятник поднять в самую верхнюю точку ( $a_0 = 180^\circ$ ), то при нулевой начальной скорости он останется в неподвижном неравновесном состоянии с периодом колебания, равном этой самой бесконечности. Малейшее возмущение приведет маятник в колебательное движение с периодом... см. рис. 5.6, на котором прорисованы и обычный синус (косинус, сдвинутый по оси абсцисс) и ранее упомянутый синус Якоби, который «растягивается» как пружина (о пружине мы расскажем ниже) до тех пор, пока не превратится в прямую линию, когда маятник стоит вертикально и неподвижно.

Так что школьник или студент при ответе на вопрос о периоде колебания математического маятника должен... прочитать эту главу книги и дать такой ответ: *"Примерно два пи, помноженное на корень от L, деленное на g, да и то, если начальный угол отклонения маятника от вертикали невелик, а начальная его скорость тоже мала или вообще равна нулю!"*. В противном случае всё намного сложнее и... интереснее.

В решении на рисунках 5.3 и 5.4 масса маятника (переменная  $m$ ) не сокращена. Это сделано намерено для того, чтобы в уравнении ясно просматривалась «физика» задачи – математическая запись второго закона Ньютона. Математические пакеты сами все «сократят» без нашей помощи. А вот в решении на рис. 5.5 эту переменную в уравнении маятника сократили. В противном случае при численном, а не аналитическом решении задачи пришлось бы вводить значение массы маятника, которое по сути задачи было бы там лишним. На рисунке 5.5 показано, что значения начального угла, длины маятника и ускорения свободного падения вводятся с единицами измерения, что очень удобно и полезно при решении задач математической физики, к коим относится наша задача о маятнике. Но функция `rkfixed`, встроенная в *SMath* через плагин *Mathcad*, не приемлет единиц измерения в аргументах. Поэтому пришлось «обмануть» эту функцию, обозначив в её третьем аргументе единичные (безразмерные) локальные значения метра и секунды. Вектору  $t$ , изъятому из матрицы  $M$ , при этом была приписана размерность времени:  $t := \text{col}(M, 1)$ , умноженное на секунду. К вектору  $a$  была приписана единица `rad` (радиан) просто как комментарий, отмечающий, что это именно угол. Эта угловая единица сама по себе безразмерная, хотя это не совсем верно: радиан – это метр (длина дуги окружности), деленный на метр (длина радиуса).

На рисунке 5.6а показан *SMath*-расчёт затухающего маятника с фазовым портретом.

## Занятие 5

$$L := 1 \text{ m} \quad \alpha_0 := 10^\circ \quad \tau := 2.0064 \text{ s} \quad k := 30$$

$$d := 1 \text{ cm} \quad S := \pi \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2 = 0.7854 \text{ cm}^2 \quad \rho := 7.8 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \quad m := \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot d^3 \cdot \rho = 32.67 \text{ g}$$

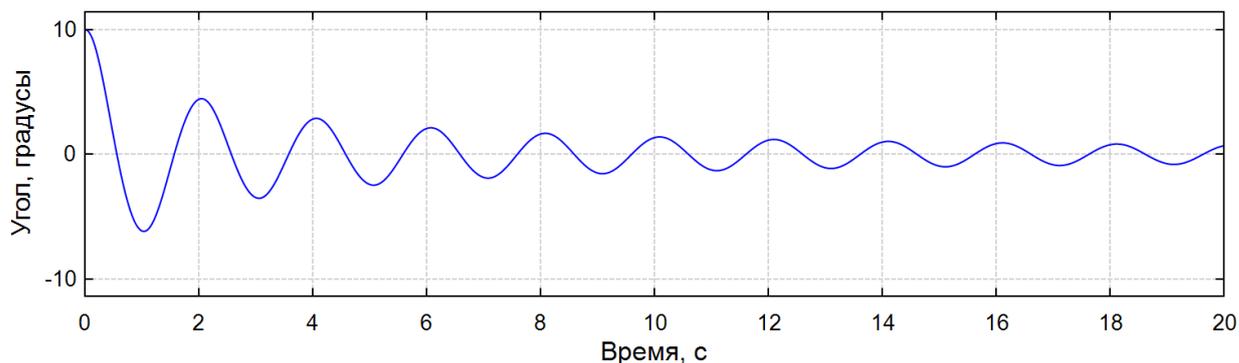
$$\rho_{air} := \text{CoolProp_Props}("D", "P", 1 \text{ atm}, "T", 20^\circ \text{C}, "Air") = 1.205 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

Mathcad-Block

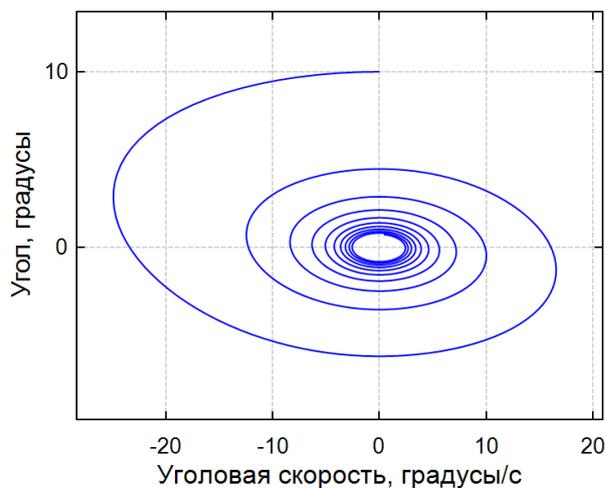
$$\left[ \alpha''(t) \cdot L \cdot m = -g_e \cdot m \cdot \sin(\alpha(t)) - k \cdot S \cdot \rho_{air} \cdot k \cdot \alpha'(t) \cdot L \cdot |\alpha'(t) \cdot L| \quad \alpha(0) = \alpha_0 \quad \alpha'(0) = 0 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right]$$

$$M := \text{rkfixed}\left(\alpha(t), 10 \cdot \tau, \left[ \begin{array}{l} m := 1 \text{ s} := 1 \text{ kg} := 1 \\ 1000 \end{array} \right]\right)$$

$$t := \text{col}(M, 1) \text{ s} \quad a := \text{col}(M, 2) \text{ rad} \quad av := \text{col}(M, 3) \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$



$$\text{augment}\left(t, \frac{a}{\text{deg}}\right)$$



$$\text{augment}\left(\frac{av}{\frac{\text{deg}}{\text{s}}}, \frac{a}{\text{deg}}\right)$$

Рис. 5.6а. SMath-расчёт затухающего маятника

### Интерлюдия. О метре из Википедии

Если ещё раз разбудить школьника или студента и спросить его, что такое метр, то он скорее всего ответит, что это какая-то там доля какого-то там меридиана Земли или что-то такое, связанное со светом (длина пути, проходимого светом в вакууме за заданное время). Но почти никто не вспомнит, что метр происходит от метрового маятника напольных часов (рис. 5.7), имеющего период колебания в две секунды – см. четвертый оператор на рис. 5.5. Каждый взмах маятника

## Занятие 5

таких часов через систему шестеренок перемещал секундную стрелку на 6 угловых градусов, минутную и часовую на... подсчитай, читатель, сам! Внизу такого маятника на резьбовой шпильке есть пара гаек, вращая которые можно менять длину маятника и заставлять часы идти точно. Остановится маятнику не дает заводная пружина часов или гиря, которую время от времени нужно с треском поднимать вверх.



Рис. 5.7. Напольные часы с метровым маятником

У Гоголя в «Мертвых душах» есть прекрасные строки *«Слова хозяйки были прерваны странным шипением, так что гость было испугался; шум походил на то, как бы вся комната наполнилась змеями; но, взглянувши вверх, он успокоился, ибо смекнул, что стенным часам пришла охота*

## Занятие 5

*бить. За шипеньем тотчас же последовало хрипенье, и наконец, понатужась всеми силами, они пробили два часа таким звуком, как бы кто колотил палкой по разбитому горшку, после чего маятник пошел опять покойно шелкать направо и налево.»* У настенных часов период колебания маятника составляет одну секунду, а не две, как у напольных часов (рис. 5.7). Несложно подсчитать длину маятника настенных часов – что-то около 25 см.

В Европе со времён распада империи Карла Великого не существовало общих стандартных мер длины: они могли быть стандартизированы в пределах одной юрисдикции (которая зачастую имела размеры одного торгового городка), но единых мер не было, и каждый регион мог иметь свои собственные. Причиной этого служило в какой-то мере то, что меры длины использовались в налогообложении (налог, например, мог измеряться в определённой длине натканного или проданного полотна), а поскольку каждый местный правитель вводил свои налоги, то для соответствующей местности законами устанавливались свои единицы измерений.

С развитием науки в XVII веке стали раздаваться призывы к введению «универсальной меры» (universal measure, как назвал её английский философ и лингвист Джон Уилкинс в своём эссе 1668 года) или «католического (всеобщего) метра» (metro cattolico) итальянского учёного и изобретателя Тито Ливико Бураттини из его работы «Misura Universale» 1675 года, меры, которая бы основывалась на каком-либо естественном явлении, а не на постановлении власти предрешающих, и которая была бы десятичной, что заменило бы множество разнообразных систем счисления, одновременно существовавших в то время, например, распространённую двенадцатеричную (пример: в футе 12 дюймов).

Идея Уилкинса заключалась в том, чтобы выбрать для единицы длины длину маятника с полупериодом колебаний равным одной секунде. Подобные маятники были незадолго до этого продемонстрированы Христианом Гюйгенсом (рис. 5.7), и их длина была весьма близка к длине современного метра (так же, как к единицам длины, использовавшимся в те времена, например, ярду). Однако, вскоре было обнаружено, что длина, измеренная таким способом, различается в зависимости от места измерений. Французский астроном Жан Рише во время экспедиции в Южную Америку (1671—1673) обнаружил увеличение периода колебаний секундного маятника по сравнению с тем, который наблюдался в Париже. Выверенный в Париже маятник в процессе наблюдений им был сокращён на 1,25 французской линии (~ 2,81 мм), дабы избежать отставания во времени на две минуты в день. Это было первое прямое доказательство уменьшения силы веса и силы тяжести, действующих на тело, по мере приближения к экватору, и это дало разницу в 0,3 % длины между Кайенной (во французской Гвиане) и Парижем.

Вплоть до французской революции 1789 года в вопросе установления «универсальной меры» не было никакого прогресса. Франция была озабочена вопросом распространения единиц измерений длины, необходимость реформы в этой области поддерживали самые различные политические силы. Галейран возродил идею о секундном маятнике и предложил её Учредительному собранию в 1790 году, с тем уточнением, что эталон длины будет измерен на широте 45° N (примерно между

## Занятие 5

Бордо и Греноблем). Таким образом, метр получал следующее определение: метр — это длина маятника с полупериодом колебаний на широте  $45^\circ$ , равным 1 с.

Первоначально за основу было принято это определение (8 мая 1790, Французское Национальное собрание). Но несмотря на поддержку собрания, а также поддержку Великобритании и новообразованных Соединённых Штатов, предложение Талейрана так и не было осуществлено. (подробнее <https://ru.wikipedia.org/wiki/Метр>).

### Конец дивертисмента

На сайте пользователей пакета SMath по адресу [https://en.smath.com/forum/yaf\\_posts84202\\_Derivative-in-Maple.aspx](https://en.smath.com/forum/yaf_posts84202_Derivative-in-Maple.aspx) подробно обсуждалась задача о маятнике. В частности, она была решена для случая, когда маятник висит на эластичной подвеске — на некой пружине с нулевой массой, которая способна растягиваться и сжиматься. На рисунке 5.8 показаны три кадра анимации движения такого маятника — прорисовывание его траекторий движения.

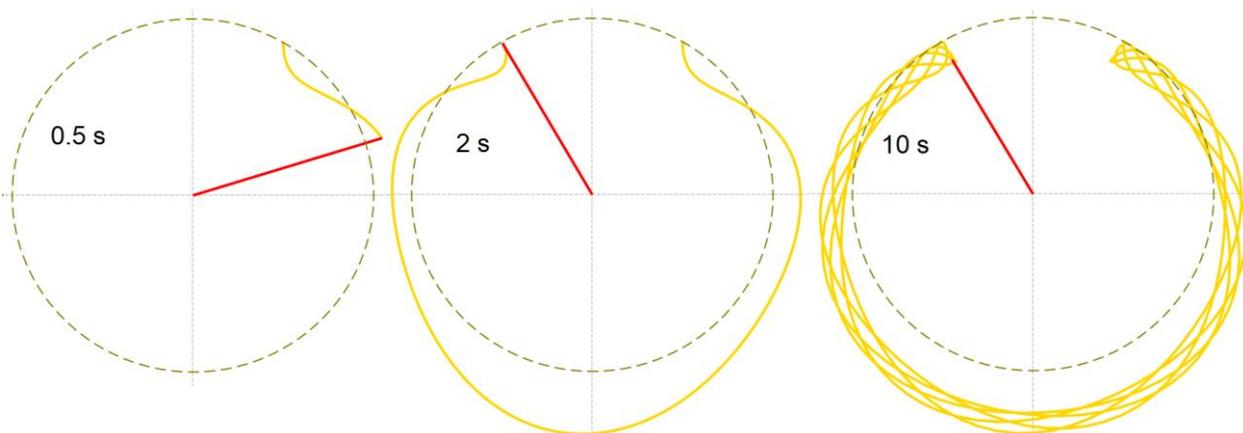


Рис. 5.8. Маятник на эластичной подвеске

Траектория движения маятника на рис. 5.8 прорисована цветом gold — золото. И это неслучайно. Мы получили математический объект, который можно назвать *гривной* — украшением, надеваемым на шею — на то место, где у некоторых животных растёт грива (см. рис. 5.9).



Рис. 5.9. Гривна

### Дивертисмент об эластичности

Если ещё раз разбудить школьника или студента и спросить его, по какому закону растягивается (сжимается) резинка (пружина), то он опять же без запинки ответит: «По закону Гука, гласящему, что растяжение/сжатие пропорционально приложенной силе!». Но если справиться в интернете, то можно узнать, что практически нет материалов, которые при деформации ведут себя так, как прописано этим законом даже при незначительных сжатиях или растяжениях. Это вторая «незначительность» маятника, если вспомнить о «незначительности» отклонения маятника от вертикали, которую мы рассмотрели выше.

В физическом кабинете школы можно провести ещё один эксперимент – повесить на штативе пружину, нагружать её и измерять, насколько она будет растягиваться. Полученные точки затем нанести на график и интерполировать их некоей кривой (рис. 5.10). Нахождение вида этой кривой показано в главе 6 на рис. 6.14.

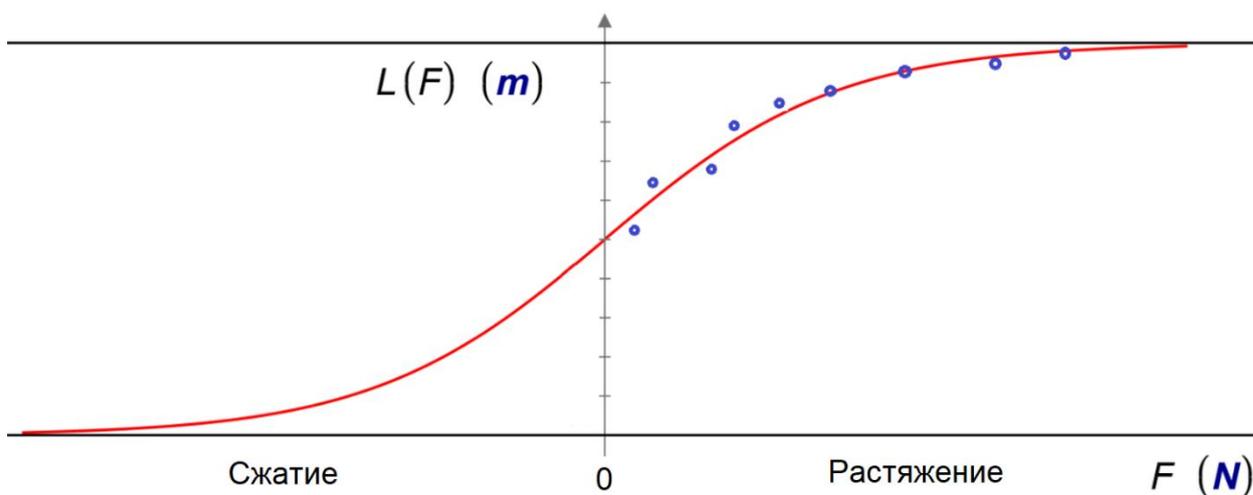


Рис. 5.10. Графическое отображение нелинейного закона Гука

На рисунке 5.10 изображена так называемая *логистическая функция*, которая достаточно точно описывает свойство эластичной подвески маятника: она под действием силы  $F$  сначала

## Занятие 5

растягивается/сжимается более-менее линейно, а затем эластичность исчерпывается и связь становится жесткой.

### Дивертисмент о логистической функции

Логистическое уравнение, также известное как уравнение Ферхюльста (по имени впервые сформулировавшего его бельгийского математика), изначально появилось при изучении изменений численности населения. Было составлено соответствующее дифференциальное уравнение, решение которого и дало данную функцию.

Почему Ферхюльст назвал уравнение логистическим, остается загадкой. Тем не менее, эта S-образная кривая широко используется для отображения развития многих процессов ([https://ru.wikipedia.org/wiki/Логистическое\\_уравнение](https://ru.wikipedia.org/wiki/Логистическое_уравнение)). Так, например, качественно выглядит количество выпущенных в мире паровозов: они появились в начале XIX века (первая промышленная революция), потом их количество стало возрастать, а затем их вытеснили тепловозы и электровозы. Наша замена линейного закона Гука на нелинейную модель – это ещё один пример использования этой кривой.

На рисунке 5.10 можно видеть точки, которыми «облеплена» логистическая кривая. Представим себе, что это графическое отображение эксперимента, который ещё Гук проводил. Берется резинка, на которую подвешивают груз с известным весом (см. выше). Длину резинки измеряют. Потом вес груза увеличивают и делают новые замеры длины резинки. Так делают до тех пор, пока резинка перестанет растягиваться или просто порвется. Затем точки на графике обрабатывают методом наименьших квадратов. В среде SMath, кстати, есть для этого нужные инструменты. Например, функция *Fit* (a fitting – сглаживание) из ещё одного плагина для SMath – из математической программы Maxima.

Конец дивертисмента

На рисунке 5.11 показана проверка решения задачи о маятнике на растяжке: строятся графики изменения во времени трех видов энергии: кинетической энергии маятника (функция  $KE$ ), потенциальной энергии маятника ( $PE$ ) и потенциальной энергии сжатой или растянутой пружины ( $SE$ ), а также сумма ( $\Sigma E$ ) этих трех видов энергии. Потенциальная энергия маятника переходит в кинетическую энергию и энергию растянутой пружины и наоборот. Но сумма этих трех энергий остается постоянной. Это прямо свидетельствует о верности закона сохранения энергии и (косвенно) о высокой точности численного метода решения данной задачи.

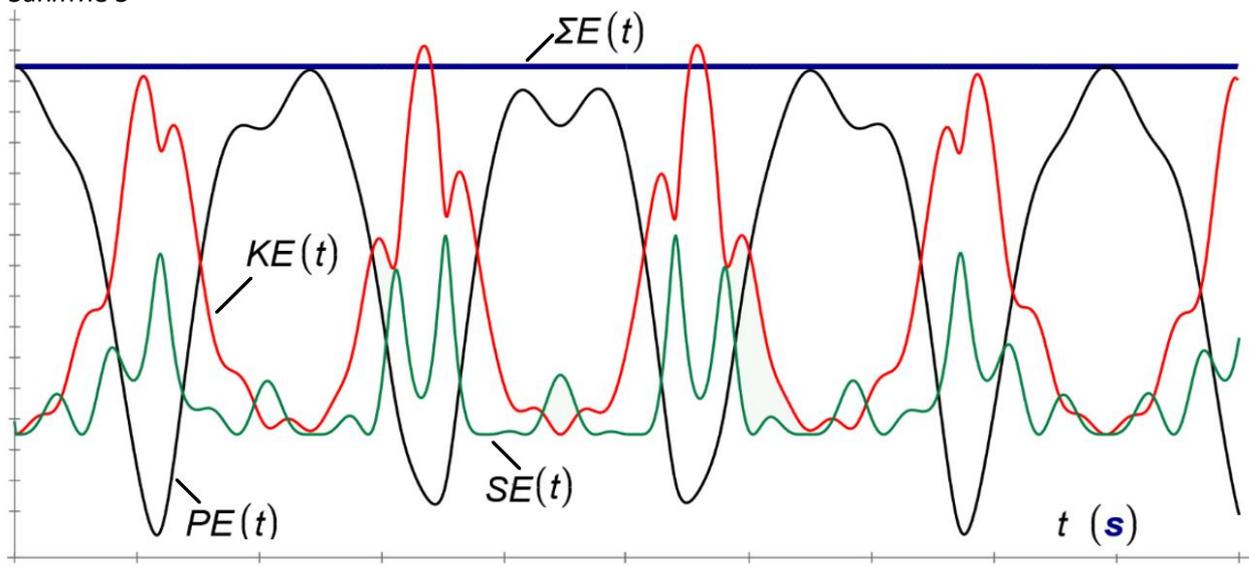


Рис. 5.11. Изменение трех видов энергии качающегося маятника на эластичной подвеске

### Дивертисмент о потенциальной энергии пружины

Мы уже замучили нашего студента вопросами-побудками. Но давайте разбудим его последний раз и спросим, чему равна потенциальная энергия сжатой или растянутой пружины. Ответ заранее известен: *"Половина квадрата отклонения пружины от исходной точки, деленная на коэффициент упругости"*. Все помнят эту формулу, но опять же никто не знает, откуда она взялась и что она по большому счету опять же неверна. Вернее, верна только для частного, линейного случая.

Да, формула потенциальной энергии растянутой пружины «с квадратом и половинкой» вытекает из линейного закона Гука. Но об этом многие забывают, как забывают и о том, что формула периода колебания маятника, с которой мы начали эту главу, также является частным «линейным» случаем. Нам же с нашим нелинейным законом подвески маятника придется от готовой формулы отказаться и идти к истокам: вспомнить, что энергия («несделанная работа») – это сила, умноженная на перемещение<sup>4</sup>. Отсюда возникает определенный интеграл силы по расстоянию в формуле для потенциальной энергии пружины. Если же в данный интеграл вписать линейную функцию Гука и взять его (не Гука, конечно, а интеграл), то и получится формула с квадратом значения растяжения пружины, делённым на два<sup>5</sup> и делённым на коэффициент эластичности. Конец дивертисмента

<sup>4</sup> Юмористическая переделка старой поговорки: «Работа не волк, а произведение силы на расстояние!».

<sup>5</sup> Человек идет по улице, смотрит в смартфон (увлеченно читает эту книгу, например) и врезается в столб. Другой человек пытается стрельнуть из рогатки, растягивает резинку, но она обрывается и бьет его по лбу. Эти две неприятные ситуации можно сгладить юмором и сказать: «Хорошо, что пополам!».

## Занятие 5

### 5.2. Гравитационный поезд

Ещё одну нелинейность в задаче о колебаниях маятника или другого объекта, связанную с сопротивлением среды, приводящей к затуханию движения маятника, мы рассмотрим на примере гравитационного поезда – специфического вида маятника.

Есть легенда о том, как Николай I перед строительством железной дороги из Санкт-Петербурга в Москву положил на карту линейку и провел карандашом прямую линию между этими двумя столицами Российской империи.

А вот ещё один анекдот, но уже не исторический, а наших дней. Один человек сдавал в бухгалтерию отчет о командировке, в котором цена железнодорожного билета из Москвы в Петербург была несколько выше цены обратного билета. На вопрос бухгалтера, откуда взялась такая разница, подотчетное лицо посоветовало взглянуть на глобус: из Санкт-Петербурга в Москву в поезд катится под горку, а на обратном пути поднимается вверх!

Николай I для ещё большего сокращения пути должен был не просто прочертить карандашом прямую линию на карте, а просверлить в глобусе прямое отверстие, соединяющее Москву с Петербургом!

Шутки шутками, но уже давно обсуждается полуфантастический проект так называемого *гравитационного поезда*, катящегося без трения в прямолинейном подземном туннеле (рис. 5.12). Первую половину пути такой поезд будет катиться под горку без какой-либо тяги локомотива, а вторую половину пути начнет по инерции подниматься вверх, замедляясь до остановки в пункте назначения.

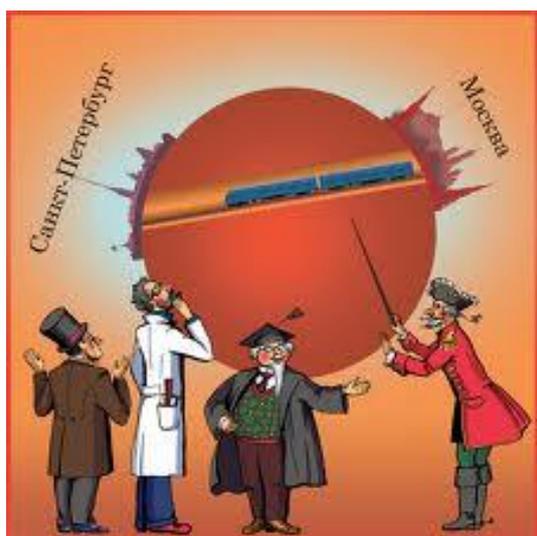


Рис. 5.12. Схема гравитационного поезда

Если такой поезд пустить не в прямолинейном подземном туннеле, а в трубе с выкачанным воздухом, проложенной на поверхности Земли, то он будет называться не

## Занятие 5

гравитационным, а *вакуумным поездом*. И это будет уже не полуфантастический, а, если так можно сказать, *x*-фантастический проект, где *x* стремится к нулю. Вспомним проект Hyperloop (Гиперпетля) Илона Маска, основателя фирмы SpaceX. Можно предположить (пофантазировать), что буква *x* в названии этой фирмы как раз и связана со словосочетанием «*x*-фантастический проект». Но вернемся от фантазий к делу!

В интернете (а рисунок 5.12 взят именно оттуда) «гуляет» множество формул, по которым можно оценить, сколько времени гравитационный поезд будет в пути и какой максимальной скорости он достигнет в середине туннеля. Но мы сейчас не будем считать по этим формулам, а составим баланс сил, действующих на гравитационный поезд, и решим получившееся *дифференциальное уравнение* — создадим функцию, возвращающую положение поезда в туннеле в зависимости от времени. Отказ от готовых формул позволит нам в дальнейшем усложнить модель и приблизить ее к реальности с силами трения.

На рисунке 5.13 изображена простейшая расчётная модель гравитационного поезда: на планете Земля (идеальный шар с радиусом  $R$ ) сделан прямолинейный туннель (пунктирная линия) длиной  $L$ , по которому катится поезд. Начало декартовых координат, от которого будет вестись отсчет, находится в центре Земли.

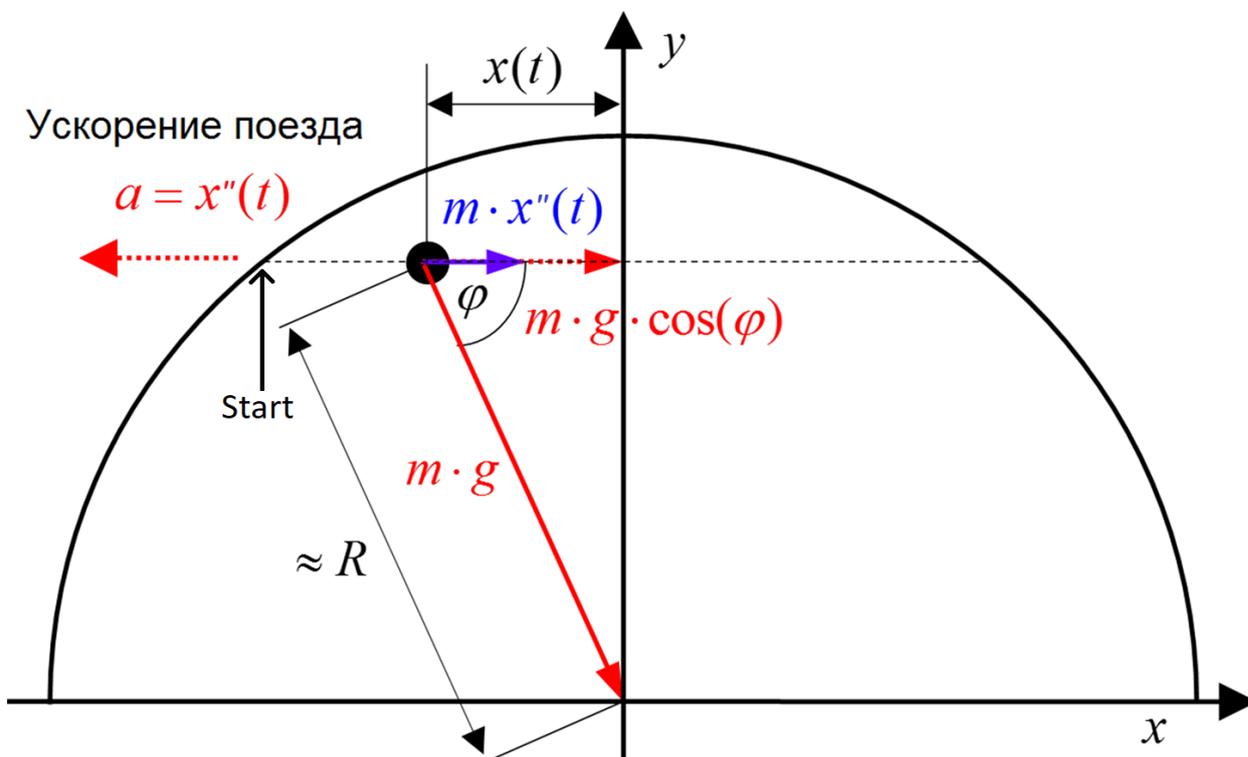


Рис. 5.13. Схема задачи о гравитационном поезде

Несложно доказать, что на наш поезд (на материальную точку, имеющую массу, но не имеющую размеров) вдоль координаты  $x$  будет действовать ускоряющая сила (первая

Занятие 5

половина пути) или тормозящая сила (вторая половина пути), равная весу поезда ( $m \cdot g$ ), умноженному на отношение значения координаты  $x$  к радиусу Земли  $R^6$ . Это положение поезда будет зависеть от времени — будет функцией  $x(t)$ . Если от этой функции взять первую производную  $x'(t)$ , то мы получим скорость поезда, а если вторую производную  $x''(t)$  — то его ускорение. Дифференциальное уравнение движения нашего гравитационного поезда будет иметь вид:

$$m \cdot x''(t) = -m \cdot g \cdot x(t) / R,$$

обусловленный вторым законом Ньютона: сумма сил, действующих на тело, равна произведению его массы на его ускорение.

На рисунке 5.14 показано аналитическое решение этого дифференциального уравнения с помощью пакета SMath с приложением Maple. Фигурные скобки объединяют само уравнение, начальное положение поезда  $x(0) = -L/2$  (это Петербург или Москва), а также его нулевую начальную скорость  $D(x)(0) = 0$ , что на математическом языке означает  $x'(0) = 0$ .

$$x(t) := \text{maple} \left( \text{rhs} \left( \text{dsolve} \left( \left\{ \begin{array}{l} m \cdot \frac{d^2}{dt^2} x(t) = -m \cdot g \cdot \frac{x(t)}{R} \\ x(0) = -\frac{L}{2} \\ D(x)(0) = 0 \end{array} \right\} \right) \right) \right) = -\frac{L \cdot \cos\left(\frac{\sqrt{g \cdot R} \cdot t}{R}\right)}{2}$$

$$\tau := \text{maple} \left( \text{solve} \left( x(t) = -x(0), t \right) \right) = \frac{\pi \cdot R}{\sqrt{g \cdot R}} \quad \pi \cdot \sqrt{\frac{R}{g}}$$

R := 6371 км	g := g <sub>з</sub>	τ = 42.2029 мин	Земля
R := 1737 км	g := 1.62 $\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$	τ = 54.2177 мин	Луна

Рис. 5.14. Аналитическое решение задачи о гравитационном поезде

Решение на рис. 5.14 практически повторяет решение на рис. 5.4. Но синуса в дифференциальном уравнении нет на законных основаниях, а не по причине упрощения: гравитационный поезд в отличие от маятника движется по прямой, а не по дуге окружности.

<sup>6</sup> Это отношение получено в предположении, что значение ускорения свободного падения  $g$  линейно зависит от расстояния от центра Земли. На поверхности Земли оно равно примерно  $9.8 \text{ м/с}^2$ , а в центре Земли нулю. Если туннель для гравитационного поезда будет неглубоким, то допустимо считать, что расстояние от поезда до центра земли равно примерно  $R$  (см. символ «примерно равно» на рис. 5.13), а значение ускорения свободного падения  $g$  будет постоянной величиной. Наше же соотношение  $x/R$  в дифференциальном уравнении годится для всех случаев, вплоть до самого крайнего — до гравитационного лифта, когда туннель проходит через центр Земли. Но это будут уже гиперфантастический проект (х стремиться к бесконечности), если принять во внимание температуру в толще Земли, которую не выдержат стенки туннеля.

## Занятие 5

Из решения на рис. 5.14 видно, что наш  $x$ -фантастический поезд будет в пути что-то около 42 минут. Это значение является некой константой Земли, зависящей только от радиуса планеты и ускорения свободного падения на ней. Путь от дома до дачи, например, по такому туннелю займет такое же время. Для Луны, где гравитационный поезд будет более уместен по причине отсутствия воздуха, эта константа будет равна примерно 54 минутам.

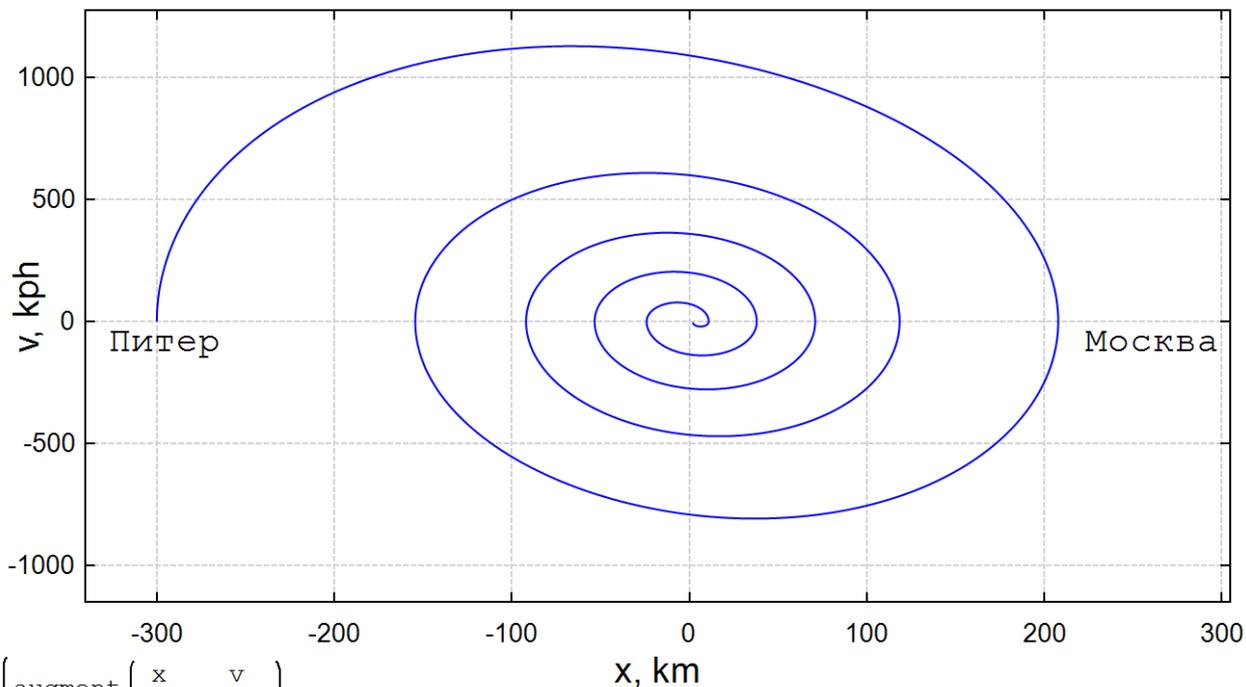
Уравнение, показанное на рисунке 5.14, можно дополнить силой сопротивления воздуха (если считать, что воздух в туннеле все же есть) и силой трения колес о рельсы. Так мы приблизим наш гравитационный поезд к реальным условиям. Поезд же у нас теперь будет не материальной точкой, а реальным физическим объектом с массой  $m$  и поперечным сечением  $S$ . Силу сопротивления воздуха обычно принимают пропорциональной (коэффициент  $k$ ) плотности воздуха  $\rho_{air}$ , помноженной на площадь поперечного сечения поезда  $S$  и квадрат его скорости  $x'(t)$ . Сила трения колес о рельсы пропорциональна (коэффициент трения качения  $f$ ) той составляющей веса поезда, которая параллельна оси  $y$ . Такое усложненное дифференциальное уравнение уже нельзя будет решить аналитически, т. е. нельзя будет получить формулу для функции  $x(t)$ , подобную той, какая показана на рис. 5.14. Это уравнение нужно будет решать численно, приближенно, т. е. генерировать таблицу значений функции  $x(t)$  при разных значениях  $t$ . На рисунке 5.15 показано это решение в среде SMath с построением фазового портрета в виде *аттрактора* – некой спирали, стремящейся с течением времени в начало координат. Если построить графики изменения во времени потенциальной и кинетической энергии нашего гравитационного поезда с силами трения, то график суммы этих энергий уже не будет горизонтальной линией (см. рис. 5.11), а станет плавно уменьшаться до нуля за счет рассеивания потенциальной энергии отклонённого от вертикали маятника и перехода её в тепловую энергию.

Занятие 5

$$R := 6371 \text{ км} \quad m := 20 \text{ т} \quad S := 3 \text{ м}^2 \quad \rho_{air} := 1.25 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \quad k := 0.01 \quad f := 0.001 \quad t_{end} := 420 \text{ мин}$$

$$\left[ \begin{array}{l} v(t) = x'(t) \quad v(0) = 0 \frac{\text{м}}{\text{с}} \quad x(0) = -300 \text{ км} \\ m \cdot v'(t) = -m g_s \cdot \frac{x(t)}{R} - \text{sign}(v(t)) \cdot \left( k \cdot \rho_{air} \cdot S \cdot \frac{v(t)^2}{2} + f \cdot m g_s \cdot \sqrt{1 - \left( \frac{x(t)}{R} \right)^2} \right) \end{array} \right.$$

$$M := \text{rkfixed} \left( \left\{ \begin{array}{l} x(t) \\ v(t) \end{array} \right\}, \left[ \begin{array}{l} M := 1 \text{ кг} \\ t_{end} := 1 \text{ с} \\ t_{end} := 1 \end{array} \right] \right) \quad x := \text{col}(M, 2) \text{ м} \quad v := \text{col}(M, 3) \text{ м/с}$$



```
augment ( x / км , v / км/ч )
augment ( -330 , 0 , "Питер" , 7 , "black" )
augment ( 220 , 0 , "Москва" , 7 , "black" )
```

Рис. 5.15. Численное решение задачи о гравитационном поезде с учетом сил трения

Две силы трения нужно умножить на встроенную в SMath функцию-ступеньку sign, которая возвращает нуль, если её аргумент равен нулю, единицу, если аргумент больше нуля, и минус единицу, если аргумент меньше нуля. Это сделано для того, чтобы силы трения поезда о воздух и колес о рельсы всегда действовали против движения поезда и равнялись нулю при нулевой скорости поезда. Если эту функцию из расчёта убрать, то наша спираль превратится в некое яйцо. Силы трения в одном направлении будут тормозить поезд, а в другом – его подталкивать. Получится однобокий незатухающий маятник. При высоких скоростях поезд будет тормозиться в основном за счет силы

## Занятие 5

встречного ветра, а при низких скоростях — за счет силы трения качения колес<sup>7</sup>.

Формула для силы сопротивления воздуха с её вышеотмеченным коэффициентом  $k$  — это опять же довольно грубое упрощение. Одно дело, когда поезд едет на поверхности, а другое дело в тоннеле. Вспомним поезда метро, которые как поршень выталкивают воздух из тоннеля — из трубы, как говорят в Лондоне.

### 5.3. Электромагнитный маятник

В школе на уроке физики можно продемонстрировать и такой «маятник» — рис. 5.16). В итальянском фильме (рис. 5.1) простой маятник на веревочке раскачивал учитель физики. Электромагнитный маятник (мобиле) раскачивает, вернее, не дает ему заглохнуть батарейка, спрятанная в подставке и дающая ощущение вечного двигателя.



Рис. 5.16. Пример электромагнитного маятника

На занятиях физики отдельно изучают раздел про электричество и раздел про магнетизм, а затем начинают понимать, что такое разделение не совсем правомерно. Дело в том, что электричество и магнетизм — это две стороны одной медали, и они не могут существовать друг без друга. Движущееся электрическое поле порождает магнитное, а движущееся магнитное поле порождает электрическое. Это как при колебании простого маятника (рис. 5.1) — потенциальная энергия порождает кинетическую, а кинетическая энергия порождает потенциальную...

Давайте решим задачу о колебательном электромагнитном контуре, состоящем из катушки индуктивности, конденсатора и резистора.

---

<sup>7</sup> Вспомним приземляющийся самолет, который сначала уменьшает свою скорость за счет тормозных щитков или тормозного парашюта, а затем за счет колесных тормозов.

## Занятие 5

На рисунке 5.17 показана схема электромагнитного контура и отдельные его элементы с геометрическими ( $h$ ,  $r$ ), магнитными ( $\mu$ ) и электрическими ( $\varepsilon$ ) параметрами. Давайте составим и решим дифференциальное уравнение такого контура, предварительно рассчитав индуктивность катушки и емкость конденсатора. И решим задачу с использованием единиц физических величин и встроенных в SMath физических констант.

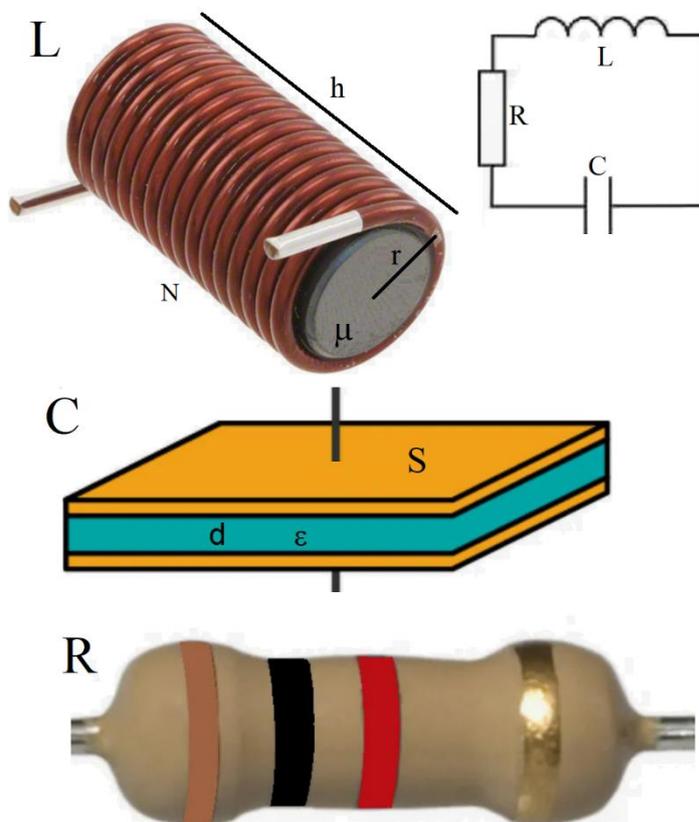


Рис. 5.17. Элементы колебательного контура: катушка индуктивности, конденсатор и резистор

На рисунке 5.18 показан расчёт индуктивности катушки  $L$ , а на рисунке 5.19 – емкости конденсатора  $C$ . Расчёты предельно упрощены. Их "изюминка" – это работа с магнитной и электрической постоянными ( $\mu_0$  и  $\varepsilon_0$ ), встроенными в среду SMath. Исходные величины  $\mu$  и  $\varepsilon$  – это относительные диэлектрическая и магнитная проницаемости.

Занятие 5

$$\mu := 100 \quad N := 2000 \quad h := 20 \text{ см} \quad r := 30 \text{ мм}$$

$$\mu_0 = 1,2566 \cdot 10^{-6} \frac{\text{Гн}}{\text{м}}$$

$$L := \mu \mu_0 \cdot N^2 \cdot \pi \cdot \frac{r^2}{h} = 7,1061 \text{ Гн}$$

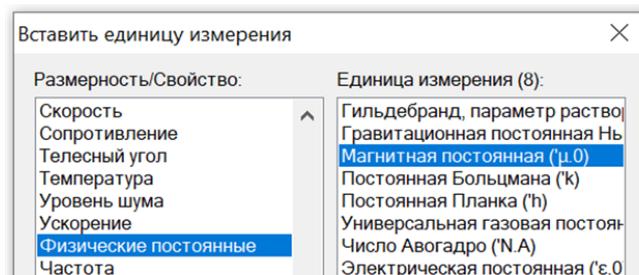


Рис. 5.18. Расчёт индуктивности катушки

$$S := 100 \text{ см}^2$$

$$d := 5 \text{ мм}$$

$$\epsilon := 1,0006$$

$$\epsilon_0 = 8,8542 \cdot 10^{-12} \frac{\text{Ф}}{\text{м}}$$

$$C := \epsilon \epsilon_0 \cdot \frac{S}{d} = 17,719 \text{ пФ}$$

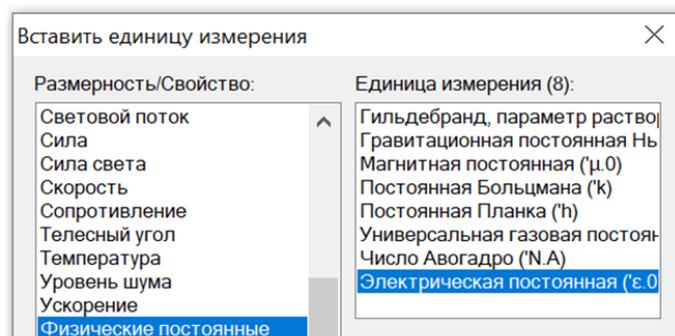


Рис. 5.19. Расчёт ёмкости конденсатора

Определив значения индукции катушки (рис. 5.18) и емкости конденсатора (рис. 5.19), а также задав значение сопротивления резистора R (сто килоом), несложно построить график изменения во времени заряда в конденсаторе – см. рис. 5.20. Используется численный метод решения задачи Коши для обыкновенного линейного дифференциального уравнения второго порядка, в которое заложен второй закон Кирхгофа и закон Ома<sup>8</sup> для полной цепи. Но можно условно говорить о трех отдельных законах Ома – для конденсатора, для резистора и для катушки – для трех слагаемых левой части нашего дифференциального уравнения, записанного вместе с начальными условиями в рамке на рис. 5.20. Его правую часть можно сделать ненулевой – ввести в схему источник ЭДС. Пока там именно ноль вольт, а не просто ноль. Эта рамка возникает на рабочем поле SMath после того, как отдана команда меню Вставка / Mathcad Блок,

<sup>8</sup> Школьная прибаутка: "Не знаешь закона Ома – сиди дома!" Напряжение – это сопротивление, умноженное на ток. Первая производная заряда по времени – это ток (см. второе слагаемое в дифференциальном уравнении на рис. 5.20).

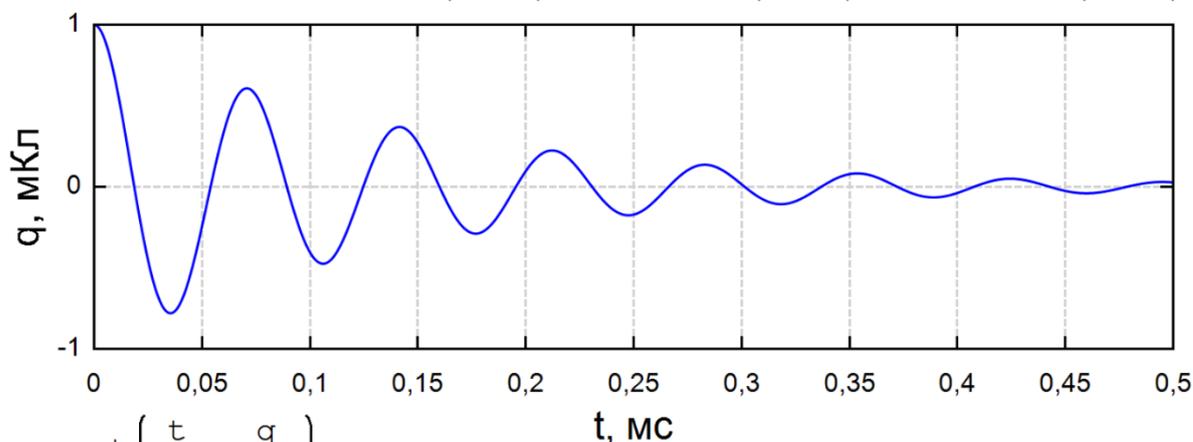
Занятие 5

показанная под рамкой на рис. 5.20. Эта позиция меню в свою очередь появляется после подгрузки соответствующего плагина.

$$C = 17,719 \text{ пФ} \quad R := 100 \text{ КОМ} \quad L = 7,1061 \text{ Гн} \quad t_{\text{end}} := 0,5 \text{ мс}$$

$$q(0 \text{ с}) = 1 \text{ мкКл} \quad q'(0 \text{ с}) = 0 \text{ А} \quad \frac{q(t)}{C} + R \cdot q'(t) + L \cdot q''(t) = 0 \text{ В}$$

```
M := rkfixed(q(t); t_end; [ M:=1 кг := 1 с := 1 А := 1 ]
              1000)
cols(M) = 3
rows(M) = 1001
t := col(M; 1) с
q := col(M; 2) Кл
I := col(M; 3) А
```



$$\text{augment} \left( \frac{t}{\text{мс}}; \frac{q}{\text{мкКл}} \right)$$

$$q_u(t) := q(t) \text{ Кл} \quad q_u(0,25 \text{ мс}) = -0,1711 \text{ мкКл}$$

Рис. 5.20. Расчёт колебательного контура

Аргументом Mathcad-блока служит функция `rkfixed` с тремя аргументами. Первый аргумент – это искомая функция  $q(t)$ , возвращающая заряд конденсатора в зависимости от времени. Второй аргумент – это значение отрезка времени, на котором ведется численное решение задачи  $t_{\text{end}}$ . Третий аргумент (число разбиений отрезка численного интегрирования) не обязательный. Если он отсутствует, то число разбиений равно 1000. Мы нарушили это умолчание и записали в этом аргументе число 1000, добавив к нему матрицу с одной строкой и присвоили в ней единицу (1) единицам длины, массы, времени и силы тока. Тем самым мы обошли ограничение, связанное с тем, что при численном решении дифференциального уравнения в среде SMATH нельзя работать с единицами физических величин. Функция `rkfixed` возвращает матрицу, состоящую из трех столбцов (`cols`) и 1001 строки (`rows`). Столбцы хранят рассчитанные дискретные

## Занятие 5

значения времени  $t$ , заряда  $q$  и производной заряда по времени – тока в цепи  $I$ . Эти значения изымаются функцией `col` в три вектора, которые отображаются графически – см. рис. 5.20 и 5.21. Этим векторам возвращается их размерность умножением на соответствующие единицы времени (с – секунда), заряда (Кл – кулон) и силы тока (А – ампер).

Функция `rkfixed` попутно генерирует и функцию через интерполяцию дискретных значений – см. два последних оператора на рис. 5.20.

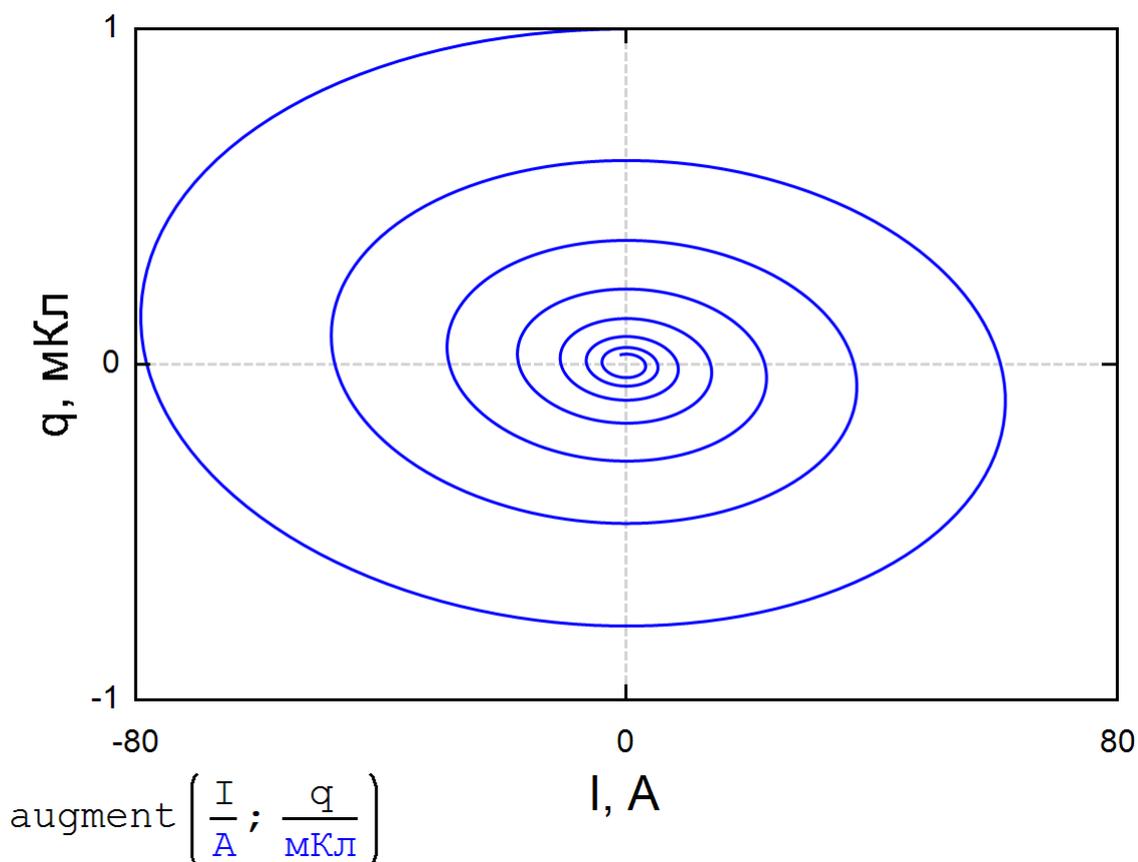
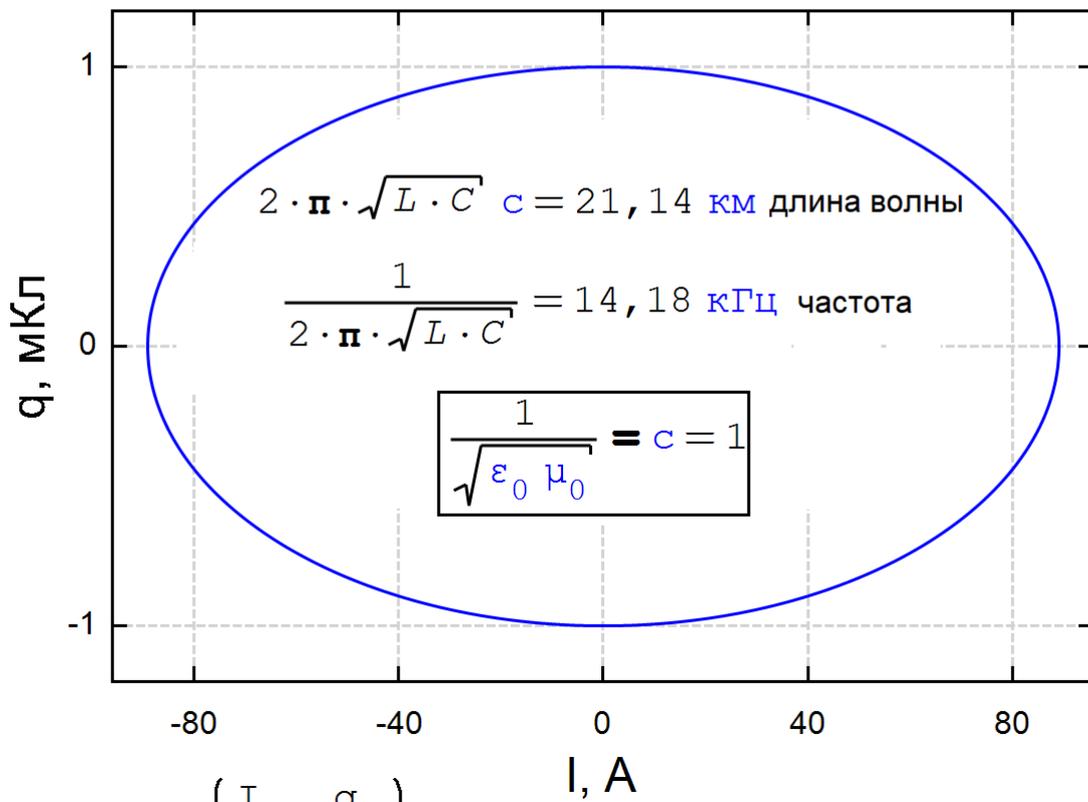
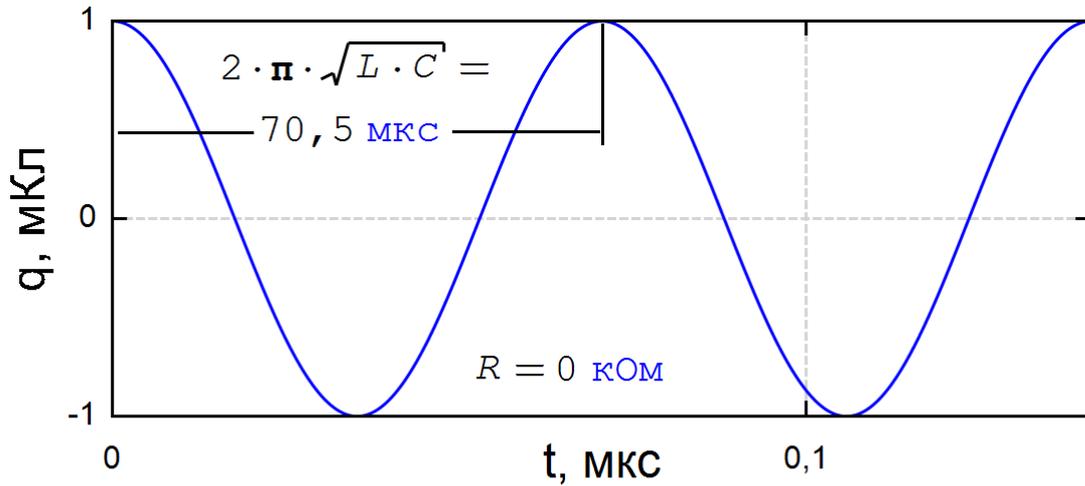


Рис. 5.21. Фазовый портрет колебательного контура

Если электрическое сопротивление  $R$  сделать нулевым, то мы получим синусоиду, отображающую гармоническое незатухающее колебание в электромагнитном контуре с периодом примерно 70 микросекунд – рис. 5.22. Фазовый портрет при этом представляет собой замкнутую выпуклую кривую, которую можно было бы назвать эллипсом, если бы по осям были бы одинаковые физические величины – расстояние.



augment  $\left( \frac{I}{A}; \frac{q}{\text{MKЛ}} \right)$

Рис. 5.22. График и фазовый портрет незатухающего колебательного контура

Дифференциальное уравнение, показанное в рамке на рис. 5.20, само по себе красиво и предельно лаконично: первая константа ( $C^{-1}$ ) умножается на функцию одного аргумента, вторая константа ( $R$ ) умножается на первую производную этой функции, а третья константа ( $L$ ) умножается на вторую производную. Первая константа – это величина обратная емкости, называемая эластанс (эластичность). Единица эластичности – это дараф

Занятие 5

(daraf – farad в обратную сторону). Как тут не вспомнить Шарикова из «Собачьего сердца» Михаила Булгакова, читавшего вывески задом наперед: абырвалг-главрыба!

А вот как, к примеру, выглядит аналитическое решение нашего дифференциального уравнения колебательного контура (рис. 5.23), полученное с помощью математического пакета Maple и адаптированное под SMath.

$$q(t) := \frac{q_0 \cdot \left( C \cdot R^2 + \sqrt{C^2 \cdot R^2 - 4 \cdot C \cdot L} \cdot R - 4 \cdot L \right) \cdot e^{-t \cdot \left( C \cdot R - \sqrt{C^2 \cdot R^2 - 4 \cdot C \cdot L} \right) / (2 \cdot C \cdot L)}}{2 \cdot \left( C \cdot R^2 - 4 \cdot L \right)} + \frac{q_0 \cdot \left( C \cdot R^2 - \sqrt{C^2 \cdot R^2 - 4 \cdot C \cdot L} \cdot R - 4 \cdot L \right) \cdot e^{-t \cdot \left( C \cdot R + \sqrt{C^2 \cdot R^2 - 4 \cdot C \cdot L} \right) / (2 \cdot C \cdot L)}}{2 \cdot \left( C \cdot R^2 - 4 \cdot L \right)}$$

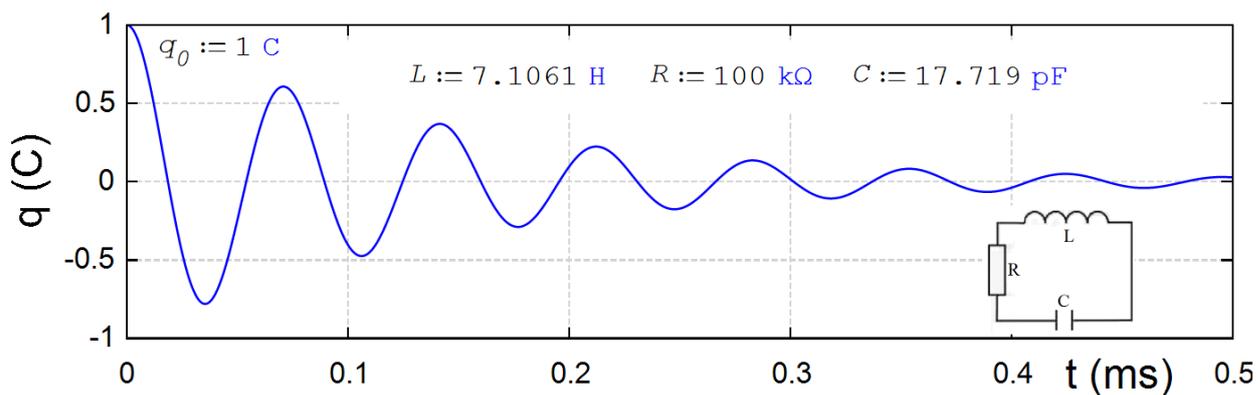


Рис. 5.23. Аналитическое решение дифференциального уравнения колебательного контура

Если в решении в среде Maple сопротивление резистора сделать нулевым (см. рис. 5.24), то мы получим уже упомянутое гармоническое колебание.

$$ODE := L \cdot q''(t) + 0 \cdot q'(t) + \frac{q(t)}{C} = 0$$

$$ODE := LD^{(2)}(q)(t) + \frac{q(t)}{C} = 0$$

$$ICs := q(0) = q0, D(q)(0) = 0$$

$$ICs := q(0) = q0, D(q)(0) = 0$$

$$dsolve(\{ICs, ODE\})$$

$$q(t) = q0 \cos\left(\frac{t}{\sqrt{C} \sqrt{L}}\right)$$

Рис. 5.24. Пример аналитического решения дифференциального уравнения в среде Maple

Если описанное дифференциальное уравнение, наоборот, усложнить – учесть нелинейность (например, зависимость сопротивления резистора от силы протекающего в нём тока или ёмкости конденсатора от приложенного к нему напряжения и др.), то аналитического решения можно и не получить. Численное же решение будет получено.

Колебательные контуры с их резонансами когда-то были основой радиотехники. Передающая антенна – это не что иное, как некий своеобразный развернутый колебательный контур. В настоящее время радио почти полностью перешло на “цифру”, пройдя славный путь от радиоламп через транзисторы к интегральным микросхемам. Одновременно в математике произошёл переход от аналитических решений дифференциальных уравнений к численным. Но в последнее время наблюдается некий радиотехнический ренессанс – возрождение, например, ламповых усилителей (рис. 5.25) для виниловых проигрывателей. В главе 2 мы упомянули программистский ренессанс – возрождение старых, добрых, понятных алгоритмов решения задач на компьютере.



Рис. 5.25. Образец современного лампового радиоприемника

Эти изящные цветомузыкальные установки генерируют не только звук, но и приятное ностальгическое мигание теплого света катода электронных ламп. Раньше их прятали в чреве радиоприемников, а теперь выставляют наружу не только по эстетическим, но и по теплотехническим соображениям – для лучшего охлаждения. Кроме того, для большего эффекта такие устройства дополняют аналоговыми, а не цифровыми индикаторами (см. рис. 5.25), через стекло которого видно, как поворачивается катушка индуктивности, а вместе с ней и стрелка прибора. Можно ожидать появления и ламповых видеомагнитофонов – катушечных и кассетных.

Есть меломаны, утверждающие, что аналоговый звук ламп или транзисторов намного лучше цифрового звука микросхем. Но из всех меломанов отличить цифровой звук от аналогового смог только... осциллограф. Есть, правда, утверждение, что при ядерном взрыве все транзисторы и микросхемы будут уничтожены, а лампы останутся в строю!

Радиотехнический ренессанс принимает и такую интересную форму. Появились компьютерные программы, позволяющие на экране дисплея собирать... схемы ламповых или полупроводниковых радиоприёмников с резисторами, конденсаторами, катушками (рис. 5.17), лампами (рис. 5.25), транзисторами... Точнее, с их цифровыми двойниками. Но не в целях проектирования радиотехнических устройств, а в плане ностальгии по временам, когда мы собирали (паяли) реальные детекторные, ламповые и транзисторные приемники... Если говорить об оптике – о ещё одном разделе физики (см. главу 13), то там ностальгия проявляется в возврате к пленочным и кассетным фотоаппаратам. Автору посчастливилось паять детекторные и транзисторные приемники, снимать на пленочном фотоаппарате, а

## Занятие 5

затем проявлять пленку и печатать фотографии, возясь с химреактивами, и делать много того, чего лишены современные подростки. Чуть не забыл ещё про одно удовольствие – ходить в библиотеку, рыться в книгах и находить нужную информацию. Но появились новые увлечения и радости – решение, например, дифференциальных уравнений на компьютере и написание книг про это.

Одной из целей перехода от аналоговой радиотехники к цифровой было и сокращение энергопотребления, а также защита от перегрева – снижение температуры. Затухающее колебание, показанное на рис. 5.20 и 5.21, связано с тем, что начальная электрическая энергия заряженного конденсатора постепенно переходит в тепловую энергию. Температура резистора  $R$  повышается и тепло передаётся в окружающую среду. Если вернуться к маятнику, показанному на рис. 5.1, то там потенциальная энергия приподнятого камня на веревочке также постепенно переходит в тепловую энергию за счет трения маятника о воздух.

Но главной целью перехода от аналоговой радиотехники к цифровой было, конечно, уход от шума (помех) старых радиоприемников. Одним из решений этой проблемы был переход от амплитудной модуляции (АМ) к частотной (FM) – к моделированию передаваемого сигнала не амплитудой (см. рис. 5.20), а частотой. Вот какие термины помнит автор, незнакомые современной молодежи, слушающей "Радио FM" через смартфон!

### Дивертисмент. Прыжок на парашюте из стратосферы

Давайте пустим в свободный полет с самолета или воздушного шара (стратостата) парашютиста и посмотрим (рассчитаем), сколько он будет лететь и как будет меняться его скорость. Постановка этой задачи возникла под влиянием знаменитого прыжка с парашютом из стратосферы австрийца Феликса Баумгартнера (<http://lenta.ru/news/2014/02/02/video>). Такой прыжок повторил Алан Юстас – исполнительный директор фирмы Google (<http://www.profile.ru/mir/item/87941-ispolnitelnyj-direktor-google-pobil-rekord-vysoty-dlya-pryzhkov-iz-stratosfery>).

Рассмотрим такую математическую модель: парашютист в начале полета — это шар с радиусом 60 см и массой 100 кг (рис. 5.26). После раскрытия парашюта на высоте 3 км он превращается в шар с радиусом 5 метров. Масса парашютиста не меняется. Прыгает парашютист с высоты 30 км. В расчете задействована функция пользователя  $\rho(h)$ , возвращающая значения плотности воздуха в зависимости от высоты (см. [https://ru.wikipedia.org/wiki/Плотность\\_воздуха](https://ru.wikipedia.org/wiki/Плотность_воздуха)). Коэффициент  $k$  фигурирует в формуле

Занятие 5

силы сопротивления воздуха (см. также рис. 5.6а). Переменная  $t$  задаёт интервал времени, на котором будет численно решаться задача с разбивкой на  $n$  отрезков.

$$\begin{aligned}
 m &:= 100 \text{ kg} & h_0 &:= 30 \text{ km} & h_1 &:= 3 \text{ km} \\
 k &:= 1 & t &:= 11 \text{ min} & n &:= 1000 \\
 d(h) &:= 60 \text{ cm} + 4.4 \text{ m} \cdot h < h_1 & S(h) &:= \pi \cdot \left( \frac{d(h)}{2} \right)^2 \\
 \rho(h) &:= \left\{ \begin{array}{l} k_T := 0.0065 \frac{\text{K}}{\text{m}} \\ T_0 := 288.15 \text{ K} \\ T := T_0 - k_T \cdot h \\ M := 29 \frac{\text{g}}{\text{mol}} \\ p := 101325 \text{ Pa} \cdot \left( 1 - \frac{k_T \cdot h}{T_0} \right)^{\frac{g_e \cdot M}{R_m \cdot k_T}} \\ \frac{p \cdot M}{R_m \cdot T} \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

Рис. 5.26. Начало решения задачи о парашютисте

Нюансы численного решения дифференциального уравнения с единицами физических величин (рис. 5.27) мы рассмотрели выше – см., например, рис. 5.20.

Занятие 5

Mathcad-block

$$m \cdot h''(t) = k \cdot S(h(t)) \cdot h'(t)^2 \cdot \rho(h(t)) - m g_e \quad h(0 \text{ s}) = h_0 \quad h'(0 \text{ s}) = 0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$M := \text{Rkadapt} \left( h(t), t, \begin{bmatrix} m := 1 & s := 1 & kg := 1 \\ n \end{bmatrix} \right)$

$t := \text{col}(M, 1) \text{ s} \quad h := \text{col}(M, 2) \text{ m} \quad v := \text{col}(M, 3) \frac{\text{m}}{\text{s}}$

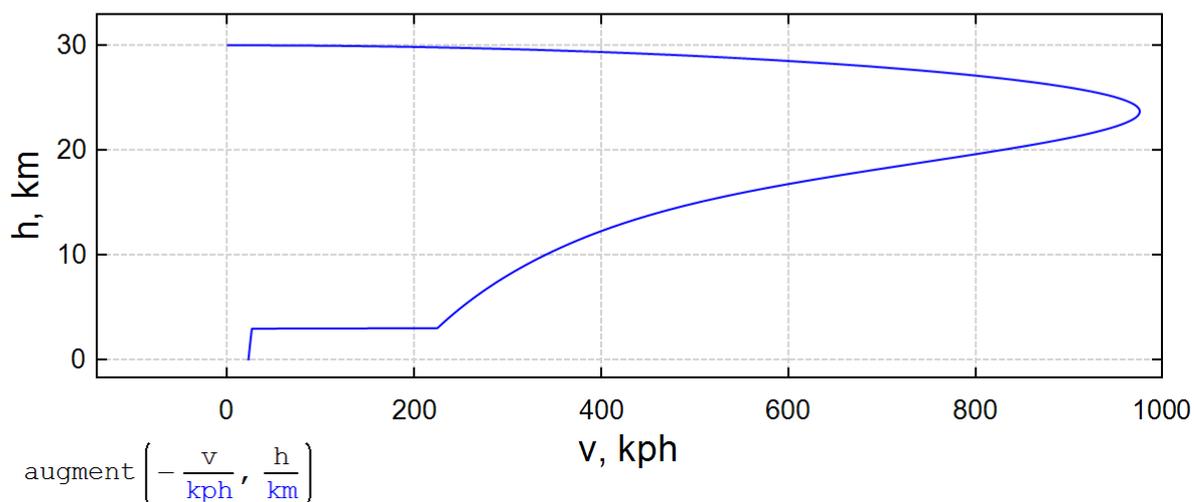
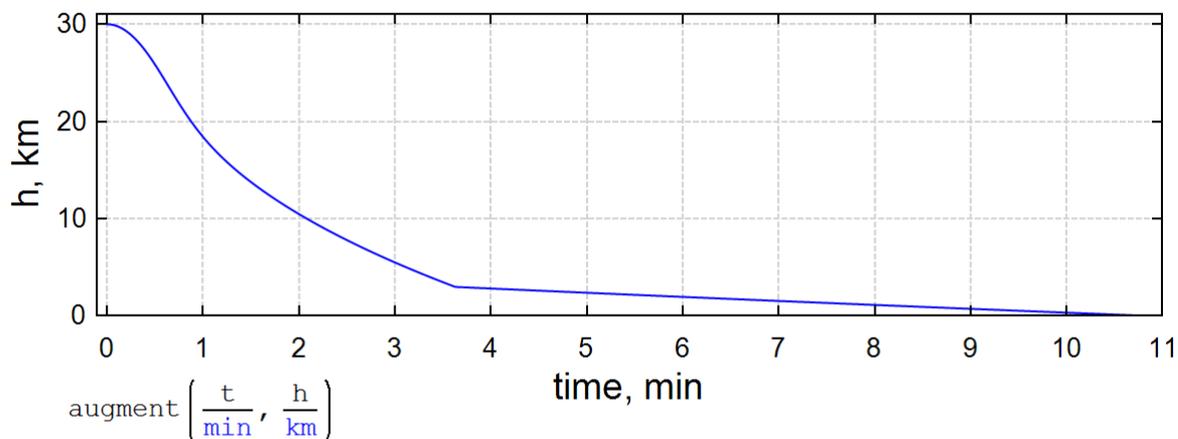


Рис. 5.27. Окончание решения задачи о парашютисте

Задача о парашютисте обсуждалась на форуме пользователей SMath – см. [https://en.smath.com/forum/yaf\\_postsm86019\\_Skydiver.aspx](https://en.smath.com/forum/yaf_postsm86019_Skydiver.aspx).

Казалось бы, что полет парашютиста не имеет никакого отношения к теме этого занятия – к колебаниям. Но наш парашютист может не приземлиться, а... приводниться и на поверхности воды вести себя как затухающий маятник – см. на рис. 5.28, 5.29 и 5.30.



$$m := 1 \quad cm := \frac{m}{100} \quad s := 1 \quad kg := 1 \quad g := 9.81 \frac{m}{s^2}$$

$$r := 30 \text{ cm} \quad \rho_{man} := 950 \frac{kg}{m^3} \quad V := \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 = 0.1131 \text{ m}^3$$

$$m := V \cdot \rho_{man} = 107.4 \text{ kg} \quad S := \pi \cdot r^2 = 0.2827 \text{ m}^2$$

$$h := 10 \text{ m} \quad vx_0 := 3 \frac{m}{s} \quad vy_0 := 1 \frac{m}{s} \quad k := 1 \quad t_{end} := 30 \text{ s} \quad n := 3000$$

$$\rho(h) := \begin{cases} 1.225 \frac{kg}{m^3} & \text{if } h > 0 \text{ m} \\ 1000 \frac{kg}{m^3} & \text{otherwise} \end{cases}$$

**cases** cases(...) - Define piecewise functions. Custom Functions



$$\left[ \begin{array}{l} vx(t) = x'(t) \quad x(0 \text{ s}) = 0 \text{ m} \quad vx(0 \text{ s}) = vx_0 \\ vy(t) = y'(t) \quad y(0 \text{ s}) = h \quad vy(0 \text{ s}) = vy_0 \\ m \cdot vx'(t) = -k \cdot \rho(y(t)) \cdot S \cdot vx(t) \cdot |vx(t)| \\ m \cdot vy'(t) = g \cdot V \cdot \rho(y(t)) - k \cdot \rho(y(t)) \cdot S \cdot vy(t) \cdot |vy(t)| - g \cdot m \end{array} \right.$$

$$M := \text{Rkadapt} \left( \begin{array}{l} x(t) \\ y(t) \\ vx(t) \\ vy(t) \end{array}, t_{end}, n \right)$$

$$t := \text{col}(M, 1) \quad x := \text{col}(M, 2) \quad y := \text{col}(M, 3) \quad vy := \text{col}(M, 5)$$

Рис. 5.28. Начало решения задачи о прыгуне в воду

В решении, показанном на рисунке 5.28, применён другой подход к единицам измерения. Они глушатся не локально в третьем аргументе функции Rkadapt (рис. 5.27), нейтрализуются глобально перед расчётом – см. Область наверху рис. 5.28. При этом функция Rkadapt работает не одним дифференциальным уравнением первого порядка (рис. 5.27), а с четырьмя уравнениями первого порядка. Первые два уравнения – это математическая запись того, что скорость – это производная пути по времени.

Занятие 5

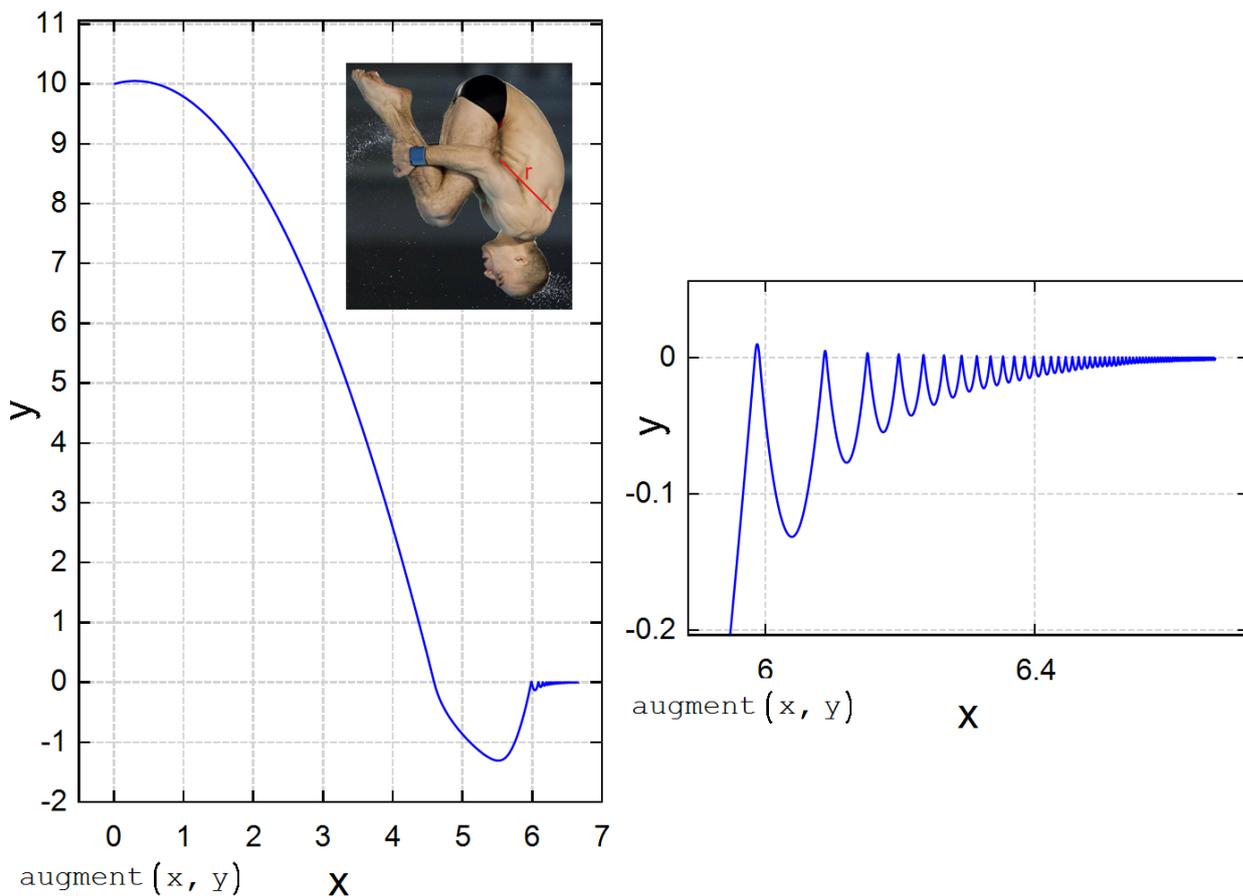


Рис. 5.29. Продолжение решения задачи о прыгуне в воду – построение траектории прыжка в воду

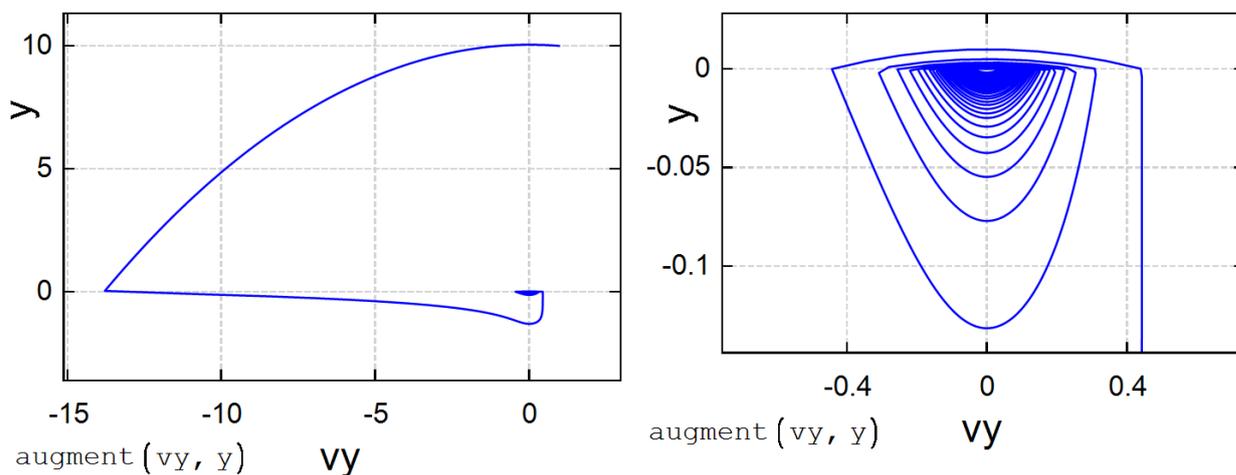


Рис. 5.30. Окончание решения задачи о прыгуне в воду – построение фазового портрета

Задания читателям:

1. Воспроизвести расчёты, показанные на этом занятии.

## Занятие 5

2. Создать расчёт затухающего маятника на эластичной подвеске.
3. Создать модель гравитационного поезда, едущего не по прямолинейному туннелю, а по дуге окружности с радиусом, равным двум радиусам (диаметру) Земли.

## Литература:

1. В. Ф. Очков, В. Л. Чудов, Писасич Катарина, Н. Г. Герасимов, Е. В. Никульчев. Три нелинейности маятника, или Улыбка фазового портрета // Cloud of Science. 2020. Т. 7 С. 6-39 (<http://www.twt.mpei.ac.ru/ochkov/Pendulum.pdf>)
2. Очков В.Ф. Маятник-сердце // Физика в школе № 6, 2022 С.46-54 (<http://twt.mpei.ac.ru/ochkov/OOO.pdf>)
3. Очков В.Ф., Писачич К. Путешествие из Петербурга в Москву или Свет в конце туннеля // Информатика в школе. №4. 2015. С. 58-61 (<http://twt.mpei.ac.ru/ochkov/Tunnel-maket.pdf>)
4. Valery Ochkov, Katarina PISAČIĆ. Journey from St. Petersburg to Moscow or Model of Gravity Train in Mathcad // Technical Journal University North Croatia, Vol. 9, No. 1. pp. 1-5 (<http://twt.mpei.ac.ru/ochkov/SPB-Moscow-Train.pdf>)