

Глава 7

Глава 7. Задача коммивояжера

Есть у Чехова довольно забавный рассказ «Новогодняя пытка». Текст короткий – его стоит прочитать [1] или прослушать [2], а потом вернуться к этой главе. В рассказе описано, как жена со скандалом выгоняет из дома мужа делать визиты к родственникам и друзьям – поздравить их с Новым годом: «Ишь что выдумал: визитов не делать!». Для посещений нужно было в Москве проехать по такому маршруту: Zubovskiy bulvar (start – место, где жил герой рассказа), Krasnye kazarmy v Lefortovo (в этом районе находится alma mater автора книги), Xamovniki, Nizhegorodskiy vokzal¹, Krestovskaya zastava, Kaluzhskie vorota и Sokolnicheskaya rosha. А в конце поездки вернуться домой на Zubovskiy bulvar.

Автор попробовал заказать такую круговую поездку в интернете через одно из приложений по заказу такси. Вот, что у него получилось – см. рис. 7.1.

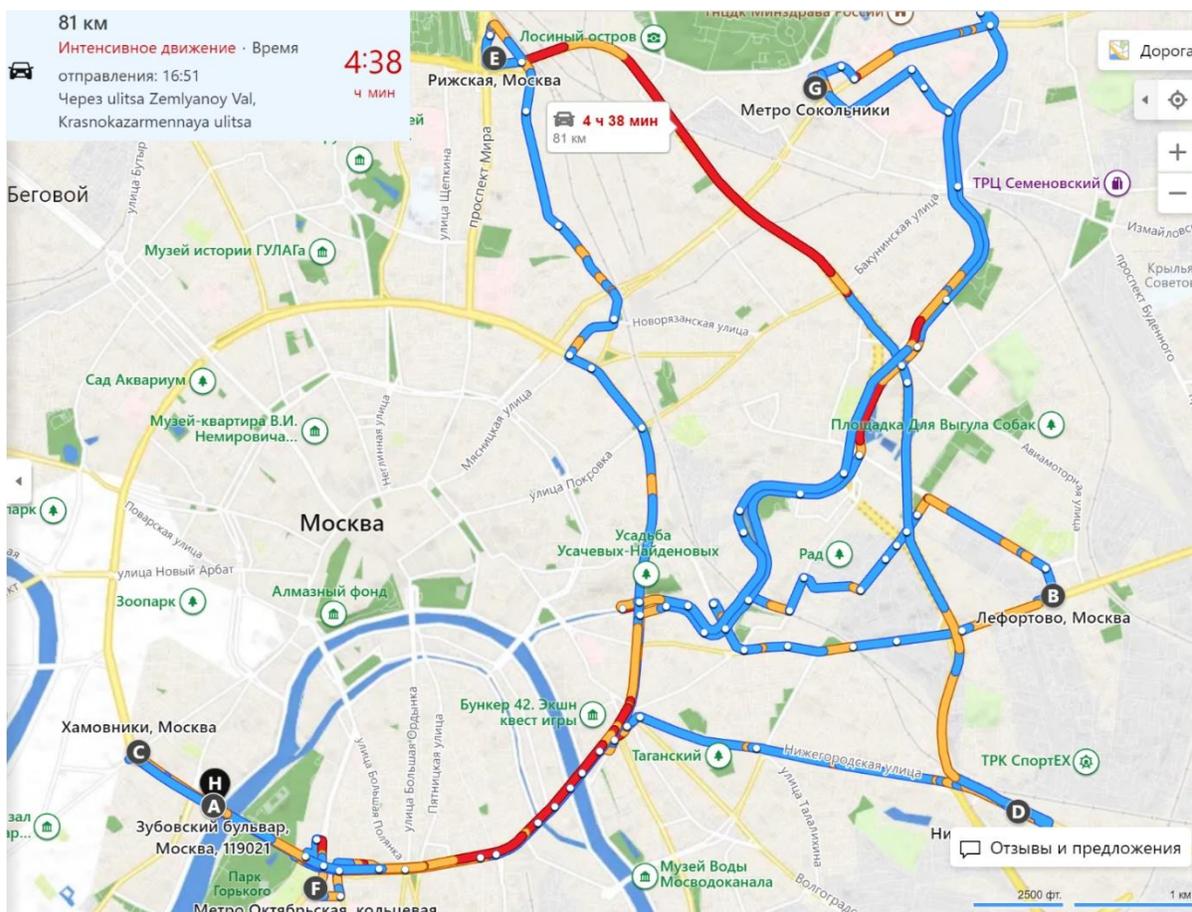


Рис. 7.1. Маршрут такси для новогодних визитов

Буквами А-Н на рис.7.1 обозначены места планируемых визитов в порядке их перечисления в рассказе Чехова. Точки А и Н – это фактически одна точка – начало и конец маршрута на Zubovskom bulvare.

¹ Это был временный вокзал для железной дороги Москва – Нижний Новгород. Ее позже продлили до Курского вокзала, а сам Нижегородский вокзал снесли. От него осталось название Нижегородской улицы. Крестовская застава была в районе теперешней станции московского метро Рижская, а Калужские ворота – в районе станции Октябрьская, которая раньше так и называлась – Калужской. Современная станция метро Калужская сейчас находится в другом месте.

Глава 7

Сине-желто-красные линии на рис. 7.1 – это планируемое движение такси на расстояние 81 км за 4 часа 38 минут (см. левый верхний угол рисунка) со средней скоростью 17.5 км/ч.

Если же отказаться от такси и передвигаться по городу пешком (см. синие пунктирные кружочки на рис. 7.2), то расстояние уменьшится до 62 км, но на него придется затратить уже 12 часов 19 минут со средней скоростью 5 км в час.

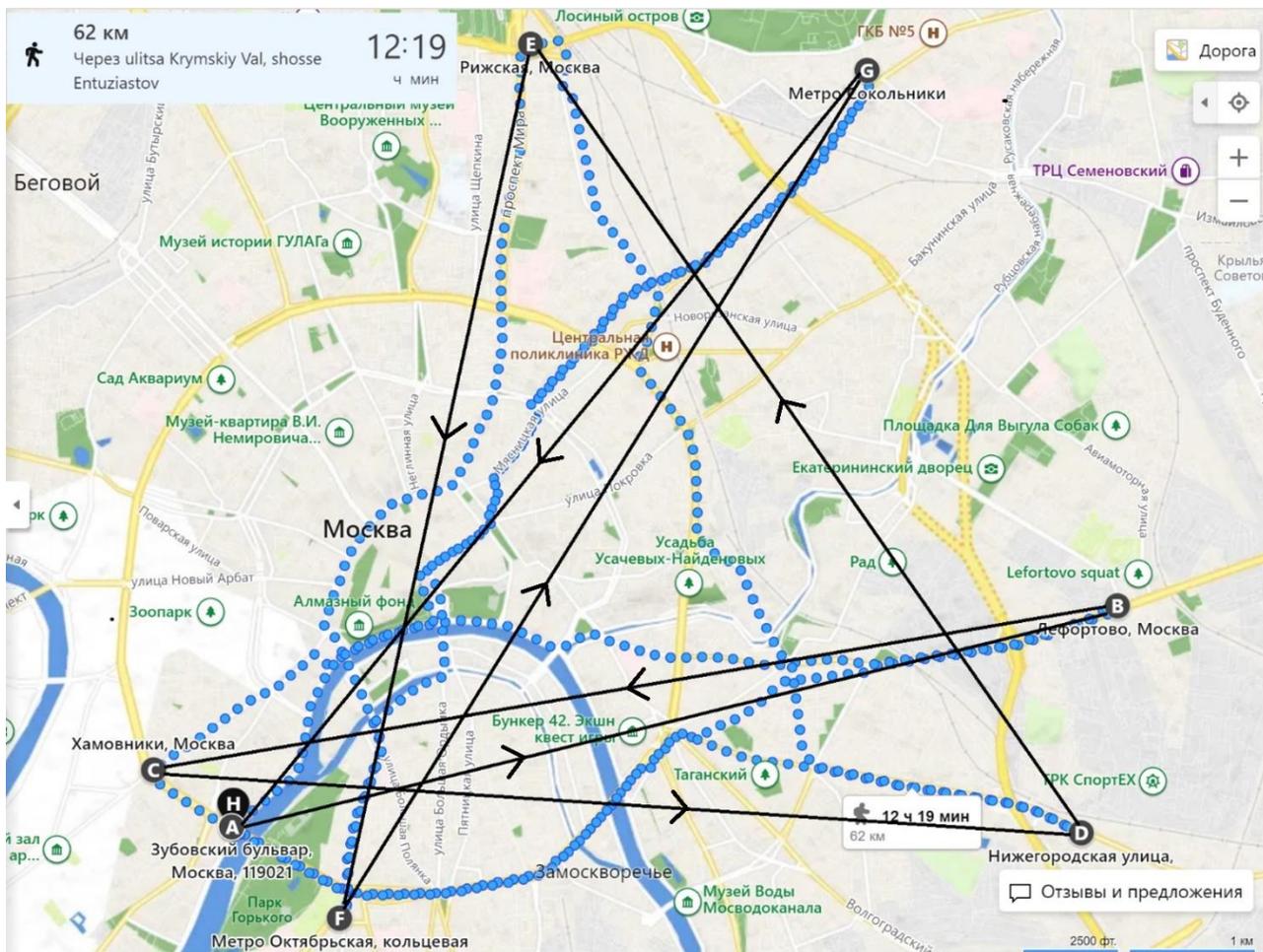


Рис. 7.2. Пеший и вертолетный маршрут для новогодних визитов

Черные прямые линии со стрелками на рис. 7.2 обозначают следующее. Давно уже ведутся разговоры о том, что в Москве и других крупных городах России вот-вот появится воздушное такси, которому не страшны пробки (см. красные участки линий на рис. 7.1) и которое будет летать по прямым маршрутам. Таким способом передвижения мог бы воспользоваться герой рассказа Чехова, если б дожил до таких времен. А вот еще один не такой уж фантастический сценарий. Герой рассказа помещает свои визитные карточки на квадрокоптер, который опять же по прямым линиям без пробок облетает друзей и знакомых с новогодними посланиями. А можно заодно послание дополнить и небольшим подарком!

В старой России по праздникам чиновники приходили к начальнику домой и расписывались в специальном листе у швейцара². Люди, посещавшие с визитом себе равных, но не заставшие хозяина

² В рассказе Чехова «Тайна» подпись неизвестного в листе у швейцара имела очень интересные и комичные последствия. Читатель, загляни и этот рассказ!

Глава 7

дома, оставляли свои визитки в прихожей. Отсюда, кстати, и идет название этих маленьких белых картонных прямоугольников. Вот, что можно прочесть у Гоголя в «Мертвых душах»: *«Визитная карточка, будь она писана хоть на трефовой двойке или бубновом тузе, но вещь была очень священная. Из-за нее две дамы, большие приятельницы и даже родственницы, перессорились совершенно, именно за то, что одна из них как-то манкировала контрвизитом. И уж как ни старались потом мужья и родственники примирить их, но нет, оказалось, что всё можно сделать на свете, одного только нельзя: примирить двух дам, поссорившихся за манкировку визита.»*³

Сразу видно, что маршруты поездки на такси (рис. 7.1), пешего путешествия или полетов квадрокоптера (рис. 7.2) далеко не оптимальные. Можно, конечно, предположить, что время визитов было оговорено заранее. Этим и объясняются такие дальние переезды из одного конца города в другой. Но скорее всего дело обстояло так. Муж с новогодним похмельным синдромом (смотрите или слушайте рассказ Чехова) получил от жены список тех, кого нужно посетить. Супруг, особо не раздумывая, тупо глянул в записку и отдавал нужные приказания извозчикам⁴. Рассказ, кстати, оканчивается описанием еще одного скандала, который жена закатила мужу из-за перерасхода денег на поездку (5 рублей 80 копеек). Поездка на такси в наше время будет стоить по оценке компьютерного приложения (рис. 7.1 и 7.2) порядка пяти тысяч.

А вот как поступил герой романа Л.Н. Толстого «Воскресение» [3]: *«Сообразив, куда прежде, куда после ехать, чтоб не возвращаться, Нехлюдов прежде всего направился в сенат»*. Нехлюдов в Петербурге занимался не пустыми визитами – он обивал пороги государственных учреждений в надежде изменить приговор Катюше Масловой – жертвы похоти и подлости самого Нехлюдова, а потом, вдобавок, и судебной ошибки. Нехлюдов, в отличие от героя рассказа Чехова, перед своим «турне» попытался как-то вчерне решить *задачу коммивояжера*. Такую задачу, кстати, в наше время решают доставщики еды на велосипедах с желтыми квадратными сумками за плечами.

А можно ли эту задачу решить перебором? В статье Википедии «Задача коммивояжера» можно прочесть, что решение этой проблемы для 14 крупнейших городов Германии методом перебора потребует расчета 43 589 145 600 вариантов. Другая крайность – решение задачи коммивояжера простейшим жадным методом ближайшего соседа. А давайте скомбинируем эти два метода – будем менять стартовую точку коммивояжера и находить для нее путь по алгоритму ближайшего соседа. Перебрав все точки, можно найти такую, пройденное расстояние от которой будет минимальным. Марле-решение красиво, но непонятно. Неизвестно, как все это делается. Давайте рассмотрим понятную программу.

³ Обширное цитирование классиков русской литературы можно прокомментировать еще одной цитатой из чеховского водевиля «Свадьба»: *«Они хотят свою образованность показать и всегда говорят о непонятном»*. Но автор заботится и о гуманитаризации инженерного образования... Ну и эрудицию свою, конечно, тоже показать хочется не только в SMath, но и в литературе.

⁴ Сейчас подобные записки жены пишут перед тем, как отправить мужа в магазин. Если это огромный супермаркет, то проблема оптимизации маршрута в нем тоже выливается в задачу коммивояжера, точнее, в задачу странствующего покупателя, а не странствующего продавца.



Рис. 7.8. Иллюстрация из Википедии: путешествие коммивояжера по крупнейшим городам Германии

На рис. 7.9 показана программа SMath-решения задачи коммивояжера с анимацией через комбинирование метода ближайшего соседа и метода перебора. В свернутой области Расчет хранятся шесть вложенных областей, содержание которых будет описано ниже. Внизу рис. 7.9 показаны два кадра анимации пути коммивояжера через 14 городов Германии.

Глава 7

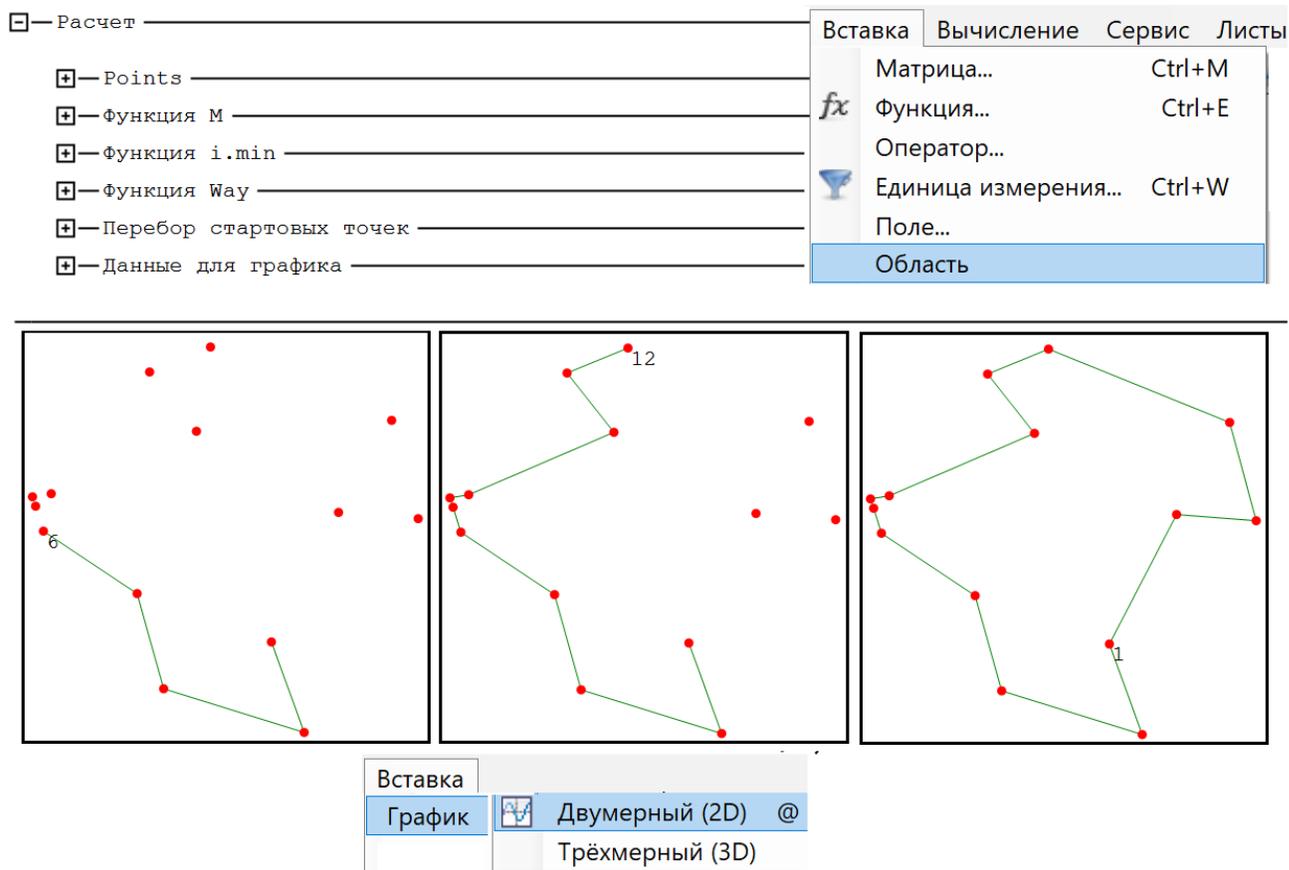


Рис. 7.9. Расчет и анимация (три кадра) пути коммивояжера

Во вложенной в расчет области Points (рис. 7.10) вводятся координаты городов Германии в виде не традиционных векторов, а для экономии места в виде матрицы с двумя строками, из которой изымаются два вектора.

Points

$$M := \begin{bmatrix} 355 & 224 & 251 & 421 & 282 & 133 & 237 & 473 & 123 & 125 & 498 & 296 & 141 & 387 \\ 496 & 439 & 553 & 342 & 246 & 365 & 175 & 232 & 323 & 334 & 350 & 145 & 320 & 605 \end{bmatrix}$$

$$n := \text{cols}(M) = 14 \quad X := \text{row}(M, 1)^T \quad Y := 700 - \text{row}(M, 2)^T$$

Рис. 7.10. Ввод исходных данных

На рисунке 7.11 (область Функция M) показано, как создается функция пользователя с именем M и с двумя аргументами X и Y, возвращающая квадратную матрицу расстояний между точками. Главная диагональ этой матрицы хранит значения бесконечности. Это означает, что нет пути между точками с одинаковыми номерами.

Глава 7

☐—Функция M

```

 $M(X, Y) :=$ 
  for  $i \in [1..n]$ 
    for  $j \in [1..n]$ 
      if  $i \neq j$ 
         $M_{ij} := \sqrt{(X_i - X_j)^2 + (Y_i - Y_j)^2}$ 
      else
         $M_{ij} := \infty$ 
   $M$ 

```

Программирование ☐
 if for try line
 while continue break

Рис. 7.11. Формирование матрицы расстояний

В среде пакета Mathcad есть встроенная функция `match`, возвращающая индекс заданного элемента массива – вектора или матрицы. В среде SMath такой функции нет. Но подобную функцию несложно создать за пару минут – см. рис. 7.12. Используется метод перебора.

☐—Функция i_{min}

```

 $i_{min}(V) :=$ 
   $V_{min} := \min(V)$ 
  for  $i \in [1..length(V)]$ 
    if  $V_i = V_{min}$ 
       $i_{min} := i$ 
   $i_{min}$ 

```

Рис. 7.12. Поиск координат минимального элемента вектора

Функция *Way* (путь), показанная на рис. 7.13, – центральный элемент нашего расчета. Она возвращает вектор номеров точек, начиная с заданного i_{start} , по которым нужно пройти коммивояжеру методом ближайшего соседа. Будет ли при этом путь минимален – это второй вопрос.

Функция *Way* довольно проста и не требует особых пояснений. В ней два цикла `for`, второй из которых вложен в первый (см. также рис. 7.11). Во вложенном цикле с параметром j формируется вектор S , хранящий расстояния от текущей j -й точки до остальных точек маршрута. Индекс минимального элемента этого вектора, найденный с помощью функции i_{min} , становится номером очередной точки пути коммивояжера, после выполнения оператора $Way_i := i_{min}(S)$. После этого соответствующему элементу матрицы M расстояний от i -й до j -й точки присваиваются значение бесконечности для того, чтобы коммивояжер не прошелся по этому маршруту еще один раз.

Глава 7

□ — Функция Way

$$Way(X, Y, i_{start}) := \begin{array}{l} M := M(X, Y) \\ Way_1 := i_{start} \\ \text{for } i \in [2..n] \\ \quad \text{for } j \in [1..n] \\ \quad \quad S_j := M_{Way_{i-1} j} \\ \quad \quad Way_i := i_{min}(S) \\ \quad \text{for } j \in [1..(i-1)] \\ \quad \quad M_{Way_i Way_j} := \infty \\ \text{Way} \end{array}$$

Матрицы □
 [::] |·| ·^T A_{·,·} M_{·,·} i·i
 ·^T [·,·] [·,·] ·_{·,·} ·_{·,·}

Рис. 7.13. Метод ближайшего соседа

На рисунке 7.14 показан путь коммивояжера из второй и точки 2 (из Франкфурта). Жадный алгоритм приводит к тому, что возникает петля, удлиняющая путь.

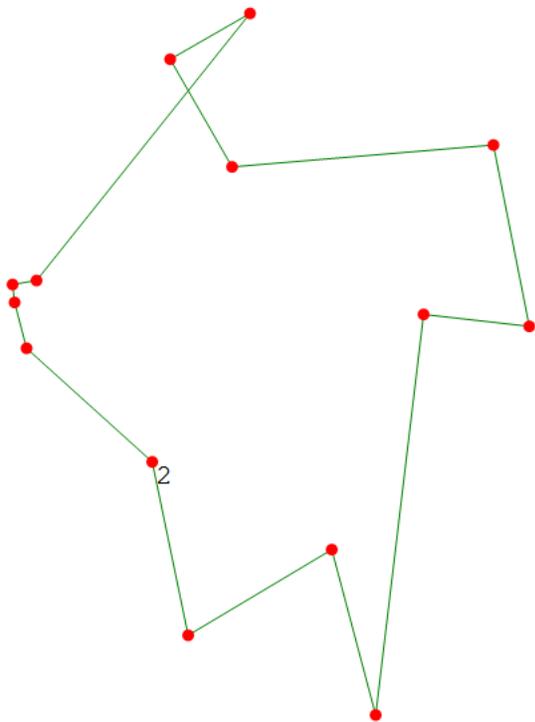


Рис. 7.14. Путь коммивояжера с петлей

Глава 7

Программа на рис. 7.15 методом перебора находит стартовую точку, путь из которой методом ближайшего соседа окажется минимальным. Результат показан на рис. 7.9. Он совпадает с путем коммивояжера, показанного на рис. 7.8.

☐—Перебор стартовых точек

```

i_start := S_min := ∞
for i_start ∈ [1..n]
  way := Way(X, Y, i_start)
  way_{n+1} := way_1
  S := ∑_{i=1}^n √((X_{way_i} - X_{way_{i+1}})^2 + (Y_{way_i} - Y_{way_{i+1}})^2)
  if S < S_min
    S_min := S
    i_min := i_start
i_min

```

$Way(X, Y, i_{start})^T = [8 \ 13 \ 12 \ 9 \ 11 \ 15 \ 14 \ 16 \ 1 \ 6 \ 4 \ 2 \ 10 \ 7 \ 5 \ 3]$

Рис. 7.15. Перебор стартовых точек коммивояжера

На рисунке 7.16 показаны операторы последней вложенной области расчета. По ним готовятся данные для анимации решения задачи. В среде же SMath эту работу выполняет переменная t , которую нужно сделать аргументом анимируемых объектов. У нас это функции $Plot(t)$ и $Way(t)$ (не $Way!$) – см рис. 7.4. Номера кадров анимации должны храниться в векторе или в переменной диапазона. У нас это будет переменная $tRange$. Именно она становится таковой после того, как ее выбрали для управления анимацией в диалоговом окне на рис. 7.16. К этому окну можно добраться, нажав правую кнопку мыши на активированном графике.

☐—Данные для графика

```

way := Way(X, Y, i_start)   way_{n+1} := way_1
tRange := [1..(n+1)]   Кадры анимации

```

Анимировать ▶
 Частота кадров ▶
 Экспорт...

Отмена
 X
 Y
 way
 tRange

$$Plot(t) := \begin{cases} \text{augment}(X, Y, ".", 15, "red") \\ \text{augment}(X_{way_t}, Y_{way_t}, \text{num2str}(way_t), 10, "black") \\ \text{augment}(X_{way_{[1..t]}}, Y_{way_{[1..t]}}) \end{cases}$$

Глава 7

Рис. 7.16. Операторы подготовки анимации

Доказано, что перемещаться по городу с минимизацией расстояния, времени или денег, следует, комбинируя виды транспорта. Нужно ездить на велосипеде, периодически спешиваясь или закатывая велосипед в общественный транспорт (в трамвай-автобус-метро) или даже в такси. Мы это сейчас наблюдаем воочию, например, в Москве, где на бешеной скорости гоняют велосипедисты с желтыми сумками за плечами. Они развозят заказчикам продукты и готовую еду, на которую москвичи «подсели» после пандемии. В руках этих коммерческих байкеров можно увидеть смартфон, который не только показывает дорогу, но и оптимизирует маршрут, решая довольно сложную задачу коммивояжера.

Другой пример. Одна всемирно известная курьерская служба, перевозящая грузы по всему миру на кораблях, самолетах, поездах, автомашинах, велосипедах и т.д., наняла математиков и программистов для оптимизации перевозок. Математики с программистами создали программу, которая позволила этой службе (компании) экономить почти два миллиарда евро в год.

И таких примеров можно привести множество.

Задание читателям

Реализовать в среде SMath один из методов решения задачи коммивояжера: метод ветвей и границ, метод эластичной сети, муравьиный метод, генетический метод, метод динамического программирования и др.

Литература и ссылки:

1. chegov-lit.ru/chegov/text/novogodnyaya-pytka.htm
2. <https://knigavuhe.org/book/novogodnjaja-pytka/>
3. http://az.lib.ru/t/tolstoj_lew_nikolaewich/text_0090.shtml