Занятие 8. Подумаешь, бином Ньютона!

В автобиографической повести Льва Николаевича Толстого «Юность» [1] есть глава XI «Экзамен по математике». Этот вступительный экзамен на математический факультет Московского университета герой трилогии Николенька Иртеньев (alter-ego самого Толстого) сдал не совсем честно – он не по своей воле поменялся билетами с товарищем. Учителю же, который это заметил, было сказано, что билетами не менялись, а только дали их друг другу посмотреть. В билете, взятом героем повести у товарища, был вопрос о *биноме Ньютона* $(a + b)^n$, который Николенька Иртеньев знал. Не успел же он подготовить к экзамену вопрос о *сочетаниях* (одно из понятий комбинаторики). Этот вопрос в результате обмена билетами достался товарищу, провалившему экзамен. Николенька же Иртеньев экзамен сдал. Не отсюда ли идет знаменитое булгаковское «*Подумаешь, бином Ньютона!*»? Так в романе М.А. Булгакова «Мастер и Маргарита» восклицает Коровьев на вопрос о дате смерти буфетчика варьете Сокова. И у Замятина в романе «Мы» можно прочесть «*но для вас это, может быть, почище, чем бином Ньютона*». Это выражение применяется по отношению к довольно простой задаче, которую некоторые считают очень сложной или даже невыполнимой. В настоящее время мы, вооружившись компьютером, можем воскликнуть даже так: «Подумаешь, трином Ньютона!» — см. рис. 8.1.

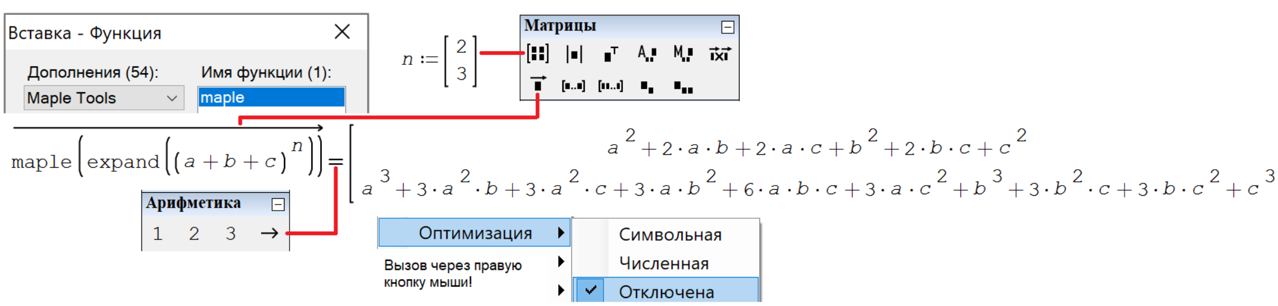


Рис. 8.1. Триномиальные разложение на компьютере (SMath с дополнением Maple Tools)

На рисунке 8.1 не биномиальное, а триномиальное разложение показано для второй и третьей степени n. Разложения по более высоким степеням не уместятся на рисунке. Да и нет особой нужды их показывать. Главное, чтобы читатель понял суть этого разложения (избавление от скобок) и не боялся бинома и даже тринома Ньютона и в литературе, и жизни!

Если в задаче на рис. 8.1 убрать слагаемое c и увеличить длину вектора натуральных чисел n, то мы получим то, что показано ниже на рис. 8.9 – не триномиальные, а биномиальные разложения. Можно увеличивать не только значение n, но число слагаемых, получив квадро-, пента- и другие подобные разложения.

В школе и вузе «*мы все учились понемногу чему-нибудь и как-нибудь*» – заучивали, в частности, простейший бином Ньютона для степени равной двум: $(a + b)^2 = a^2 + 2\,a\,b + b^2$. Мы запоминали эту формулу, не зная, что это тот самый «страшный» для гуманитариев[1] бином Ньютона. Простейший, но тем не менее, бином! Во времена Толстого, да и сейчас разрезают квадратный лист бумаги двумя (n = 2) разрезами на четыре части ($2^2 = 4$) так, чтобы получить маленький квадрат площадью a^2, два прямоугольника площадью $a\,b$ каждый и большой квадрат площадью b^2 (рис. 8.2). Это самое простая и наглядная трактовка этого алгебраического выражения – бинома Ньютона со степенью два.

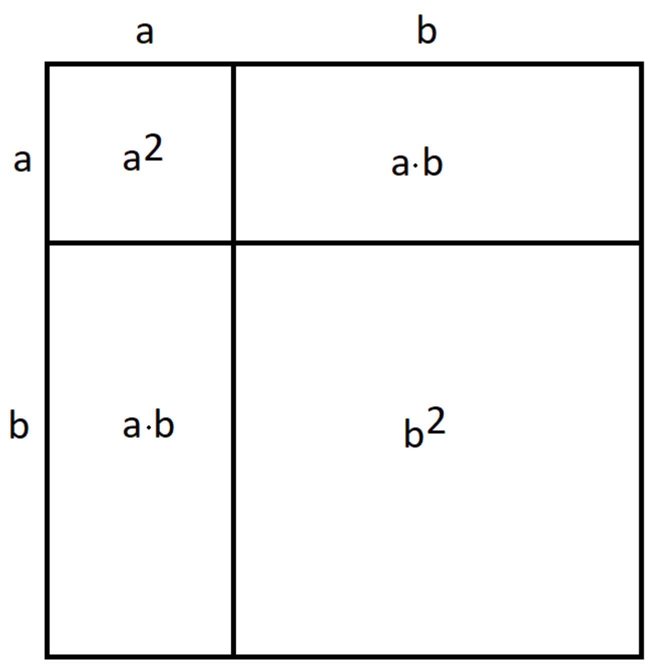


Рис. 8.2. Геометрическое толкование формулы $(a + b)^2 = a^2 + 2\,a\,b + b^2$

Кое-кого заставляли бездумно заучивать формулы биномиальных коэффициентов и сами коэффициенты для степени больше двух. Можно взять не квадратный лист бумаги (рис. 8.2), а, например, кусок сыра в виде куба и разрезать его ножом тремя разрезами (n = 3) на восемь

[1] Есть такое шутливое отличие технаря от гуманитария – физика от лирика. Технарь вспоминает год рождения Толстого (1828) через основание натурального логарифма 2.718281828. Гуманитарий же вспомнит примерное значение числа е (числа Эйлера) через год рождения Толстого. Кстати, многие вполне обосновано считают, что величайший писатель мира – это Лев Толстой, а величайший математик мира – это Леонард Эйлер. Вот так переплелись судьбы этих двух гениев.

частей ($2^3 = 8$) так, чтобы получился один маленький куб объемом a^3, один большой куб объемом b^3, три прямоугольных параллелепипеда объемом $a^2 b$ и три прямоугольных параллелепипеда объемом $a b^2$. Это будет биноминальный куб Монтессори. Сразу вспоминается сказка того же Толстого о том, как мужик для барина жаренного гуся делил. Правда, не на восемь, а на семь частей: голову барину, задок (гузку) барыне, лапки сыновьям, крылышки дочерям. А гусиную тушку хитрый мужик забрал себе.

Люди с богатым пространственным воображением могут четырьмя взмахами ножа разрезать воображаемый четырехмерный куб на 16 частей и получить соответствующие триномиальные коэффициенты. Квадратный лист бумаги можно также по краям разметить не на две части a и b, а на три – a, b и c, и получить «бумажные» коэффициенты не бинома, а тринома Ньютона. Во времена Толстого, да и сейчас было такое семейное времяпрепровождение: взрослые и дети собирались за столом и вырезали из бумаги, а потом клеили и раскрашивали всякие фигурки – елочные украшения, например. Можно предположить, что во время таких занятий заодно изучался и бином Ньютона в форме увлекательного занятия алгеброй, геометрией и комбинаторикой. Такого подхода не хватало старому князю Болконскому из романа «Война и мир», когда он занимался со своей дочерью княжной Марьей математикой. С математической великомученицей Марьей!

Кстати, похожее на бином Ньютона выражение $a^n + b^n = c^n$ («трином» Ферма) будоражило умы многих математиков несколько веков! Это выражение связано с одной из самых известных и мистических теорем – с большой теоремой Ферма, которая была доказана сравнительно недавно – в 1994 году. Увы, исчезла ещё одна тайна математического мироздания! Теперь можно воскликнуть и так: «Подумаешь, теорема Ферма!». К этой теореме мы ещё вернемся в конце занятия.

Команда компьютерных аналитических преобразований (символьной математики) `expand` (развернуть – см. рис. 8.1) легко проводит биномиальные, триномиальные и другие подобные разложения. Команда `factor` (факторизация, сворачивание) проводит обратную операцию. В настоящее время уроки алгебры в некоторых «продвинутых» школах нередко сводятся к освоению команд символьной математики в средах математических пакетов Maple, Mathematica, Mathcad, Maxima, SMath и др. Нахождение наименьшего общего кратного, наибольшего общего делителя – всё то, чем многих людей «докомпьютерного» поколения «терроризировали» в начальной школе при изучении обыкновенных (простых) дробей (см.

ниже рис. 8.12-8.15), теперь стали рутинными операциями! И не только для двух чисел, а для любого количества чисел. Хорошо это или плохо с точки зрения методики и эффективности учебного процесса – разговор особый. Но надо признать, что компьютер может помочь перевести изучение математики школьниками от тупого заучивания теорем и формул к пониманию их сути – от рутинной работы к работе творческой. Или, наоборот, как с грустью и сожалением полагают некоторые преподаватели и методисты.

Заканчивая разговор о биноме Ньютона, отметим, что Конан-Дойль так пишет о профессоре Мориарти: «*…когда ему исполнился 21 год, он написал трактат о биноме Ньютона, завоевавший ему европейскую известность…».* У Юлиана Тувима есть прекрасное стихотворение «Наука». Начинается оно так (русский, слегка зарифмованный подстрочник [2]):

Да, учили нас, кажется, знатно
Логарифмам, биному Ньютона,
Тщась пособиями из картона,
Бесконечность сделать понятной.

А заканчивается стихотворение пронзительно:

Сделай милость,
Оставь меня, Боже,
Второгодником в жизненной школе.

В поэтическом переводе Давида Самойлова Бог и бином Ньютона пропали:

Всем премудростям я обучался:
Логарифмы, задачи, квадраты.
Грыз я формулы.
Запанибрата
С бесконечностью я обращался.
<...>
Ах, остаться бы мне, если можно,
Второгодником в жизненной школе!

С Богом здесь все более-менее ясно – в советское время на это слово было наложено табу. А почему бином Ньютона пропал!? Здесь можно развести целую математико-филологическую «философию». Но не будем этого делать, а только скажем, что автору в юности этот самый бином Ньютона круто повернул жизнь. Сначала казалось, что в худшую сторону, а потом оказалось, что в лучшую. Но это разговор особый и долгий [3].

Следует отметить также, что логарифм присутствует в обоих вариантах перевода стихотворения Юлиана Тувима. Логарифмом, а именно десятичным логарифмом тоже мучали многих школьников, не склонных к математике и к точным наукам. В наш компьютерный век оказалось, что этот логарифм почти не нужен, так как вычисления можно спокойно проводить и без него (вспомним ушедшую в прошлое логарифмическую линейку, сводящую умножение к сложению, а деление к вычитанию). Остался только натуральный логарифм в некоторых аналитических преобразованиях, которые тоже уступают место численным расчётам на компьютере.

Итак, можно предположить, что Толстой знал, что такое бином Ньютона. А вот теорию сочетаний Толстой не знал. Этот вывод можно сделать из повести «Юность». А ведь эти понятия тесно связаны! Судите сами на следующем примере.

Представьте себе, что вы сержант, и вам нужно из полдюжины солдат вашего отделения отправить в разведку никого, одного, двоих, троих, четверых, пятерых или всех шестерых бойцов. Сколько вариантов (сочетаний!) такого разведывательного дозора имеется? На рисунке 8.3 показано решение этой задачи, из которого, в частности, видно, что больше всего вариантов (20) будет, если назначать в разведку троих солдат из шестерых с именами (никами, позывными) a, b, c, d, e и f. Варианты наряда такие: 1) abc, 2) abd, 3) abe, 4) abf, … и, наконец, 20) def. Читатель, заполни для тренировки пропуск-многоточие! Формула на рис. 8.3 взята с сайта https://ru.wikipedia.org/wiki/Сочетание[2].

---

[2] Многих коробит, когда они видят ссылку на Википедию. Мол, нашли на что ссылаться – нужно искать другие, более серьезные источники. Но Википедия при всех своих недостатках имеет одно неоспоримое преимущество. Если кто-то увидит в ней ошибку или просто опечатку («очепятку»), то он может исправить её. Кроме того, статьи Википедии обычно заканчиваются ссылками на «серьезные» источники. Но, честно говоря, ссылки в книгах типа https://ru.wikipedia.org/wiki/Сочетание сейчас становятся лишними. Если читатель не знает или подзабыл смысл какого-то термина, то он сам может быстро узнать все в интернете. Помощь может быть и активная. Автор хорошо знает пакеты SMath и Maple, но не знал, что операторы Maple можно вызывать в среде SMath. Убрать этот пробел в знаниях и навыках автору помог форум пользователей SMath https://en.smath.com/forum/yaf_postst1025_Maple-Tools.aspx.

$$n := 6$$

$$k := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} \quad \overrightarrow{\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 15 \\ 20 \\ 15 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Рис. 8.3. Число сочетаний из n по k

Если из знаменателя дроби на рис. 8.3 убрать факториал k, то мы получим формулу не сочетания, а *размещения*, когда, например, наряды в дозор abc и bac (см. выше) считаются разными. Числа же в векторе ответа будут уже такими: 1, 6, 30, 120, 360, 720, 720 (см. рис. 8.4 – последние два числа будут одинаковыми при любом значении n и k).

$$n := 6$$

$$k := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} \quad \overrightarrow{\frac{n!}{(n-k)!}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 30 \\ 120 \\ 360 \\ 720 \\ 720 \end{bmatrix}$$

Рис. 8.4. Число размещений из n по k

О факториале

Почти все школьники и студенты знают, что факториал, оператор с символом «восклицательный знак[3]» означает перемножение всех чисел от одного до n – см. рис. 8.5. Кто-то из особо умных студентов при этом добавит, что у факториала есть и нецелочисленный собрат по имени Гамма-функция. Если n! = (n–1)!·n, то Gamma(z+1) = z·Gamma(z), где z – комплексное число. Но правильнее говорить гамма-функция Эйлера[4].

[3] Математический анекдот. Студент на экзамене (см. начало этой главы) отвечает на вопрос списанного билета – диктует формулу числа размещений (рис. 8.4) и кричит «Эн!!!». Преподаватель говорит: «Что так кричать?». Студент: «Тут стоит знак восклицания». В интернете можно найти информация о том, почему для этого оператора выбран такой «кричащий» знак.

[4] Если есть гамма-функция, то имеются и альфа-функция, и бетта-функция. Если есть язык программирования С, то должны быть и языки программирования А и В. Но «а пропало, б пропало» – остался только язык С.

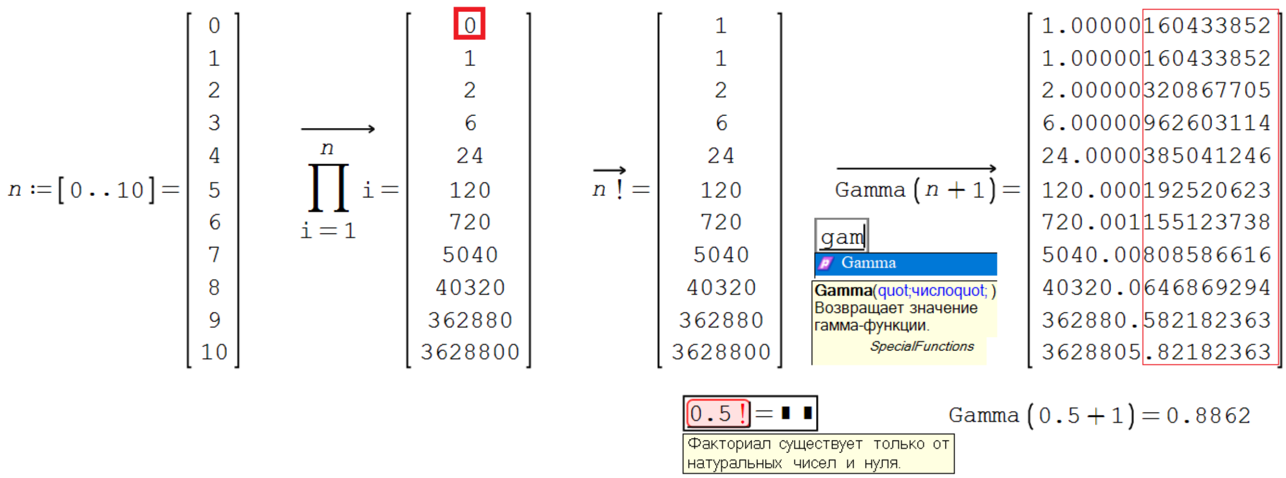


Рис. 8.5. Факториал числа n и гамма-функция Эйлера

Но почти все студенты и школьники не совсем неправильно ответят на вопрос, о факториале нуля – см. красную рамочку на рис. 8.5. Все скажут, что он равен единице *по соглашению*. А он равен единице по своей *сути*. Судите (сутите!) сами. Факториал пяти равен 120 (1·2·3·4·5=120). Факториал четырех равен 120/5=24, факториал трех равен 24/4=6, факториал двух равен 6/3=2, факториал единицы равен 2/2=1 и, наконец, факториал нуля равен 1/1=1! В последнем выражении знак восклицания – это и знак восклицания (Ура! Добрались до ответа!), и факториал. Правда, для второго случая там не хватает замыкающей предложение точки.

Идем в другую сторону. Факториал пяти равен 120. Факториал шести равен 120·5=720, факториал семи равен 720·6=5040 и т.д. На рисунке 8.6 показана программа-функция (два варианта), возвращающая факториал числа n *рекурсивным* методом: функция `Factorial` вызывает сама себя и в момент её создания, и при её вызове[5]. Пошаговая работа этой функции с опорой на факториал пяти (120) описана выше.

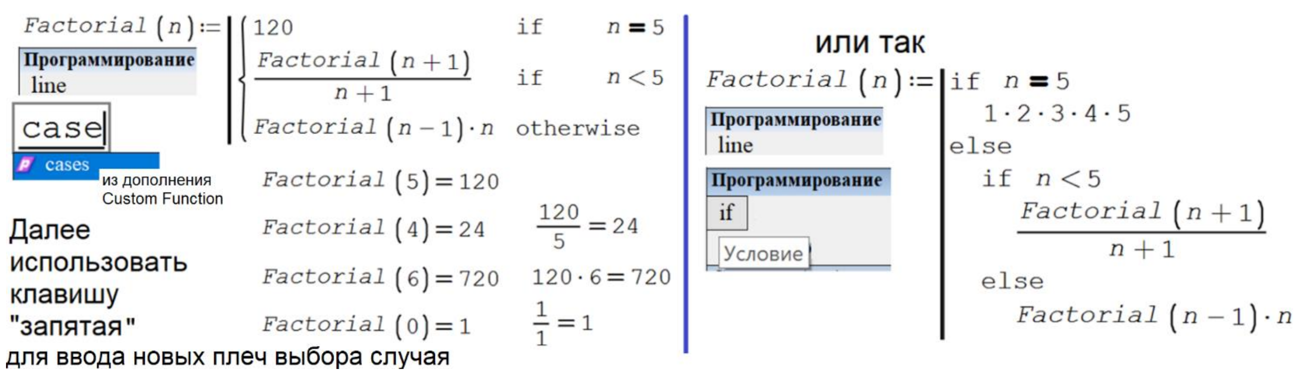


Рис. 8.6. Программа с рекурсией

На рисунке 8.6 приведено два варианта программы – с опорой на немногим известный оператор `cases` (случаи) и на всем известный оператор `if`. В операторе case вставка новых "случаев" ведется через ввод запятой.

Подсчитать факториал числа можно и без рекурсии, которая проста в написании, но требует значительных ресурсов компьютера при её выполнении и… утверждения, что 0! = 1.

[5] Есть такое описание рекурсии в одном полушутливом справочнике: «Рекурсия – см. Рекурсия».

Рисунок 8.6 с рекурсивной функцией вставлен в эту книгу главным образом для того, чтобы показать, что такое рекурсия. Некоторые задачи, включая и задачи комбинаторики, очень трудно, а в ряде случаев невозможно решить без рекурсии. Есть и двойной (тройной и т.д. – кратный) факториал. Двойной факториал – это не факториал от факториала, а более интересная конструкция (рис. 8.7) с произведением четных и нечетных чисел. Как тут не вспомнить строки Гоголя из "Мертвых душ": "*Шампанское у нас было такое – что пред ним губернаторское? просто квас. Вообрази, не клико, а какое-то клико-матрадура, это значит двойное клико*".

Имя функции !! вводится так
Нажимается клавиша a
Затем берется аккорд Shift+Ctrl+k и далее !!

Затем берется аккорд Shift+Ctrl+k еще раз

Стирается буква a и открываются круглые скобки

из дополнения Custom Function

$$!!(n) := \begin{cases} 1 & \text{if} \quad n = 0 \\ \prod_{i=1}^{\frac{n}{2}} 2\cdot i & \text{if} \quad \mathrm{mod}(n, 2) = 0 \\ \prod_{i=0}^{\frac{n-1}{2}} (2\cdot i + 1) & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$n := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix} \qquad \overrightarrow{!!(n)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 8 \\ 15 \\ 48 \\ 105 \\ 384 \\ 945 \end{bmatrix}$$

$$Fractal3(n) := \begin{cases} 1 & \text{if} \quad n = 0 \\ \prod_{i=1}^{\frac{n}{3}} 3\cdot i & \text{if} \quad \mathrm{mod}(n, 3) = 0 \\ \prod_{i=1}^{\frac{n+1}{3}} (3\cdot i - 1) & \text{if} \quad \mathrm{mod}(n+1, 3) = 0 \\ \prod_{i=1}^{\frac{n+2}{3}} (3\cdot i - 2) & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$n := [0..14] \qquad \overrightarrow{Fractal3(n)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 10 \\ 18 \\ 28 \\ 80 \\ 162 \\ 280 \\ 880 \\ 1944 \\ 3640 \\ 12320 \end{bmatrix}$$

Рис. 8.7. Двойной и тройной факториал

А есть ещё и *праймориал* (или примориал – произведение простых чисел), *фибонориал* (или фибоначчиал – произведение чисел Фибоначчи) и даже суперфакториал! (здесь знак восклицания не символ факториала, а просто знак восклицания). Попробуйте создать в среде SMath такие операторы!!! (здесь тройной знак восклицания не символ тройного факториала, а просто тройной знак восклицания).

Работа с факториалом обсуждалась на форуме пользователей SMath https://en.smath.com/forum/yaf_postsm85572_Is-the-recursion-in-SMath.aspx.

Но вернемся к нашим солдатам в разведке.

Числа 1, 6, 15, 20, 15, 6 и 1 (см. рис. 8.3) входят в так называемый треугольник Паскаля, содержащий ньютоновские биномиальные коэффициенты (рис. 8.8 и 8.9).

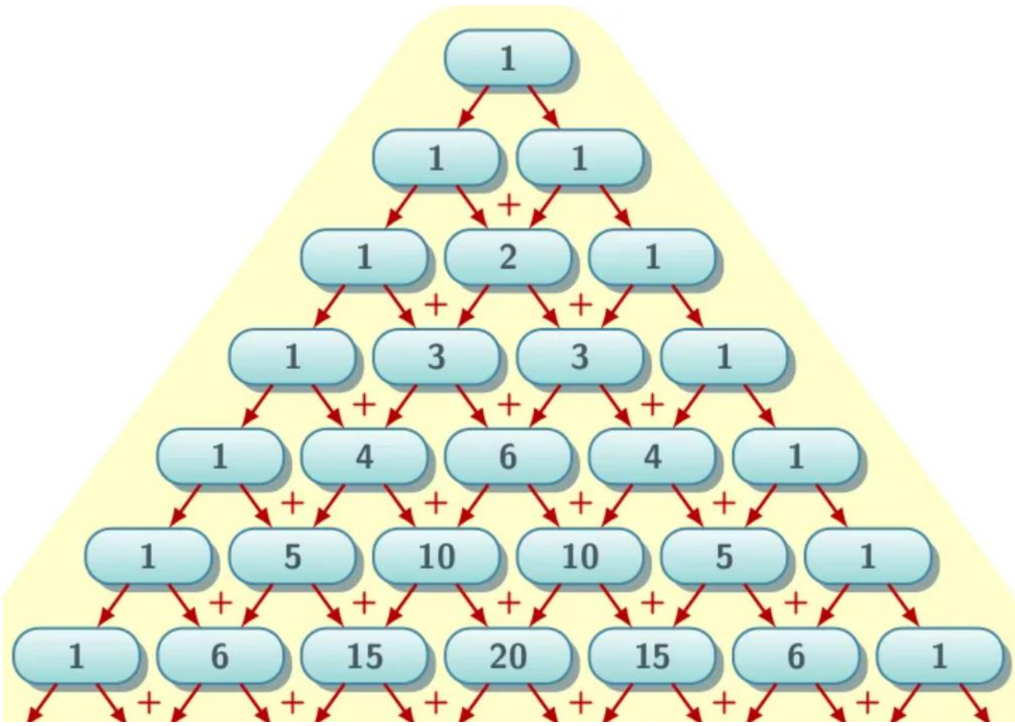


Рис. 8.8. Треугольник Паскаля

В этом треугольнике легко просматриваются такие суммы: 1+1=2, 1+2=3, 1+3=4, 1+4=5, 4+6=10, 5+10=15 и10+10=20. Читатель, расширь этот треугольник снизу! Вот тебе и «подумаешь, бином Ньютона!». На такие хитрости с суммированием приходилось идти в докомпьютерную эру при ответе на вопрос о биноме Ньютона и сочетаниях! Голь (люди без компьютера) на выдумки хитра! Чтобы решить задачу о сочетаниях (рис. 8.3), нужно было вспомнить о биноме Ньютона. А чтобы найти коэффициенты бинома Ньютона, нужно было вспомнить о треугольнике Паскаля с его суммами (рис. 8.9[6]). В наше время для решения такой задачи достаточно поставить SMath на свой компьютер, а также «полазить» в интернете.

---

[6] Пакет SMath, конечно, не приписывал единицы по краям выражений в треугольнике на рис. 8.9. Эти единицы автор приписал сам для того, чтобы было более наглядней.

Форум пользователей SMath содержит ветку, где описано, как можно построить треугольник Паскаля в среде этой программы – см. https://en.smath.com/forum/yaf_postst23554_Pascal-Triangle-refreshed.aspx.

$$n := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}^{T}$$

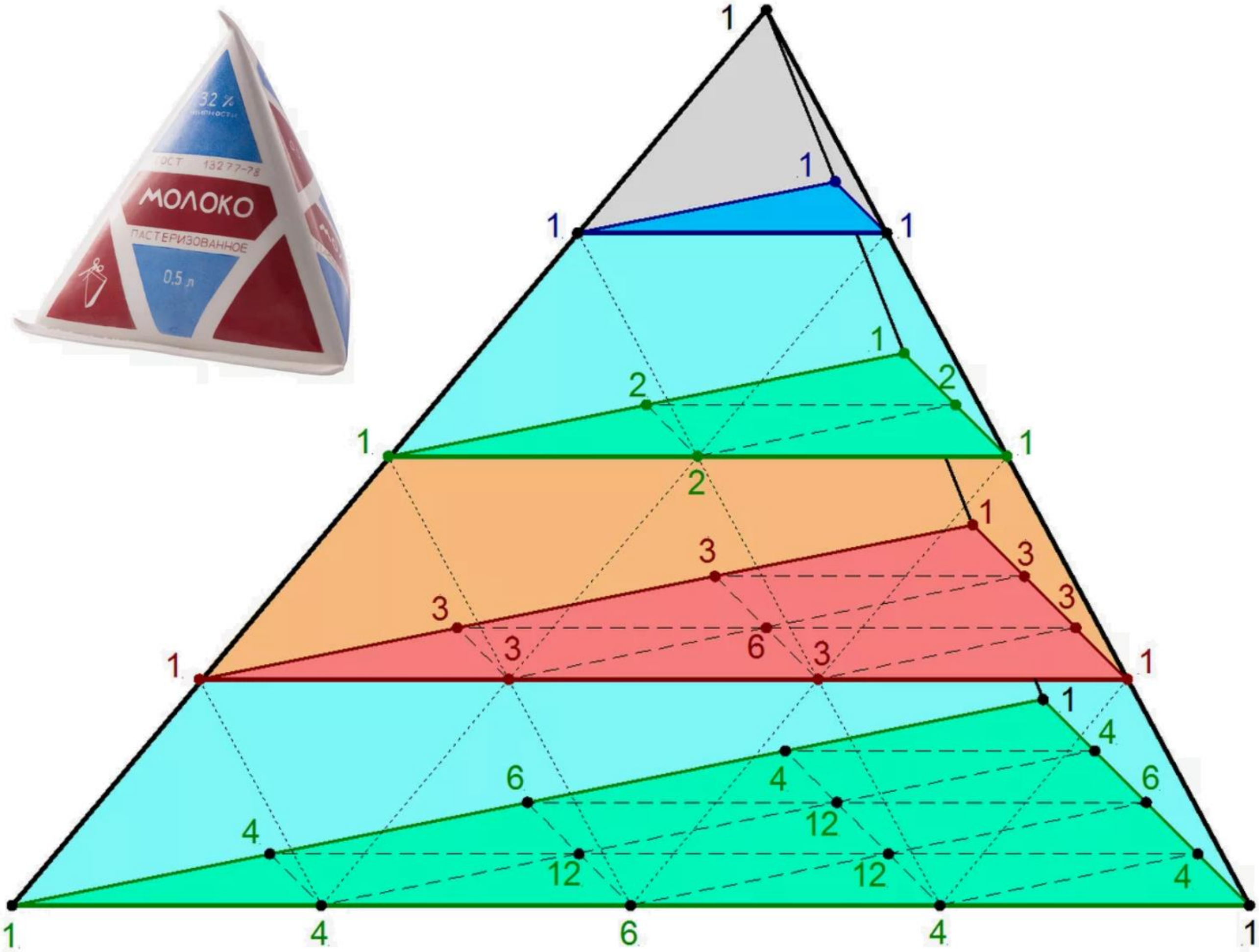
$$\overrightarrow{\mathrm{maple}\left(\mathrm{expand}\left((a+b)^{n}\right)\right)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1\cdot a + b\cdot 1 \\ 1\cdot a^{2} + 2\cdot a\cdot b + b^{2}\cdot 1 \\ 1\cdot a^{3} + 3\cdot a^{2}\cdot b + 3\cdot a\cdot b^{2} + b^{3}\cdot 1 \\ 1\cdot a^{4} + 4\cdot a^{3}\cdot b + 6\cdot a^{2}\cdot b^{2} + 4\cdot a\cdot b^{3} + b^{4}\cdot 1 \\ 1\cdot a^{5} + 5\cdot a^{4}\cdot b + 10\cdot a^{3}\cdot b^{2} + 10\cdot a^{2}\cdot b^{3} + 5\cdot a\cdot b^{4} + b^{5}\cdot 1 \\ 1\cdot a^{6} + 6\cdot a^{5}\cdot b + 15\cdot a^{4}\cdot b^{2} + 20\cdot a^{3}\cdot b^{3} + 15\cdot a^{2}\cdot b^{4} + 6\cdot a\cdot b^{5} + b^{6}\cdot 1 \end{bmatrix}$$

В ответе этих единиц нет!

Рис. 8.9. Биномиальные коэффициенты и треугольник Паскаля

Триномиальные коэффициенты (рис. 8.1) группируются уже не в треугольник, а в пирамиду (тетраэдр) Паскаля[7] – см. рис. 8.10.

[7] Была идея для популяризации математики на треугольных пакетах с молоком (Tetra Pak), выпускавшихся в советское время, печатать эти самые триномиальные коэффициенты. А на последней странице обложки школьной «тетради в клеточку» – тетради по математике помещать не только таблицу умножения, но биноминальные коэффициенты и прочую математическую премудрость.



$$(a+b+c)^4 = 1\cdot a^4 + 4\cdot a^3\cdot b + 6\cdot a^2\cdot b^2 + 12\cdot a\cdot b\cdot c^2 + \ldots + c^4$$

Рис. 8.10. Пирамида Паскаля

Школьникам или студентам можно задать и такой, более мирный вопрос. У тебя есть шесть символов (n), из которых нужно создать пароль длиной от одного до шести символов (k). Сколько вариантов такого пароля имеется? Это уже будет *сочетание с повторением* (они называются также *наборами*), в которых каждый элемент может участвовать несколько раз. С солдатами в разведке (см. выше) так поступить нельзя, а с символами пароля можно: 1) aaa, 2) aab, 3) abb, 4) bbb, … и, наконец, 56) fff. Читатель, заполни для тренировки пропуск-многоточие! На рисунке 8.11 показано решение задачи о возможном числе наборов по k символов из n возможных.

$$n := 6$$

$$k := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} \qquad \overrightarrow{\frac{(n+k-1)!}{k!\cdot(n-1)!}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 21 \\ 56 \\ 126 \\ 252 \\ 462 \end{bmatrix}$$

Рис. 8.11. Сочетание с повторением (наборы)

Можно только восхищаться и удивляться тому, как во времена Толстого несчастные, а может, наоборот, счастливые безкалькуляторные, безкомпьютерные гимназисты и студенты всё это проделывали в уме или на листочке бумаги. Или на классной доске. Читаем в той же повести «Юность» (см. эпиграф к занятию 2): «*Я стоял около окна <…> и решал на чёрной доске какое-то длинное алгебраическое уравнение. В одной руке я держал изорванную мягкую "Алгебру" Франкера, в другой — маленький кусок мела <…>, а в третьей — тряпку.*» Шутка! Третьей руки, конечно, не было. Ещё одну руку автор приписал, подражая Зощенко. Третья рука школьнику не нужна, а вот вторая (третья, четвертая…) голова не будет лишней для параллельных вычислений, которые сейчас в нашем цифровом мире стали очень актуальными.

Здесь уместно будет отметить, что ещё во времена детства Льва Толстого появилась первая программа для аналитической машины Чарльза Беббиджа (1834 г.), которую написала Ада Лавлейс (дочь Байрона). В ней были заложены будущие принципы построения программ для цифровых ЭВМ.

«Арифметика» Магницкого, «Алгебра» Франкера. Первый учебник у всех на слуху, а вот второй нет. Читатель, запусти поиск в интернете по ключу «алгебра Франкера» и узнай много интересного про эту книгу, на которой выросло несколько поколений русских интеллигентов с техническим образованием. Вполне обоснованно считается, что все современные школьные учебники алгебры — это переписанные учебники Франкера, а все современные вузовские учебники по математическому анализу (см. занятие 1) – это переписанные учебники швейцарца Эйлера, который много работал в Санкт-Петербурге. Там же он и похоронен.

Вот как неожиданно всплыли одинаковые числа в разных, казалось бы, математических задачах — в биноме Ньютона и в сочетаниях.

А вывод такой. Нельзя знать бином Ньютона и не знать сочетания. Вернее так. Нужно ухитриться знать бином Ньютона и не знать сочетания. Что и сделал Николенька Иртеньев, то бишь Лев Толстой. Но он и не стал математиком, как два его других брата, а стал великим писателем!

Дивертисмент «ПОГОВОРИМ О ДРОБЯХ»

С комбинаторикой школьники сталкиваются ещё в младших классах.

На рисунке 8.12 показан пример компьютерной работы с дробями – нужно обработать три смешанные дроби – сложить две первые, а из суммы вычесть третью (см. первую строку на рисунке). Читатель, попытайся сделать этот расчёт самостоятельно на бумаге или просто в уме. Можно в среде SMath сразу автоматически посчитать это выражение, получив по умолчанию в ответе десятичную дробь, отформатировав её затем в смешанную простую (см. последний оператор на рис. 8.12). А можно вспомнить, как нас в школе педантично учили это делать, и воспроизвести пошагово на компьютере школьные знания и навыки по арифметике простых дробей.

$$5\,\frac{3}{4}+3\,\frac{1}{2}-5\,\frac{5}{7}=\,?$$

$$\frac{23}{4}+\frac{7}{2}-\frac{40}{7}$$

Наименьшее общее кратное

$$\mathrm{maple}\left(lcm\,(4,\,2,\,7)\right)=28$$

$$\frac{23\cdot 7}{4\cdot 7}+\frac{7\cdot 14}{2\cdot 14}-\frac{40\cdot 4}{7\cdot 4}$$

$$\frac{161}{28}+\frac{98}{28}-\frac{160}{28}$$

$$\frac{161+98-160}{28}\qquad \frac{99}{28}$$

$$99-3\cdot 28=15$$

Ответ $3\,\frac{15}{28}$

Рис. 8.12. Работа на компьютере с простыми (обыкновенными) дробями

Во второй строке расчёта на рис. 8.12 смешанные дроби переводятся в неправильные – в дроби, у которых знаменатель меньше числителя. Затем (центральный момент расчёта!) вызывается функция lcm, возвращающая наименьшее (least) общее (common) кратное (multiple) любого количества целых чисел. В нашем случае их три: 4, 2 и 7 (знаменатели трех исходных дробей). Далее с опорой на найденное наименьшее общее кратное (у нас это число 28 – запомним его!) все три дроби получают одинаковый знаменатель. Задача фактически решена!

Вот что написал Лев Толстой про число 28: «*Я родился в двадцать восьмом году, двадцать восьмого числа» <…> и всю мою жизнь двадцать восемь было для меня самым счастливым числом. И вот только недавно мне пришлось узнать, что и в математике двадцать восемь есть особенное "совершенное" число*». Совершенное число – это натуральное число, равное сумме всех своих собственных делителей (то есть всех положительных делителей, отличных от самого числа). Вот первые семь таких чисел: 6 (1+2+3), 28 (совершенное число Льва Толстого), 496, 8128, 33 550 336, 8 589 869 056 и 137 438 691 328. Самое большое известное совершенное число содержит 44 677 235 знаков. Все найденные совершенные числа оказались четными. Теорема Ферма, о которой мы упоминали выше и ещё упомянем ниже, доказана. А вот две другие также предельно простые по формулировке, но пока не решенные математические проблемы: существуют ли нечетные совершенные числа и бесконечно ли их количество? Нечетных совершенных чисел до сих пор не обнаружено, однако не доказано и то, что их не существует. Неизвестно также, бесконечно ли множество всех совершенных чисел. Доказано, что нечетное совершенное число, если оно существует, имеет не менее девяти различных простых делителей и не менее 75 простых делителей с учетом кратности.

У «толстовского» совершенного числа 28 пять делителей (1, 2, 4, 7 и 14), три из которых (2, 4 и 7) были задействованы в качестве знаменателей исходных дробей на рис. 8.12.

И ещё о дробях – простых и десятичных.

Однажды к автору, сидящему у компьютера за написанием этой книги, подошла его внучка[8] и попросила помочь с проверкой решённой задачи по математике из задачника [4]. Это была вторая внучка автора – первая была описана в самом начале введения. Кстати, рука этой девочки помещена на обложках двух английских книг, посвящённых STEM/МИТ образованию [5, 6]. Ответа именно к этой задаче в конце книги почему-то не было. Автор запустил облачную версию пакета SMath и решил задачу для проверки – см. рис. 8.13, где

[8] Крошка сын к отцу пришел, и спросила кроха: – Что такое хорошо и что такое плохо? Отец ответил: – Математика с компьютером – это хорошо, а игры-бегалки и стрелялки на компьютере – это плохо. Нужно посидеть за компьютером, а потом выйти во двор – побегать и пострелять – поиграть в «войнушку»!

исходный пример показан под пунктом 1. В школе математика начинается с простых положительных дробей (рис. 8.12), потом переходят к десятичным числам – положительным и отрицательным, и мы уже это отметили. А на очереди комплексные числа, без которых немыслима, например, электротехника с её переменным током…

Мы вместе с внучкой ввели в расчёт числовое выражение (п. 2), в котором присутствует и смешанное число (см. кнопку в красном кружочке на рис. 8.12), нажали клавишу равно и получили ответ в формате умолчания: минус четыре целых и две десятых. Далее этот ответ был отформатирован до простой дроби (п. 3) и переведен в смешанный формат (п. 4). Решение внучки не сошлось с ответом, полученным на компьютере. Где была ошибка? Для её поиска было скопирована и просчитана опять же на компьютере часть исходного числового выражения (п. 5 – десятичный ответ и п. 6 – ответ, отформатированный до смешанной простой дроби). В решении же внучки здесь было иное число. Ошибка была локализована и быстро исправлена.

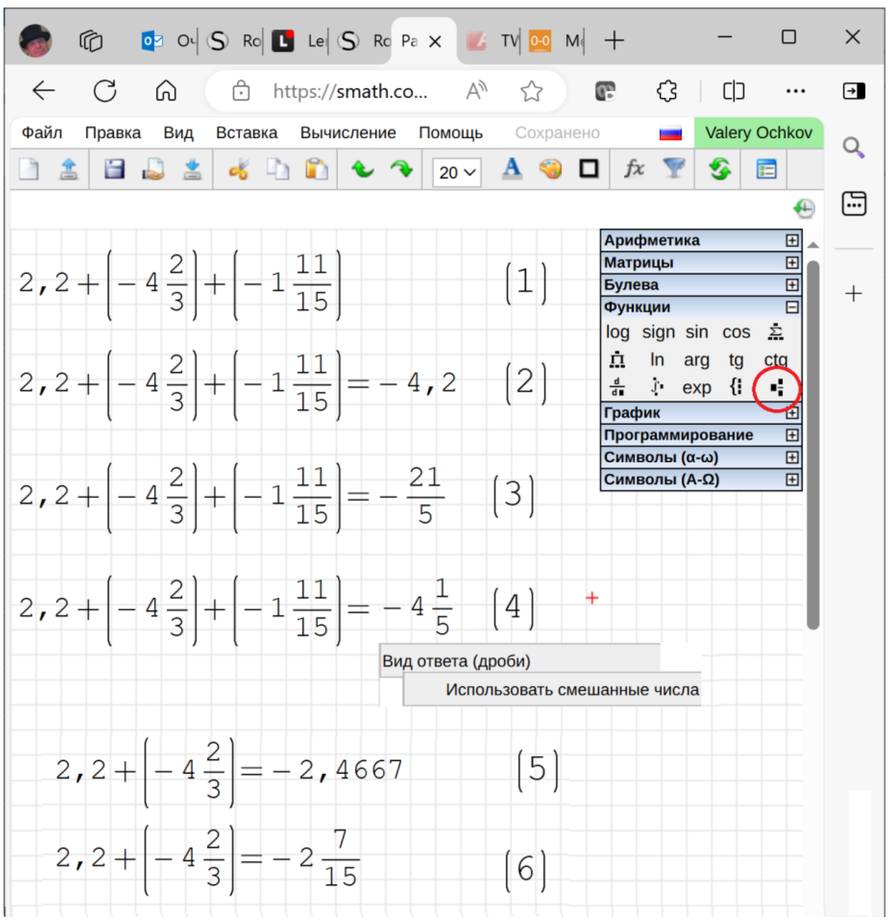


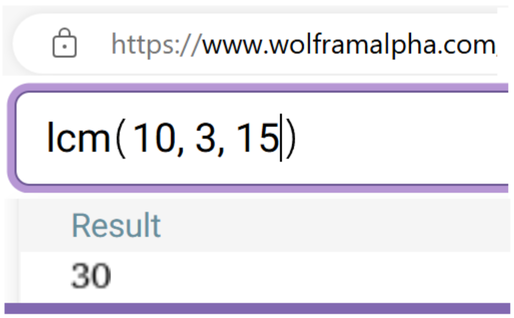
Рис. 8.13. Работа на компьютере с десятичными и простыми дробями

Внучка автора решала задачу с карандашом и листком бумаги, производя сложение и вычитание столбиком. Калькулятор здесь запрещают использовать и в школе, и дома – см. Введение. Другая педагогическая крайность – это решение такой задачи на компьютере: см. п.п. 2-4 на рис. 8.13. Но есть и некий разумный компромисс, и он показан на рис. 8.14. Школьник записывает исходное выражение, а затем последовательно копирует и редактирует его, получая в конце концов нужный ответ. В интернете можно определить наименьшее общее кратное (п. 9), а в среде SMath проводить сложение с вычитанием (п. 14), то есть выполнять рутинную работу, оставляя её творческую часть школьнику. Здесь можно возразить в том плане, что работа с ручкой и листом бумаги помимо умственных способностей развивает и моторику рук. Но и работа с клавиатурой и мышкой тоже благоприятно сказывается на развитии ребенка.

$$2,2+\left(-4\frac{2}{3}\right)+\left(-1\frac{11}{15}\right)$$

$$2,2-4\frac{2}{3}-1\frac{11}{15} \qquad (7)$$

$$2\frac{2}{10}-4\frac{2}{3}-1\frac{11}{15} \qquad (8)$$



(9)

$$2\frac{2\cdot 3}{10\cdot 3}-4\frac{2\cdot 10}{3\cdot 10}-1\frac{11\cdot 2}{15\cdot 2} \qquad (10)$$

$$2\frac{6}{30}-4\frac{20}{30}-1\frac{22}{30} \qquad (11)$$

$$0\frac{60+6}{30}-0\frac{120+20}{30}-0\frac{30+22}{30} \qquad (12)$$

$$\frac{66}{30}-\frac{140}{30}-\frac{52}{30} \qquad \frac{66-140-52}{30} \qquad (13)$$

$$66-140-52=-126 \qquad (14)$$

$$-\frac{126}{30}=-\frac{21}{5} \qquad -\frac{126}{30}=-4\frac{1}{5} \qquad (15)$$

Рис. 8.14. Полуавтоматическое решение школьной задачи

В школьной математике применяется и другая методика обучения сложению /вычитанию смешанных дробей [7]. После пункта 8 на рис. 8.14 не приводят дроби к неправильным дробям, а работают отдельно с целыми частями, отдельно с дробными – см. пример на рис 8.15.

$$2{,}2+\left(-4\frac{2}{3}\right)+\left(-1\frac{11}{15}\right)$$

$$2\frac{2}{10}+\left(-4\frac{2}{3}\right)+\left(-1\frac{11}{15}\right)$$

$$(2-4-1)+\left(\frac{1}{5}-\frac{2}{3}-\frac{11}{15}\right)$$

$$-3+\left(\frac{1}{5}-\frac{2}{3}-\frac{11}{15}\right)$$

$$-3+\left(\frac{1\cdot 3}{5\cdot 3}-\frac{2\cdot 5}{3\cdot 5}-\frac{11}{15}\right)$$

$$-3+\left(\frac{3}{15}-\frac{10}{15}-\frac{11}{15}\right)$$

$$-3+\frac{3-10-11}{15}=-\frac{21}{5}$$

$$-\frac{21}{5}=-4\frac{1}{5}$$

Рис. 8.15. Ручное решение школьной задачи

Второй важный этап обучения математике – это переход от выражений к уравнениям и неравенствам – к двум выражениям со знаком сравнения посередине.

Многие задачи комбинаторики сводятся к решению уравнений и их систем, где нужно находить только целочисленные корни. В романе «Война и мир» Толстой описал такое уравнение с двумя неизвестными x + y = 43: «*Долохов уже не слушал и не рассказывал историй; он следил за каждым движением рук Ростова и бегло оглядывал изредка свою запись за ним. Он решил продолжать игру до тех пор, пока запись эта не возрастет до сорока трех тысяч. Число это было им выбрано потому, что сорок три составляло сумму сложенных его годов с годами Сони*».

На рис. 8.16 показан поиск целочисленных корней этого уравнения. Оно, конечно, предельно простое, но, тем не менее, мы решили его в среде SMath с подключенным к ней Maple-функции `isolve`, где префикс `i` означает целочисленность (integer). Встроенная переменная `_Z1` – это множество целых чисел.

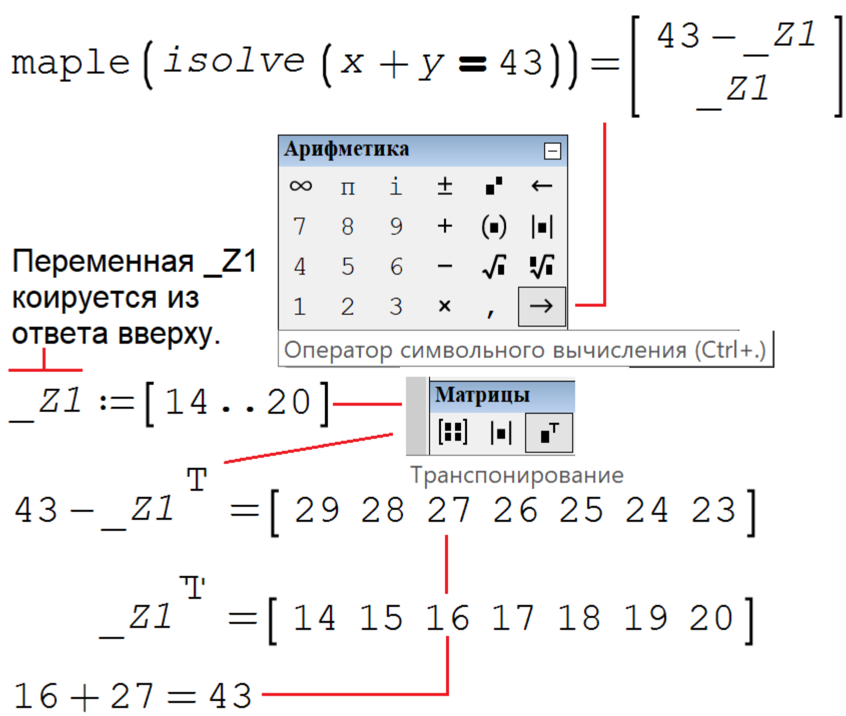


Рис. 8.16. Поиск целочисленных корней уравнения

Если переменной `_Z1` присвоить ряд (вектор) натуральных чисел от 14 до 20 (возможный возраст Сони), то можно найти возможный возраст Долохова – от 22 до 28 лет. Но возраст Сони в этот момент легко найти из самого романа – 16 лет. Значит, Долохову было 27 лет:

16+27=43! В наше время такие девочки ещё не получают предложения руки и сердца – они математику изучают в школе, вернее, готовятся к пресловутым ЕГЭ по математике.

Расчёт на рис. 8.16 предельно прост. Он продемонстрирован с единственной целью – для знакомства с Maple-функцией `isolve` в среде SMath. А вот на рис. 8.17 показано более сложное решение.

Автор в школьные годы, когда узнал об уже упомянутой теореме Ферма, сразу стал перебирать (комбинаторика!) натуральные числа больше двух, чтобы опровергнуть эту теорему – настолько она казалась парадоксальной и удивительной. В наше время такую наивную «проверку» можно автоматизировать – попытаться сделать её на компьютере: решить с помощью функции `isolve` уравнение Ферма для разных значений n – см. рис. 8.17.

$n := 2$

$$\mathrm{maple}\left(isolve\left(a^{n}+b^{n}=c^{n}\right)\right)=\begin{bmatrix} -\dfrac{2\cdot\_Z3\cdot\_Z1\cdot\_Z2}{igcd\left(-2\cdot\_Z1\cdot\_Z2,\,(\_Z1-\_Z2)\cdot(\_Z1+\_Z2),\,\_Z1^{2}+\_Z2^{2}\right)} \\ \dfrac{\_Z3\cdot(\_Z1-\_Z2)\cdot(\_Z1+\_Z2)}{igcd\left(-2\cdot\_Z1\cdot\_Z2,\,(\_Z1-\_Z2)\cdot(\_Z1+\_Z2),\,\_Z1^{2}+\_Z2^{2}\right)} \\ \dfrac{\_Z3\cdot\left(\_Z1^{2}+\_Z2^{2}\right)}{igcd\left(-2\cdot\_Z1\cdot\_Z2,\,(\_Z1-\_Z2)\cdot(\_Z1+\_Z2),\,\_Z1^{2}+\_Z2^{2}\right)} \end{bmatrix}$$

$\_Z1 := 1 \qquad \_Z2 := 3 \qquad \_Z3 := 7$

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} := \mathrm{maple}\left(\left[\begin{bmatrix} -\dfrac{2\cdot\_Z3\cdot\_Z1\cdot\_Z2}{igcd\left(-2\cdot\_Z1\cdot\_Z2,\,(\_Z1-\_Z2)\cdot(\_Z1+\_Z2),\,\_Z1^{2}+\_Z2^{2}\right)} \\ \dfrac{\_Z3\cdot(\_Z1-\_Z2)\cdot(\_Z1+\_Z2)}{igcd\left(-2\cdot\_Z1\cdot\_Z2,\,(\_Z1-\_Z2)\cdot(\_Z1+\_Z2),\,\_Z1^{2}+\_Z2^{2}\right)} \\ \dfrac{\_Z3\cdot\left(\_Z1^{2}+\_Z2^{2}\right)}{igcd\left(-2\cdot\_Z1\cdot\_Z2,\,(\_Z1-\_Z2)\cdot(\_Z1+\_Z2),\,\_Z1^{2}+\_Z2^{2}\right)} \end{bmatrix}\right]\right)=\begin{bmatrix} -21 \\ -28 \\ 35 \end{bmatrix}$$

$a^{2}+b^{2}=1225 \qquad c^{2}=1225$

$n := 3 \qquad \mathrm{maple}\left(isolve\left(a^{n}+b^{n}=c^{n}\right)\right)=$ "Стек пуст."

$n := 33 \qquad \mathrm{maple}\left(isolve\left(a^{n}+b^{n}=c^{n}\right)\right)=$ "Стек пуст."

Рис. 8.17. Решение уравнения Ферма

В ответе для n=2 в решении прописана функция `igcd` – это наибольший общий делитель (greatest common divisor). Можно менять значения целочисленных переменных $\_Z1$, $\_Z2$, _Z3 (см. пример на рис. 8.16) и получать все новые и новые наборы решений – значений целочисленных неизвестных a, b и c. Одно решение на рис. 8.17: $21^2+28^2=35^2$. Но при n=3 и более решений нет. Можно увеличивать значение n и убеждаться в отсутствие решения. Мы это сделали для n=33. Если это значение увеличивать дальше, то ответа по-прежнему не будет. Будет только увеличиваться время счета. Это, конечно, не доказательство теоремы Ферма, а просто упражнение на компьютере.

Поговорим ещё о внучках и об уравнениях.

Преподавание математики детям начинается со знакомства с целыми ненулевыми положительными числами, с натуральными числами (вспомним историю о Буратино: «*Предположим, что у вас в кармане два яблока. Некто взял у вас одно яблоко. Сколько у вас осталось яблок?»)*, а также простых (обыкновенных) дробей (см. рисунки выше), состоящих из этих чисел[9]. Если пропустить этот этап обучения и сразу начать работать с десятичными дробями и с калькулятором (а это современная распространенная в мире практика), то, как считают многие методисты, дальнейшее изучение математики пойдет вкривь и вкось. Если вообще пойдет. Но на уроках математики можно использовать не обычный, а особый калькулятор, умеющий работать с простыми дробями, находить наименьшее общее кратное, наибольший общий делитель и др. Так можно освободить младшеклассников от нудной рутинной работы[10], оставив им простор для творчества со сложными дробями. Далее может случиться волшебный переход от «нудной» арифметики к «волшебной» комбинаторике – к интереснейшему разделу математики, тесно связанному с современным цифровым миром, с программированием, с шифровальным делом (см. занятие 14). А это не только увлекательное занятие на уроках МИТ, но и хороший «хлеб с маслом» на будущее, на наше цифровое будущее. Работа с «нудными» простыми дробями связана с комбинаторикой и по формальному признаку: функция lcm (наименьшее общее кратное), использованная в расчете на рис. 8.14, в математических пакетах входит в группу встроенных функций под названием «Комбинаторика». Этот термин ввел в математику великий Лейбниц в 1666 году. Число 666,

[9] Продолжение истории о Буратино «*У вас есть шесть яблок. Некто взял у вас половину. Сколько яблок у вас осталось? Ответ – пять с половиной».*

[10] В мемуарах великих людей творческих профессий часто выделяются две основные темы: как я пил с друзьями в общаге и как я мучался с физикой и математикой в школе.

кстати, часто пытаются обработать методами комбинаторики, а не только методами всяких псевдонаучных теорий.

Задание читателям.

1. Решить на компьютере задачи, приведенные здесь [8], даже в том случае, когда задачи можно решить в уме.
2. Вывести формулы для подсчета значений «великой троицы» комбинаторики – сочетание (рис. 8.3), сочетание с повторением (рис. 8.4) и набор (рис. 8.11).
3. Суперзадание – понять доказательство теоремы Ферма.

Литература и ссылки:

1. https://ilibrary.ru/text/1334/p.1/index.html
2. https://scholar-vit.livejournal.com/141150.html
3. Очков В.Ф. Моя армейская энергетика // Энергия: экономика, техника, экология. № 2, 2022 (http://www.twt.mpei.ac.ru/ochkov/EEE-2-2022-My-Energy.pdf)
4. Ершова А.П., Голобродько В.В. Самостоятельные и контрольные работы по математике для 6 класса. 6-е изд., перераб. М.: Илекса. 2023 (https://ilexa.ru/kniga/sam-i-kontr-raboty-po-matematike-dlja-6-kl-6-e-izd-pererab)
5. Valery Ochkov. 2^5 Problems for STEM Education. (https://www.routledge.com/25-Problems-for-STEM-Education/Ochkov/p/book/9780367345259)
6. Valery Ochkov, Alan Stevens, Anton Tikhonov. STEM Problems with Mathcad and Python. Chapman & Hall (https://www.routledge.com/STEM-Problems-with-Mathcad-and-Python/Ochkov-Stevens-Tikhonov/p/book/9781032131658)
7. https://resh.edu.ru/subject/lesson/6879/conspect/315397
8. https://urok.1sept.ru/articles/537155