

Старая задача на новый лад

В.Очков

Была и есть очень интересная книга Сергея Александровича Рачинского (http://ru.wikipedia.org/wiki/Рачинский,_Сергей_Александрович) «1001 задача для умственного счета». В печатном виде она издавалась в XIX веке. В наше время она возродилась в виде сайта www.1001task.ru с удобными средствами поиска и комментирования задач. На этом сайте есть ссылка на очень интересную дискуссию, которая развернулась в журнале «Наука и жизнь» по проблеме устного счета в современном образовательном процессе [1] - <http://www.nkj.ru/archive/articles/6347/>.

Владельцы «яблочных» устройств iPhone и iPad могут бесплатно скачать задачник Рачинского из сетевого магазина AppStore и поместить его в библиотеку iBooks.

На сайте 1001task.ru особо подчеркивается, что все задачи книги нужно решать сугубо в уме без привлечения каких-либо счетных устройств и приспособлений: бумаги и ручки, калькулятора и проч. С бумажным вариантом книги это требование выполнить несложно – ушел с задачником в глухой лес и решай себе в уме на здоровье. Но с электронными версиями книги это требование выполнить весьма сложно. Ведь второе, устаревшее название компьютера – это электронно-вычислительная машина (ЭВМ). Да и само слово компьютер (computer) означает вычислитель... На компьютере (даже если это не традиционный «вычислитель, а смартфон или «таблетка») есть под рукой счетные устройства. Это не только тривиальный калькулятор, приложенный к операционной системе, но и программы, специально предназначенные для решения сложных математических задач: Mathematica, Maple, Matlab, Mathcad, SMath и др. Вот примеры решения некоторых задач из книги Рачинского, выполненные в среде Mathcad [2] – см. рис. 1-5.

The screenshot shows the Mathcad software interface. At the top, there is a menu bar with 'Математика' (Mathematics) selected. Below it, there are icons for mathematical symbols and a 'Блок текста' (Text Block) button. A tooltip for the 'Блок текста' button is visible, containing the text: 'А Текстовое поле', 'Блок текста (Ctrl+Shift+T)', 'Вставка текстовой области, которая растягивается по ширине страницы. Текстовые блоки сдвигают другие области вниз по мере своего расширения.', and 'Чтобы открыть справку, нажмите клавишу F1.' Below the tooltip, there is a section titled 'Животные' (Animals) containing a word problem: 'Я за 200 руб. купил собаку, корову и лошадь. Корова втрое дороже собаки, лошадь вчетверо дороже собаки вместе с коровой. Цены?'. Below the text, there is a mathematical representation of the problem:
$$\begin{bmatrix} 200 \text{ руб} = \text{собака} + \text{корова} + \text{лошадь} \\ \text{корова} = 3 \cdot \text{собака} \\ \text{лошадь} = 4 \cdot (\text{собака} + \text{корова}) \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{solve, } \begin{bmatrix} \text{собака} \\ \text{корова} \\ \text{лошадь} \end{bmatrix}} [10 \text{ руб} \quad 30 \text{ руб} \quad 160 \text{ руб}]$$

Рис. 1.

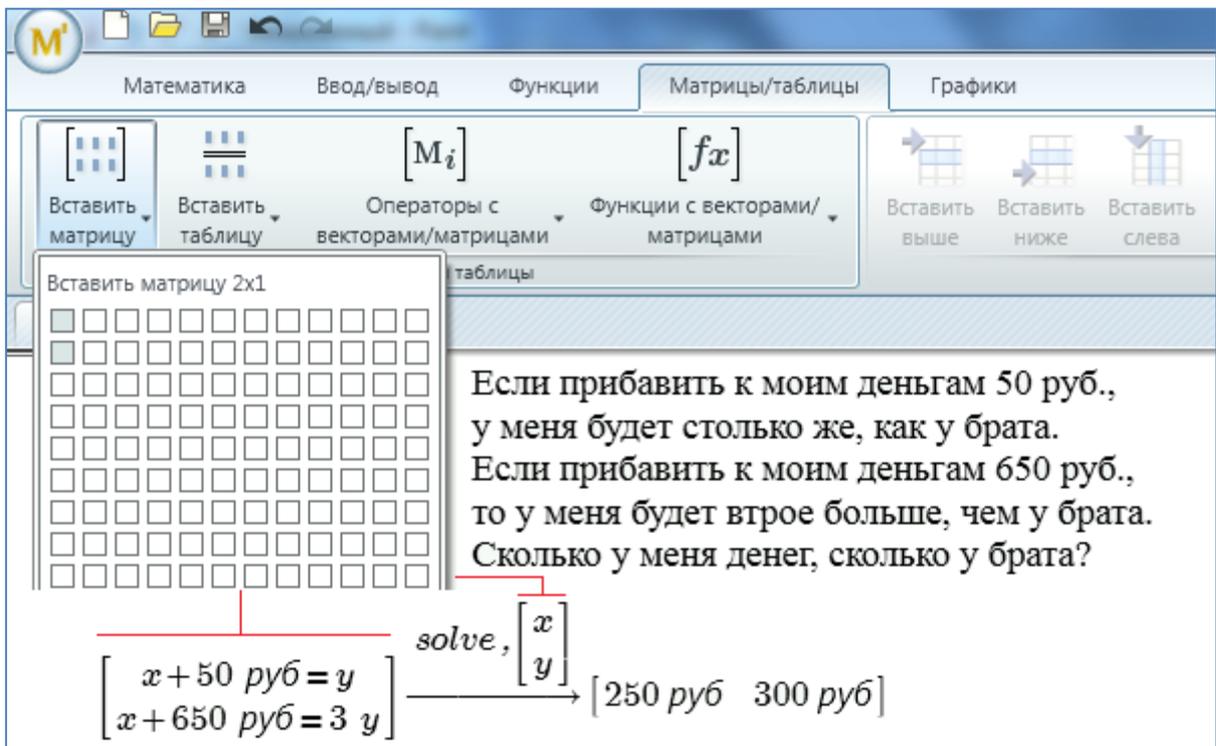


Рис. 2.

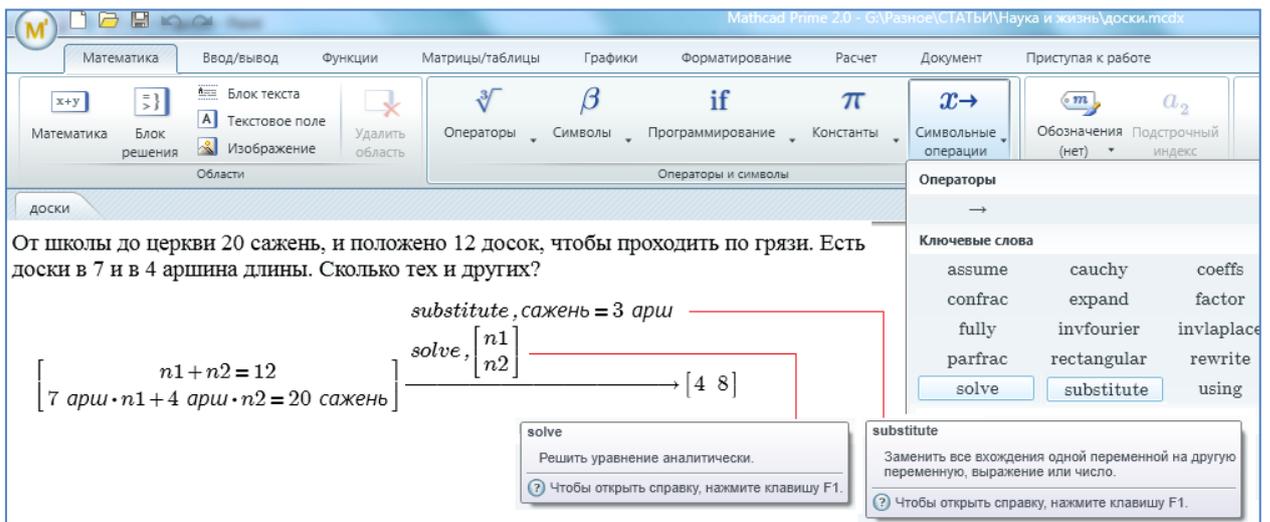


Рис. 3.

1000 вершков — сколько сажень, аршин и вершков?

$$\frac{1000 \text{ вершок}}{\text{сажень}} \xrightarrow{\substack{\text{substitute, сажень} = 3 \text{ арш} \\ \text{substitute, арш} = 16 \text{ вершок}}} \frac{125}{6} = 20.833$$

$$\frac{1000 \text{ вершок} - 20 \text{ сажень}}{\text{арш}} \xrightarrow{\substack{\text{substitute, сажень} = 3 \text{ арш} \\ \text{substitute, арш} = 16 \text{ вершок}}} \frac{5}{2} = 2.5$$

$$\frac{1000 \text{ вершок} - 20 \text{ сажень} - 2 \text{ арш}}{\text{вершок}} \xrightarrow{\substack{\text{substitute, сажень} = 3 \text{ арш} \\ \text{substitute, арш} = 16 \text{ вершок}}} 8$$

Ответ 1000 вершков = 20 сажень 2 аршина 8 вершков

Рис. 4.

У медника было 8 кусков меди, весом каждый в 1 фунт 8 лотов. Из этой меди он сделал чайники, весом каждый 1 фунт 21 лот 1 золотник. Сколько чайников?

$$8 \cdot (\text{фунт} + 8 \text{ лот}) = n \cdot (\text{фунт} + 21 \text{ лот} + \text{золотник}) \xrightarrow{\substack{\text{substitute, фунт} = 32 \text{ лот} \\ \text{substitute, лот} = 3 \text{ золотник} \\ \text{solve, } n}} 6$$

Рис. 5.

Грешно, конечно, смотреть свысока на автора задачника и его читателей. Вы, мол, ломали и ломаете головы, придумывая задачи¹ и решая их в уме, а мы разделяемся с ними в два счета – раз-два и ответ готов...

Что можно сказать по этому поводу!? Зачем мы в наш компьютерный век снова и снова обращаемся к старым задачам!?

Во-первых, устный счет – это прекрасная гимнастика для ума². И использование тут компьютера или калькулятора равносильно дооборудованию спортивного тренажера (современный гимнастический снаряд для тела³)... гидроусилителями.

Во-вторых,... см. название статьи.

Решение задач Рачинского, в основном, сводится к поиску корней алгебраических уравнений и их систем. В среде Mathcad для решения таких задач предусмотрен оператор **solve**. В некоторых задачах его нужно дополнить оператором **substitute**, заменяющим одну переменную на другую

¹ Интересно, составлял ли Рачинский свой задачник «сугубо в уме» или он все-таки пользовался ручкой, бумагой или счетами – компьютером 19-го века.

² В наше время *программирование* лучшая гимнастика для ума. Но далеко не всем доступны эти «умственные физические упражнения». Некоторые форумы (форум упоминавшихся математических пакетов <http://forum.exponenta.ru>, например) при входе требует сложить четыре числа. Многие, сидящие, за компьютером не могут это сделать в уме и прибегают к помощи калькулятора.

³ Автор в Интернете наткнулся на такую фотографию. Пустая лестница. Справа и слева от нее эскалаторы, поднимающие и опускающие довольно тучных людей. Вверху, в конце лестницы здание с вывеской «Fitness lub» – см. <http://www.goodexperience.com/broken/i/04/02/america-fitness-s.jpg>

или на выражение⁴. С помощью этого оператора мы подсказали компьютеру, что в сажени три аршина (рис. 3), в фунте 32 лота, а в лоте 3 золотника (рис. 3⁵), т.е. мы научили компьютер обращаться со старыми русскими мерами веса и длины, какие были в ходу в момент написания задачника. Задача на рис. 4 непосредственно учит нас работать со старыми недесятичными единицами длины⁶. Такая задача, кстати говоря, актуальна и в наши дни. Кто может сходу подсчитать в уме, сколько лет, месяцев, недель, дней, часов, минут и секунд в миллиарде секунд⁷? На рис. 6 показано решение этой задачи в среде Mathcad⁸.

$год := 365 \text{ day}$ $месяц := 30 \text{ day}$ $неделя := 7 \text{ day}$
 $t := 10^9 \text{ s}$ секунды
 $t = 31.71 \text{ год}$ 31 год (по 365 дней)
 $t - 31 \text{ год} = 8.636 \text{ месяц}$ 8 месяцев (по 30 дней)
 $t - 31 \text{ год} - 8 \cdot \text{месяц} = 2.725 \text{ неделя}$ 2 недели
 $t - 31 \text{ год} - 8 \cdot \text{месяц} - 2 \cdot \text{неделя} = 5.074 \text{ day}$ 5 дней
 $t - 31 \text{ год} - 8 \cdot \text{месяц} - 2 \cdot \text{неделя} - 5 \text{ day} = 1.778 \text{ hr}$ 1 час
 $t - 31 \text{ год} - 8 \cdot \text{месяц} - 2 \cdot \text{неделя} - 5 \text{ day} - 1 \text{ hr} = 46.667 \text{ min}$ 46 минут
 $t - 31 \text{ год} - 8 \cdot \text{месяц} - 2 \cdot \text{неделя} - 5 \text{ day} - 1 \text{ hr} - 46 \text{ min} = 40 \text{ sec}$
 Проверка
 $31 \text{ год} + 8 \cdot \text{месяц} + 2 \cdot \text{неделя} + 5 \text{ day} + 1 \text{ hr} + 46 \text{ min} + 40 \text{ sec} = 1000000000 \text{ s}$
 Встроенная в Mathcad недесятичная единица времени - часы:минуты:секунды
 $t = "277777:46:40" \text{ hhmmss}$

Рис. 6.

Так какой же «новый лад» можно «приладить» к старым арифметическим задачам!?

1. Тексты задач из книги Рачинского заканчиваются численными ответами с единицами измерений или без оных⁹. Наши компьютерные решения задач (см. рис. 1-5) можно рассматривать как... ответы на задачи. Более того, в таких ответах записано и современное компьютерное решение задач. Задачник с такими ответами превращается в решебник, задачник с подробным описанием решений.
2. Авторы современных задачников по математике, предназначенных для устного счета и/или для решения с привлечением бумаги с ручкой и калькулятора могут

⁴ На рис. 1-3 дополнительно показаны инструменты решения задач и оформления решения: операторы символьной математики Mathcad (рис. 3), команда меню вставки комментария (рис. 1) и команда меню вставки вектора с двумя элементами (матрица 2 на 1), куда записывается система уравнений и неизвестные уравнения (рис. 2).

⁵ Современные единицы измерения встроены в Mathcad, но старых русских единиц в нем нет.

⁶ Переход от недесятичной системы исчислений (в версте 500 сажений, в сажени 3 аршина, в аршине, 16 вершков) к десятичной (в километре 1000 метров, в метре 100 см, в сантиметре 10 миллиметров и т.д. до набившим всем оскомину нанометров) – это первый удар по устному счету. Калькулятор с компьютером только добивают его...

⁷ «Десятичность» не до конца охватила систему измерений. Кроме времени, тут можно упомянуть и угловые единицы с градусами, минутами и секундами...

⁸ Сравнивая рисунок 4 с рисунком 6, где решаются одинаковые по сути задачи, можно отметить, что в первом случае задействована *символьная математика* пакета Mathcad, а во втором – *численная*.

⁹ В современных задачниках ответы, как правило, помещают в конце книги.

использовать не только «бумагу с ручкой и калькулятор», но и вышеупомянутые математические программы для составления задач и, главное, для проверки правильности и единственности решения – см. сноску 1. Учитель тут должен идти впереди учеников. У нас же часто получается так, что школьники прекрасно знают компьютер, а учитель даже боится подойти к нему. При этом данная «компьютеробоязнь» маскируется заявлениями, что «компьютер в процессе обучения приносит только вред» – мешает, например, освоению приемов устного счета.

3. Задачи Рачинского и другие подобные можно модернизировать так, чтобы их без компьютера решить было бы довольно сложно. Пример на рис. 7.

Математика

if
Программирование

Программирование

if else else if
also if while for break continue
return try

Цикл for (Ctrl+Shift+")
Вставка цикла for.
Чтобы открыть справку, нажмите клавишу F1.

У медника было 8 кусков меди, весом каждый в 1 фунт 8 лотов. Из этой меди он сделал 6 чайников, весом каждый 1 фунт 21 лот 1 золотник. Сколько лотов в фунте (Nлот) и сколько золотников в лоте (Nзолотник)?

Ответ :=

```

фунт ← 1
i ← 0
for Nлот ∈ 1..100
  for Nзолотник ∈ 1..100
    if 8 · (фунт + 8 ·  $\frac{\text{фунт}}{N\text{лот}}$ ) = 6 · (фунт + 21 ·  $\frac{\text{фунт}}{N\text{лот}}$  +  $\frac{\text{фунт}}{N\text{лот} \cdot N\text{золотник}}$ )
      M(i) ←  $\begin{bmatrix} N\text{лот} \\ N\text{золотник} \end{bmatrix}$ 
      i ← i + 1
  
```

M Ответ = $\begin{bmatrix} 32 & 34 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ В фунте 32 лота, в лоте 3 золотника.

Рис. 7.

Гимназист и неграмотный русский крестьянин 19-го века прекрасно знали, сколько фунтов в пуде, вершков в аршине и аршин в сажени. Современный школьник за такой информацией полезет в справочник или Интернет. А если нет справочника под рукой, а Сеть временно недоступна¹⁰? Не беда! В задачу о меднике (рис. 5) с ответом (6 чайников) «вшито» соотношение фунта, лота и

¹⁰ Многие не могут нормально работать на компьютере с отключенным Интернетом, даже если Интернет в данный момент не нужен, более того, вреден – отвлекает от выполнения срочной работы. Возникает чувство, что тебя заперли в комнате...

золотника. Решая новую задачу (рис. 7), школьнику придется изощряться не в устном счете, а в умении составлять программу для компьютера. На рис. 7 показано одно из возможных решений задачи, основанное на переборе всех возможных вариантов: в фунте может быть от 1 до 100 лотов, а в лоте - 1 до 100 золотников¹¹. Кстати говоря, почти все задачи Рачинского подобраны так, что у них целочисленные ответы. При решении таких задач можно успешно использовать метод перебора, расцветший в эпоху компьютеров с их невероятным быстродействием [4]. Чему равен кубический корень из 1728!? Перебрал числа в разумном интервале (от 1 до 100, например) и запомнил то, куб которого равен 1728! В уме этого, конечно, делать не будешь, а на компьютере – пожалуйста¹². Пусть читатель попробует перебором вариантов решить задачу на рис. 1 без указания того, что от школы до церкви проложено именно 12 досок: «От школы до церкви 20 сажень, и положены доски, чтобы проходить по грязи¹³. Есть доски в 7 и в 4 аршина длины. Сколько тех и других? [Ответ: 4 и 8 или 8 и 1]» - см. рис. 1а. А если короткая доска будет длиной в один аршин, то вариантов укладки досок будет уже восемь! Хотя правильный ответ будет 8 и одна доска – укладывают сначала длинные доски, а потом, когда очередная длинная не умещается, кладем на дороге короткие (короткую)... Тут уже к математике примешиваются другие научные дисциплины – экономика, например. Удельная цена длинной доски (руб/м) обычно меньше короткой: второй вариант ответа в задаче о досках (8 досок по 7 аршин и одна доска в один аршин) будет дешевле и из-за того, что девять досок укладывать проще, чем двенадцать...

¹¹ Да, именно так. Перебор нужно начинать не с двух, а с единицы. Ведь, в задаче может быть подвох – используются одинаковые единицы измерения с разным названием: «Я заплатил за товар стольник. Сколько я заплатил рублей и целковых?»

¹² Кубический корень из 1728 – это не одно число, а три: двенадцать и еще два комплексных числа. В этом можно убедиться, если решить в Mathcad уравнение $x^3=1728$. Перебором тут можно получить только один ответ. Такой же неполный ответ дают и калькуляторы с компьютерами – см. рис. 1b.

¹³ Эта российская проблема не решена до сих пор. Вспомним о двух наших бедах – «о дураках и дорогах»!

Операторы

Векторы и матрицы

\times	$\ x\ $	$[]$	$M^{(i)}$	$M,$
$M^{(i)}$	M^T	1..n	1,3..n	\vec{v}

Область дискретных значений (..)
 Для x, z определяет последовательность чисел с шагом 1, начиная с x и заканчивая z.
 ? Чтобы открыть справку, нажмите клавишу F1.

От школы до церкви 20 сажень, и положены доски, чтобы проходить по грязи. Есть доски в 7 и в 4 аршина длины. Сколько тех и других?

Ответ :=

```

[арш ← 1 сажень ← 3 арш i ← 0]
for доска7 ∈ 1..100
  for доска4 ∈ 1..100
    if 20 сажень = доска7·7 арш + доска4·4 арш
      [M(i) ← [доска7 доска4] i ← i+1]
  
```

M

Ответ = $\begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 8 & 1 \end{bmatrix}$

Рис. 1а.

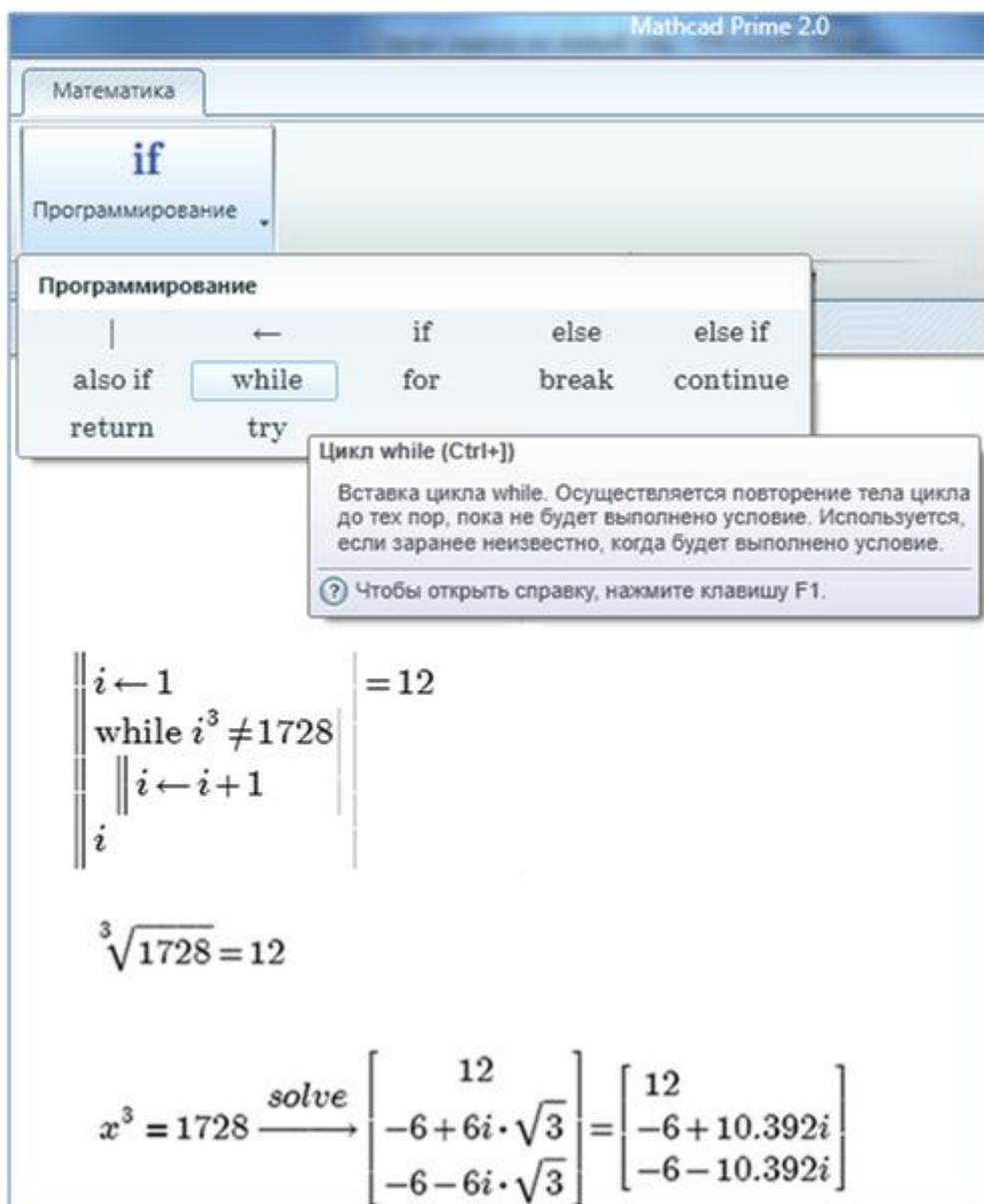


Рис. 1b.

Задачник Рачинского интересен и в том плане, что по нему можно узнать, как жили люди в позапрошлом веке, чем они занимались, чем торговали и какие были цены... В художественной литературе (а задачник Рачинского, помимо прочего, отличается и хорошим литературным стилем) часто можно встретить математические выкладки, касающиеся, в основном финансовых проблем [3] и не только. Этой теме будет посвящена следующая статья - <http://twm.mpei.ac.ru/ochkov/Mathcad-15/SystemEquations.pdf>.

Литература:

1. В.Доценко В. Пятое правило арифметики // Наука и жизнь, № 12, 2004 г. <http://www.nkj.ru/archive/articles/457/>
2. Очков В. Mathcad 14 для студентов, инженеров и конструкторов // БХВ-Петербург, 2007 г. http://twm.mpei.ac.ru/ochkov/Mathcad_14/RusIndex.html
3. Карпушина Н. Проценты простые и сложные. Уроки арифметики в классической литературе // Наука и жизнь, № 9, 2009 г. <http://www.nkj.ru/archive/articles/16385/>

4. Очков В.Ф., Дробилко В.С. На компьютер надейся, а сам не плошай! // Информатика в школе, №3(76) 2012 г. <http://tw.t.mpei.ac.ru/ochkov/Mathcad-15/USA.pdf>