

Системы уравнений. Уроки математики в классической литературе

Очков В.Ф., Чжо Ко Ко

В художественной литературе часто можно встретить математические выкладки. Как правило, это несложные финансовые выкладки, но встречаются и довольно сложные общематематические расчеты. Описание таких расчетов можно найти в [1 и 2]. Они, в основном, сводятся к решению несложных алгебраических уравнений и ведутся либо в уме, либо с привлечением «компьютеров», какие были доступны героям литературных произведений, а вернее, их авторам (бумага и карандаш, счеты и др.) во времена написания книг.

Кроме простых финансовых расчетов в литературе можно встретить и более сложные задачи, решение которых требует привлечения уже не калькулятора, выполняющего отдельные арифметические действия (сложение/вычитание, умножение/деление, взятие процента и т.д.), а компьютера со специализированными математическими программами.

Рассмотрим три задачи из классической отечественной и зарубежной литературы, связанные с решением систем алгебраических уравнений (САУ).

Рассказ А.П. Чехова «Репетитор» начинается с такого диалога:

— Теперь по арифметике... Берите доску. Какая следующая задача?

Петя плюет на доску и стирает рукавом. Учитель берет задачник и диктует:

— "Купец купил 138 арш. черного и синего сукна за 540 руб. Спрашивается, сколько аршин купил он того и другого, если синее стоило 5 руб. за аршин, а черное 3 руб.?" Повторите задачу.

Петя повторяет задачу и тотчас же, ни слова не говоря, начинает делить 540 на 138.

— Для чего же вы это делите? Постойте! Впрочем, так... продолжайте. Остаток получается? Здесь не может быть остатка. Дайте-ка я разделю!

Зиберов делит, получает 3 с остатком и быстро стирает.

"Странно... — думает он, ероша волосы и краснея. — Как же она решается? Гм!.. Это задача на неопределенные уравнения, а вовсе не арифметическая..."

Учитель глядит в ответы и видит 75 и 63.

"Гм!.. странно... Сложить 5 и 3, а потом делить 540 на 8? Так, что ли? Нет, не то".

— Решайте же! — говорит он Пете.

— Ну, чего думаешь? Задача-то ведь пустяковая! — говорит Удодов Пете. — Экий ты дурак, братец! Решите уж вы ему, Егор Алексеич.

Егор Алексеич берет в руки грифель и начинает решать. Он заикается, краснеет, бледнеет.

— Это задача, собственно говоря, алгебраическая, — говорит он. — Ее с иском и игреком решить можно. Впрочем, можно и так решить. Я, вот, разделил... понимаете? Теперь, вот, надо вычесть... понимаете? Или, вот что... Решите мне эту задачу сами к завтраму... Подумайте...

Петя ехидно улыбается. Удодов тоже улыбается. Оба они понимают замешательство учителя. Ученик VII класса еще пуще конфузится, встает и начинает ходить из угла в угол.

— И без алгебры решить можно, — говорит Удодов, протягивая руку к счетам и вздыхая. — Вот извольте видеть...

Он щелкает на счетах, и у него получается 75 и 63, что и нужно было.

— Вот-с... по-нашему, по-неученому.

Такую систему двух линейных алгебраических линейных уравнений (СЛАУ) с двумя неизвестными (а именно она просматривается в приведенном диалоге: $x + y = 138$ и $5x + 3y = 540$) можно решить без компьютера и даже без калькулятора, выполнив несложные арифметические действия на бумаге или просто в уме. На счетах (как Удодов-старший, отец Пети) это сейчас, конечно, мало кто сделает¹. Мы эту задачу решим на компьютере (на современных «счетах»), воспользовавшись самым популярным «суперкалькулятором» – программой Mathcad – см. рис. 1.

The image shows a Mathcad Prime interface. On the left, a system of two linear equations is entered: $x + y = 138$ and $5 \frac{\text{руб}}{\text{арш}} \cdot x + 3 \frac{\text{руб}}{\text{арш}} \cdot y = 540 \text{ руб}$. An arrow labeled 'solve' points to the right, with a vector $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ above it. To the right of the arrow, the solution is displayed as a vector: $\begin{bmatrix} 63 \text{ арш} \\ 75 \text{ арш} \end{bmatrix}$.

Рис. 1. Решение задачи о купце и сукне в среде Mathcad Prime

На рис. 1 показано, как в среде Mathcad [3] решается задача о купце и сукне с помощью оператора *solve*, предназначенного для поиска корней одиночных алгебраических уравнений и их систем, линейных и нелинейных: «Вот-с... по-нашему, по-компьютерному...»!

В задаче о купце и сукне число уравнений *равно* числу неизвестных. Но в жизни и, соответственно, в художественной литературе так бывает далеко не всегда. Два последующих примера тому подтверждение.

В повести Ф.М. Достоевского «Игрок» можно найти² семь цитат, в которых зашифрованы курсы европейских валют во времена написания повести:

Цитата 1

— Вы их немедленно получите, — ответил генерал, покраснев немного, порывлся у себя в бюро, справился в книжке, и оказалось, что за ним моих денег около **ста двадцати рублей**.

— Как же мы сосчитаемся, — заговорил он, — надо переводить на талеры. Да вот возьмите **сто талеров**, круглым счетом, — остальное, конечно, не пропадет.

и далее

¹ Можно предположить, что отец Пети решил задачу так (в пять действий): 1) Сколько заплатил бы купец, если б все сукно было черное – $138 \cdot 3 = 414$; 2) На сколько больше пришлось заплатить за синее сукно – $540 - 414 = 126$; 3) На сколько синее сукно дороже черного – $5 - 3 = 2$; 4) Сколько куплено синего сукна $126 : 2 = 63$ и 5) Сколько куплено черного сукна – $138 - 63 = 75$. Можно также предположить, что Петин отец не мог сосчитать в уме, сколько будет, если 138 помножить на три, и должен был брать в руки счеты. В наше же время многие тоже не могут проводить в уме или на бумаге такие выкладки и прибегают к помощи калькулятора или даже компьютера. Репетитор Зиберов тут, в принципе, был прав, когда говорил, что задачу «с иском и игреком решить можно. Тут просматривается типичный педагогический конфликт. Взрослые (родители) пытаются помочь ребенку решить школьную задачу и понимают, что она сводится к решению уравнения или системы уравнений. Но ребенок тут возражает и говорит, что в школе их учат по-другому решать такие задачи – не через составление и решение уравнений (общий подход к решению), а через логические рассуждения и несложные арифметические выкладки (частный подход к конкретной задаче).

² А в эру Интернета и электронных библиотек это делать стало намного проще: задал ключевой слово поиска и считай, сколько раз оно встречается в тексте.

Вам следует дополнить с меня эти четыре **фридрихсдора** и **три флорина** на здешний расчет.

Цитата 2

Полина просто рассердилась, когда я передал ей всего только **семьсот гульденов**.

и далее

Слушайте и запомните: возьмите эти **семьсот флоринов** и ступайте играть, выиграйте мне на рулетке сколько можете больше; мне деньги во что бы ни стало теперь нужны.

Цитата 3

Я начал с того, что вынул **пять фридрихсдоров**, то есть **пятьдесят гульденов**, и поставил их на четку.

Цитата 4

— Да-с, вот взяла да и выиграла двенадцать тысяч флоринов! Какое двенадцать, а золото-то? С золотом почти что **тринадцать** выйдет. Это сколько по-нашему? Тысяч шесть, что ли, будет?

Я доложил, что и за **семь** перевалило, а по теперешнему курсу, пожалуй, и до **восьми** дойдет.

Цитата 5

— Oui, madame, — вежливо подтвердил крупер, — равно как всякая единичная ставка не должна превышать разом **четыре тысячи флоринов**, по уставу, — прибавил он в пояснение.

Я поставил самую большую позволенную ставку, в **четыре тысячи гульденов**, и проиграл.

Цитата 6

Ей приходилось получить ровно **четыреста двадцать фридрихсдоров**, то есть **четыре тысячи флоринов** и **двадцать фридрихсдоров**.

Цитата 7

— Полина, вот **двадцать пять тысяч флоринов** — это **пятьдесят тысяч франков**, даже больше.

Если в рассказе А.П.Чехова уравнения были прописаны в явном виде, то в «Игроке» Ф.М. Достоевского они зашифрованы в цитатах. Составив и решив соответствующую систему уравнений, можно узнать курсы валют (талер, фридрихсдор, флорин, гульден и франк) по отношению к рублю:

$$120 \text{ рублей} = 100 \text{ талеров} + 4 \text{ фридрихсдора} + 3 \text{ флорина} \text{ (цитата 1 – см. выше)}$$

$$700 \text{ гульденов} = 700 \text{ флоринов} \text{ (цитата 2)}$$

$$5 \text{ фридрихсдоров} = 50 \text{ гульденов} \text{ (цитата 3)}$$

$$13 \text{ 000 флоринов} = 8 \text{ 000 рублей} \text{ (цитата 4)}$$

$$4 \text{ 000 флоринов} = 4 \text{ 000 гульденов} \text{ (цитата 5)}$$

$$420 \text{ фридрихсдора} = 4 \text{ 000 флоринов} + 20 \text{ фридрихсдоров} \text{ (цитата 6)}$$

$$25 \text{ 000 флоринов} = 50 \text{ 000 франков} \text{ (цитата 7)}$$

Если число уравнений (у нас их семь) превышает число неизвестных (у нас их пять), то такая система уравнений называется *переопределенной*.

Задачу «Игрока» также можно решить без компьютера, последовательно высчитывая курсы отдельных валют (гульден равен флорину, фридрихсдор равен десяти гульденам и т.д.) и определить их стоимость по отношению к рублю. Но мы, как и в случае с первой задачей, попросим это сделать компьютер. Пусть он сам подставляет и упрощает, что считает нужным – см. рис. 2.

$\left[\begin{array}{l} 120 \text{ руб} = 100 \text{ талер} + 4 \text{ фридрихсдор} + 3 \text{ флорин} \\ 700 \text{ гульден} = 700 \text{ флорин} \\ 5 \text{ фридрихсдор} = 50 \text{ гульден} \\ 13000 \text{ флорин} = 8000 \text{ руб} \\ 4000 \text{ флорин} = 4000 \text{ гульден} \\ 420 \text{ фридрихсдор} = 4000 \text{ флорин} + 20 \text{ фридрихсдор} \\ 25000 \text{ флорин} = 50000 \text{ франк} \end{array} \right]$	$\xrightarrow{\text{solve, } \left[\begin{array}{l} \text{талер} \\ \text{фридрихсдор} \\ \text{флорин} \\ \text{гульден} \\ \text{франк} \end{array} \right], \text{float, 2}}$	$[0.94 \cdot \text{руб} \quad 6.2 \cdot \text{руб} \quad 0.62 \cdot \text{руб} \quad 0.62 \cdot \text{руб} \quad 0.31 \cdot \text{руб}]$
---	---	--

Рис. 2. Решение задачи о курсе валют в среде Mathcad Prime

На рис. 2 показано решение в среде Mathcad задачи о курсах валют с использованием оператора *solve*. Добавлен еще оператор *float, 2*, позволяющий вывести ответ не в виде простой, а в виде десятичной дроби с двумя значащими цифрами и плавающим (float) десятичным разделителем. Из решения, показанного на рис. 2, видно, что во второй половине XIX века талер стоил 94 копейки³, фридрихсдор 6 рублей 20 копеек, флорин и гульден по 62 копейки, а франк 31 копейку⁴. При таком раскладе генерал заплатил учителю (Алексею Ивановичу) 117 руб. 73 коп («около 120 руб.» — см. цитату 1 выше), а «бабуленька» выиграла на рулетке 7930 руб. («до восьми тысяч дойдет» — см. цитату 4).

Если же число уравнений алгебраической системы *меньше* числа неизвестных, то такая система называется *недоопределенной*⁵. Ее можно «увидеть» в описании подводной лодки «Наутилус» – «героине» романов Жюль Верна «Двадцать тысяч лье под водой» и «Таинственный остров». Вот что можно узнать из разговора капитана Немо с профессором Аронаксом о размерах подводной лодки: "Вот, господин Аронакс, чертежи судна, на котором вы находитесь. Судно представляет собой сильно удлиненный цилиндр с коническими концами. <...> Площадь его равняется одной тысяче одиннадцати и сорока пяти сотым квадратных метров, объем равен одной тысяче пятистам и двум десятым кубических метров⁶; короче говоря, корабль, полностью погруженный в воду, вытесняет тысячу пятьсот и две десятых кубических метров, или тонн, воды.».

Если принять допущение, что под площадью подводной лодки понимается не ее «жилая» площадь (площадь ее помещений), а площадь поверхности и что центральная часть подводной лодки – это круглый прямой цилиндр, а ее нос и корма – это круглые

³ Из «Писем русского путешественника» Н.М.Карамзина можно узнать, что в конце XVIII века талер стоил дороже – один рубль и 20 копеек

⁴ То, что флорин, гульден равны по стоимости, а фридрихсдор в десять раз дороже флорина или гульдена и франк в два раза дешевле флорина или гульдена, ясно и без компьютера. Но мы специально ввели в компьютер все семь цитат, чтобы получилась переопределенная система уравнений.

⁵ Или неопределенной. Репетитор Зиберов из рассказа А.П.Чехова так ошибочно пытался определить задачу о купце и сукне. Но она была четко определена – в ней два алгебраических уравнения с двумя неизвестными; сама же система имеет одно единственное решение.

⁶ Тут капитан Немо, вернее, сам автор – Жюль Верн немного переборщил, указав параметры подводной лодки с излишней точностью. Достаточно было бы сообщить, что площадь судна равняется 1010 м², а объем (водоизмещение в подводном состоянии) – 1500 м³. Для справки: водоизмещение в подводном состоянии современных атомных подводных лодок может достигать 50 000 тонн.

прямые конусы одинаковой высоты (см. чертеж на рис. 3), то задача сводится к решению двух нелинейных⁷ алгебраических уравнений с тремя неизвестными.

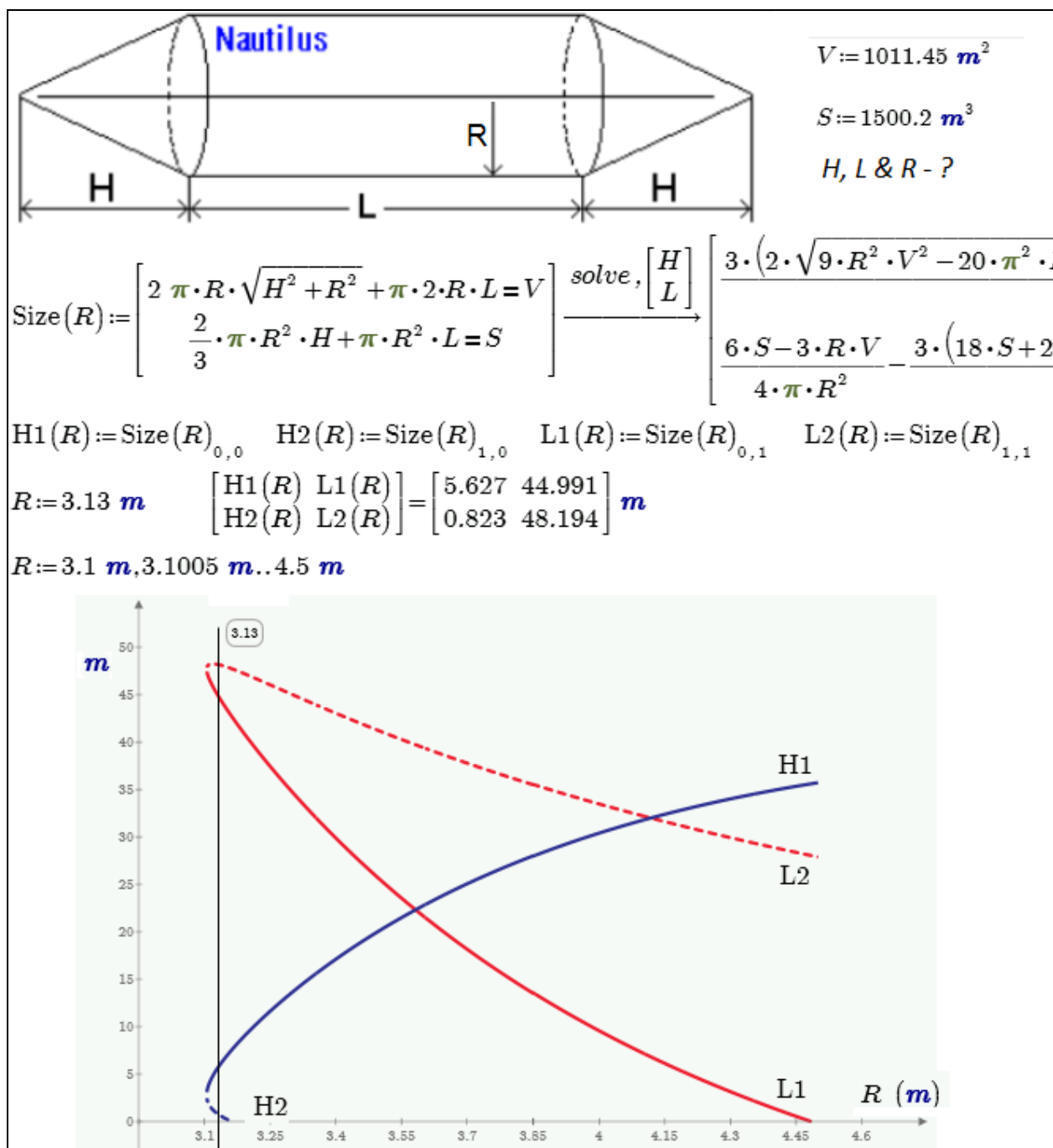


Рис. 3. Решение задачи о размерах подводной лодки «Наутилус» в среде Mathcad Prime

На рис. 3 показано решение задачи о размерах подводной лодки «Наутилус» в среде Mathcad с помощью оператора *solve*. Но этот оператор в задаче о «Наутилусе» не возвращает конкретные числовые значения, как это было при решении двух предыдущих задач, а формирует функцию с именем **Size** и аргументом **R**. Дело в том, что недоопределенные системы алгебраических уравнений могут иметь множество решений.

⁷ А две предыдущие задачи сводились к решению систем *линейных* уравнений.

В нашем случае размеры субмарины (длины H и L) при заданной ее геометрии подводной лодки и известном ее объеме и площади поверхности зависят от радиуса сечения цилиндрической части R . Кроме того, сама система наших двух нелинейных уравнений имеет два решения. Поэтому оператор *solve* вернул нам не вектор (см. рис. 2 и 3), а матрицу, состоящую из двух строк (длины H и L) и двух столбцов (два решения задачи) и хранящую выражения (на рис. 3 они из-за экономии места не показаны полностью) для функций с именами $H1$, $H2$, $L1$ и $L2$. На рис. 3 эти функции отображены графически⁸ в области действительных положительных чисел (решений) для величин H и L . Если допустить, что радиус R сечения цилиндрической части субмарины равен 3.13 м (см. вертикальный маркер на рис. 3), то длина ее конических частей (носа и кормы) H будет равна 5.627 м или 0.823 м, а длина центральной цилиндрической части L – 44.991 м или 48.194 м. Первый вариант ($H=5.627$ м и $L=44.991$ м) представляется наиболее вероятным, т.к. при втором решении ($H=0.823$ м и $L=48.194$ м) нос лодки был бы слишком тупым, что увеличивало бы сопротивление воды при движении лодки и не соответствовало изображениям «Наутилуса», какими иллюстрируются книги Жюль Верна. Кстати, при заданных параметрах субмарины она может быть в форме цилиндра (точка пересечения кривой $H2$ с осью абсцисс при $R \approx 3.2$ м) или составленная из двух конусов без центрального цилиндра (точка пересечения кривой $L2$ с осью абсцисс при $R \approx 4.5$ м).

В книге Жюль Верна есть указания на то, что общая длина «Наутилуса» была примерно 70 метров, а ее максимальный диаметр – 8 м. Но если этой информацией дополнить нашу систему уравнений, показанную на рис. 3, то она будет переопределенной и не иметь ни одного решения.

Предлагаем читателям журнала продолжить решение задачи о размерах подводной лодки «Наутилус» и определить:

1. Минимальное значение R , при котором задача имеет решение (см левые оконечности кривых на рис. 1).
2. Значения R , при которых лодка превращается в цилиндр без конусов ($H=0$) или в два конуса, составленных основаниями друг к другу ($L=0$).
3. Размеры лодки, если ее нос будет выполнен в виде полусферы, а корма в виде конуса.
4. Размеры подводной лодки, при которых ее объем будет равен 1011.45 м^3 , а площадь поверхности будет минимальна.

⁸ Аналитический вид этих функций на рис. 3 показан не полностью не только из-за экономии места, но скорее потому, что он мало что дает для анализа зависимостей. Иное дело графики.

5. Размеры подводной лодки, при которых ее площадь поверхности будет равна 1500.2 м^2 , а объем максимальным.

Кроме того, предлагаем читателям найти в художественной литературе и решить новые интересные математические задачи-загадки.

Литература:

1. Очков В. Mathcad и некоторые тайны художественной литературы // Домашний компьютер, №5, 2000 г.
2. Карпушина Н. Проценты простые и сложные. Уроки арифметики в классической литературе // Наука и жизнь, № 9, 2009 г.
3. Очков В.Ф. Mathcad 14 для студентов, инженеров и конструкторов БХВ-Петербург, 2007 г.