# Единицы измерений в трех видах формул: в физических, эмпирических и... псевдоэмпирических

В.Ф. Очков, К.А. Орлов

**Появление компьютерных расчетных программ, работающих с физическими величинами, показало, что существуют формулы не только *физические* и *эмпирические*, но и... *псевдоэмпирические*. Описаны приемы работы с такими формулами на компьютере. Подчеркнута необходимость переработки научно-технических справочников, монографий и учебников, связанной со спецификой использования единиц измерения в компьютерных вычислениях.**

## От фантазий – к делу

Все, кто связан с научно-техническими, инженерными или экономическим расчетами, знают, что формулы бывают двух типов: *физические*, полученные в результате теоретических выкладок, и *эмпирические*, выведенные после обработки опытных (эмпирических) данных. Если к этим формулам подойти с позиций метрологии, в частности, с позиций теории размерных величин [1], то можно констатировать, что первые связывают между собой физические величины без учета единиц их измерения. Вторые же требуют, чтобы эти величины были строго связаны с конкретными единицами измерения.

Переход от «безразмерных» ручных расчетов – на «бумажке», арифмометрах, логарифмических линейках, калькуляторах, в электронных таблицах и на языках программирования – к «размерным» физико-математическим пакетам Maple, Mathematica, Mathcad, SMath и др. показал, что есть и третий тип формул, которые условно можно назвать *псевдоэмпирическими* или ложноэмпирическими [2].

Разберем эти три вида формул по порядку!

### 1. Физические формулы

Для пояснения особенности работы с физическими формулами возьмем в качестве примера решение в среде Mathcad задачи о взаимном притяжении Земли и Луны (рис. 1). Даны массы этих двух небесных тел ($m_1$ – Земля и $m_2$ – Луна) и расстояние между ними $R$. Необходимо рассчитать силу $F$, с какой Земля и Луна притягиваются друг к другу.

Числовые константы в расчете на рисунке 1 взяты из Википедии. Там массы Земли и Луны даны в килограммах, хотя эти величины более естественно измерять тоннами. Но и эта единица массы тоже очень мала для этих целей. В той же Википедии дана безразмерная относительная масса Луны по сравнению с массой Земли – 0.0123 (мы к относительным физическим величинам еще вернемся, когда будем рассматривать эмпирические формулы). С другой стороны, среднее расстояние от центров Земли и Луны ($R$) в Википедии дано не в ожидаемых в согласии с СИ метрах, а километрах. Но это детали – пакет Mathcad все правильно пересчитал и выдал ответ (значение силы $F$) в ньютонах ($N$), к которым пользователь

Закон всемирного тяготения $F = G \cdot \dfrac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$ 1 - Земля 2 - Луна

Гравитационная постоянная $G := 6.67430 \cdot 10^{-11}\ N \cdot \dfrac{m^2}{kg^2}$

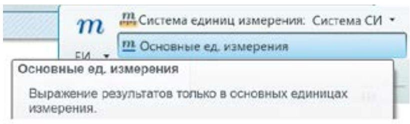
$m_1 := 5.9726 \cdot 10^{21}\ tonne$ $m_2 := 7.3477 \cdot 10^{19}\ tonne$

Среднее расстояние между центрами Земли и Луны $R := 384467\ km$

$F := G \cdot \dfrac{m_1 \cdot m_2}{R^2} = 0.1982\ ZN$ Зеттаньютон - $10^{21}$ N

**Рис. 1** Расчет в среде Mathcad силы, с какой Земля и Луна притягиваются друг к другу

*Ключевые слова:* ***физическая величина, единица измерения, физическая формула, эмпирическая формула, псевдоэмпирическая формула,*** *Mathcad.*
***Keywords:*** *physical quantity, unit of measurement, physical formula, empirical formula, pseudo-empirical formula, Mathcad.*




$$F=\left(1.982\cdot10^{20}\right)\ \frac{kg\cdot m}{s^2}$$

**Рис. 2**
Работа с основными единицами измерения при расчете силы

приписал приставку $Z$ ($10^{21}$, зетта) и получил более компактный, хотя и не совсем обычный ответ.

А откуда взялись ньютоны как единицы силы? Из метрологической трактовки второго закона Ньютона, гласящего, что сила $F$ – это произведение массы (kg) на ускорение (m/s$^2$): $F = m\,a$. На рисунке 2 показано, что выдаст пакет Mathcad «на печать», если его попросить работать только с основными единицами измерения (F – это сила, рассчитанная на рис. 1).

Попутно можно отметить, что математические пакеты изменили порядок публикации формул. Обычно формулы публикуются так: сначала записывают формулу, а потом перечисляют переменные, в нее входящие, и, если приводится конкретный расчет, записывают конкретные числовые значения, какие данные переменные хранят. В среде математических программ (см. рис. 1) *сначала* вводятся в расчет переменные с их числовыми значениями, а уже *потом* ведется счет по формулам. И еще. Хорошим стилем стал не набор формул в статьях и книгах с помощью каких-то текстовых редакторов (Word Equation, LaTex и др.), а работа с математическими пакетами и перенос в статьи и книги формул, созданных и проверенных контрольными расчетами, в виде, например, растровых рисунков. Так авторы поступали и в данной статье, что исключило возможные опечатки в публикуемых формулах, какие, увы, нередки в статьях и книгах.

В метрологии, как и в истории, нет сослагательного наклонения («если б да кабы»). Но можно предположить, как выглядела бы система измерений, если б единица силы задавалась не вторым законом Ньютона, а еще одним детищем этого великого ученого – законом всемирного тяготения (рис. 1). В этом случае единицей силы было бы не выражение kg m/s$^2$, показанное на рисунке 2, а другое – kg$^2$/m$^2$. Гравитационная постоянная при этом стала бы равна единице (числу, а не единице измерения), а во втором законе Ньютона появился бы переводной коэффициент – некая новая физическая константа (её можно было бы назвать постоянной Ньютона) с единицей измерения kg s$^2$/m$^3$.

Но давайте вернемся от фантазий к делу!

Инструментарий работы с единицами физических величин в среде Mathcad охватывает не только простейшие вычисления – такие, например, какие показаны на рисунке 1, но и более сложные. На рисунке 3 помещено численное решение в среде Mathcad задачи о вращении двух небесных тел – Луны и Земли. Задача сводится к решению (с использованием единиц физических величин!) системы, состоящей из одного алгебраического и четырех дифференциальных уравнений второго порядка. Это типичная классическая задача математической физики (задача небесной механики), в уравнениях которой как раз и присутствуют физические величины: масса, расстояние, время, скорость (первая производная пути по времени) и ускорение (вторая производная пути по времени). Суперкалькулятор Mathcad на сегодняшний день – это единственный в мире математический пакет, решающий дифференциальные уравнения и их системы с учетом единиц измерения. Надо только уметь правильно пользоваться этим инструментом, о чем будет сказано ниже.

Решить

Ограничения

$$r(0\ s)=R \qquad r(t)=\sqrt{\left(x_1(t)-x_2(t)\right)^2+\left(y_1(t)-y_2(t)\right)^2}$$

$$x_1(0\ s)=0\ m \quad x_1'(0\ s)=0\ \frac{m}{s} \quad m_1\cdot x_1''(t)=G\cdot\frac{m_1\cdot m_2}{r(t)^2}\cdot\frac{x_2(t)-x_1(t)}{r(t)}$$

$$y_1(0\ s)=0\ m \quad y_1'(0\ s)=0\ \frac{m}{s} \quad m_1\cdot y_1''(t)=G\cdot\frac{m_1\cdot m_2}{r(t)^2}\cdot\frac{y_2(t)-y_1(t)}{r(t)}$$

$$x_2(0\ s)=0\ m \quad x_2'(0\ s)=v_1 \quad m_2\cdot x_2''(t)=G\cdot\frac{m_1\cdot m_2}{r(t)^2}\cdot\frac{x_1(t)-x_2(t)}{r(t)}$$

$$y_2(0\ s)=R \quad y_2'(0\ s)=0\ \frac{m}{s} \quad m_2\cdot y_2''(t)=G\cdot\frac{m_1\cdot m_2}{r(t)^2}\cdot\frac{y_1(t)-y_2(t)}{r(t)}$$

Решатель

$$\begin{bmatrix}x_1\\y_1\\x_2\\y_2\\r\end{bmatrix}:=\mathrm{Odesolve}\left(\begin{bmatrix}x_1(t)\\y_1(t)\\x_2(t)\\y_2(t)\\r(t)\end{bmatrix},t_{end}\right)$$

**Рис. 3**
Решение системы дифференциальных уравнений полета Земли и Луны

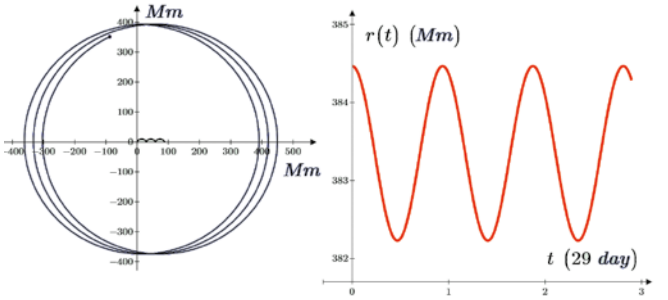



**Рис. 4**
Полет Луны вокруг Земли

Математическая модель полета двух небесных тел проста: произведение массы тела (точнее, массы материальной точки) на его (её) ускорение (на проекции ускорения по оси X и по оси Y – мы имеем тут по паре уравнений) равно силе (проекциям силы), действующей на этот объект и вытекающей из закона всемирного тяготения. Задача о двух небесных телах имеет символьное (аналитическое) решение: планеты и их спутники (естественные и искусственные) движутся по эллиптическим (частный случай – по круговым), параболическим (очень редко) или гиперболическим орбитам (кометы). Но мы доверимся численным методам, которые, во-первых, намного упрощают формирование самой задачи, а, во-вторых, незаменимы при решении более сложных задач [3].

Функция **Odesolve** (ODE – обыкновенное дифференциальное уравнение, to solve – решить) возвращает пять функций пользователя, подстановка которых в систему уравнений превращает её в систему тождеств. Задача, повторяем, решается численно: мы получаем не сами функции в виде выражения – комбинации элементарные функции, а их дискретные значения, интерполяцией превращенные в функции. На рисунке 4 решение отображено в виде графика: Луна, как ей и положено, примерно за 29 дней делает один виток вокруг Земли (правый график), которая слегка смещается вправо. При этом расстояние между центрами Земли и Луны меняется незначительно – примерно на две тысячи километров, пардон, мегаметров за три месяца. Сама же Луна вращается почти по круговой орбите – см. левый график на рисунке 4.

Но рисунки 3 и 4 помещены в статье не только и не столько для того, чтобы подчеркнуть удобство использования пакета Mathcad для решения некоторых задач математической физики, но и для того, чтобы показать, что в этом решении кроется интересная метрологическая проблема.

На рисунке 3 перед уравнениями, связывающими функции с их производными второго порядка, записаны начальные условия: положение центров Земли и Луны в начальный момент времени, а также их начальные скорости (задача Коши). Земля в начальный момент времени неподвижна и находится в начале координат, а начальная горизонтальная составляющая скорости Луны $v_1$ равна 1.023 km/s (взято из той же Википедии). Центр Луны в начальный момент времени отстоит от центра Земли на расстоянии *R* (см. рис. 1). Остальные начальные условия нулевые! Но! Если пользователь Mathcad укажет, что это просто нули, а не нули длины или нули скорости, то появится сообщение об ошибке без уточнения её причины. Пользователь будет подозревать, что пакет Mathcad Prime также, как и его предшественник – пакет Mathcad 15, не может работать с размерными величинами при решении дифуров [4], и отключит единицы измерения, записав первой строкой расчета такие операторы: m:= 1, kg:= 1, s:= 1, km:= 1000 m и т.д. Но причина ошибки тут в том, что нужно записывать не просто r(0) = R, $x_1(0) = 0$, $y_1(0) = 0$ и т.д., а r(0 s) = R, $x_1(0\ s) = 0$ m, $y_1(0\ s) = 0$ m и т.д., указав тем самым размерность нуля. Такую излишнюю метрологическую педантичность (не просто нуль, а нуль секунд или нуль метров!) можно считать недоработкой пакета. Но лучше это воспринимать как призыв быть более аккуратным при работе с единицами измерения. В ручных расчетах можно записать, что такая-то величина равна нулю без уточнения единиц измерения этого нуля (физической сущности этого нуля). Но среде пакета Mathcad этого делать нельзя!

Переходя ко второму разделу статьи – к эмпирическим формулам, следует отметить, что формула закона всемирного тяготения – это не совсем правильная физическая формула, так как значение коэффициента *G* (гравитационная постоянная) получено не в результате теоретических выкладок, а путем опытного (эмпирика!) наблюдения за небесными телами с последующей статистической обработкой массивов данных. Формула закона всемирного тяготения в метрологическом смысле двояка – она и физическая, и эмпирическая.

### Промежуточный вывод

При работе с физическими формулами в среде пакетов, поддерживающих системы единиц измерения, в переменные можно вводить значения в любых единицах измерения и получать ответ также в любых единицах данной физической величины.

### 2. Эмпирические формулы

Самая простая эмпирическая формула, наверно, такая: рост в сантиметрах нормального взрослого человека равен его весу (массе) в килограммах плюс сто. Если это не так, то человек считается толстым или худым.

Авторы решили проверить правильность этой формулы на своих студентах.

Когда-то перед лекцией на тему «Регрессионный анализ» по курсу «Информационные технологии» первый автор статьи подбирал пример статистической выборки для такого анализа. Но когда он «взошел на кафедру» и взглянул на аудиторию, то он понял, что эта выборка находится прямо перед его глазами. Была проведена анонимная перекличка студентов: юноши писали и передавали лектору записку, где был указан их вес и рост. Эти данные были занесены в векторы с именами Вес и Рост с последующим регрессионным анализом (см. рис. 5 и 6). Два оператора на рисунке 5 рассчитали методом наименьших квадратов коэффициенты a и b формулы прямой линии Рост = a + b·Вес.

Кстати, функции slope и intercept присутствуют в электронных таблицах Excel, который часто используют для обработки массивов данных. В русской версии Excel эти функции называются ОТРЕЗОК и НАКЛОН. Но главное, что часто путает пользователей, это то, что аргументы этих функций переставлены местами по сравнению с Mathcad: ОТРЕЗОК(Рост; Вес) и НАКЛОН(Рост; Вес). Примечание. В электронных таблицах Excel, конечно, никаких единиц измерения нет – это бухгалтерский, а не инженерный инструмент компьютерных рачетов.

$$a := \mathrm{intercept}(Вес, Рост) = 147.62 \cdot cm$$

$$b := \mathrm{slope}(Вес, Рост) = 0.4309 \cdot \frac{cm}{kg}$$

**Рис. 5**
Нахождение значений коэффициентов a и b линейной зависимости веса человека и его роста

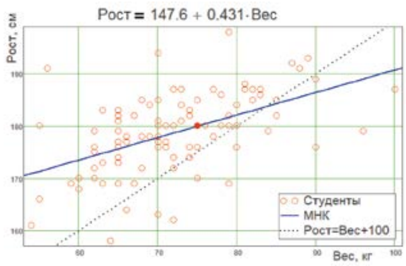



**Рис. 6**
Линии тренда: связь веса студента и его роста

$$Вес := 75\ kg$$

$$Рост := 147.6 + \boxed{0.431 \cdot Вес} = ?$$

Эти единицы измерения несовместимы.

$$Рост := \left(147.6 + 0.431 \cdot \frac{Вес}{kg}\right) \cdot cm = 179.9\ cm$$

**Рис. 7**
Пример работы с эмпирической формулой в среде Mathcad

На рисунке 6 можно видеть две линии тренда: пунктир – это предположение, что Рост = Вес + 100, а сплошная линия – это обработка данных методом наименьших квадратов (см. рис. 5).

На рисунке 7 показано, как нужно работать с эмпирическими формулами в среде Mathcad. Чтобы не возникала ошибка (вторая строка на рис 7), необходимо и достаточно переменные эмпирической формулы поделить на единицы измерения, прикрепленные к этим физическим величинам, а затем ответ умножить на единицу измерения, прикрепленной к физической величине ответа (третья строка на рис. 7).

На рисунке 6 одна из точек залита красным цветом. Этот студент ближе всего находится к линии тренда. Он стал победителем метрологического конкурса «Мистер Первый курс МЭИ». В связи с этим возникает интересное предложение по проведению различных конкурсов красоты. Сейчас в них почти нет метрологии, но недопустимо много субъективности, а значит обид, слез и даже судебных тяжб. В финалы таких конкурсов обычно попадают «красавицы–раскрасавицы», из которых довольно трудно выбрать самую оптимальную, пардон, самую красивую мисс или миссис. Так вот, можно у этих финалисток замерить вес и рост или другие параметры тела (пресловутые 90–60–90, например), провести через точки линию тренда и выбрать победительницу так, как это показано кружочком на рис. 6. А нужное личико у победительницы несложно нарисовать косметикой.

С эмпирическими формулами часто поступают и так: устанавливают некую стандартную величину, на которую делят исходную. В нашем расчете со студентами можно их рост и вес поделить на средние арифметические значения этих величин и работать уже с относительными безразмерными величинами роста и веса. Так, например, в Википедии дается масса Луны не только в килограммах (см. рис. 1), но и как отношение её массы к массе Земли, о чем мы уже упоминали.

Безразмерные величины (числа, *критерии*) широко используются, например, в гидрогазодинамике и в тепломассообмене: число Рейнольдса, число Прандтля, число Нуссельта, число Пекле, число Маха и другие именные критерии. В этих научных дисциплинах «обезразмеривание» величин ведется не только и не столько для ухода от проблем с размерностями в эмпирических формулах, но, в первую очередь, для того чтобы задействовать *теорию подобия*. Яркий пример из гидрогазодинамики – расчет гидравлического сопротивления в гладкой круглой трубе, где течение может быть *ламинарным* или *турбулентным*. Если число (критерий) Рейнольдса (произведение внутреннего диаметра трубы на скорость течения, деленное на кинетическую вязкость жидкости или газа) окажется меньше 2 300, то течение считается ламинарным, и коэффициент трения рассчитывается по простой безразмерной эмпирической формуле 64/Re. Запомнить просто – на шахматной доске 64 клеточки! Если же число Рейнольдса окажется больше 2 300, то расчет ведется по другим более сложным, но опять же безразмерным эмпирическим формулам.

Еще один способ ухода от размерных величин в эмпирических формулах – это переход от числовых к *лингвистическим величинам*, и работа с ними в рамках *теории нечетких множеств*. Если касаться нашей задачи о студентах, то их рост можно не измерять в сантиметрах, а оценивать так: низкий, ниже среднего, средний, выше среднего и высокий. Кстати, для таких оценок (для построения гистограмм, например) прекрасно подходит русский вершок: низкий рост – менее 2 аршин и 6 вершков, рост ниже среднего – 7 вершков, средний рост – 8 вершков, рост выше среднего – 9 вершков и, наконец, высокий рост – более 10 вершков [5–7].

В последнее время беспредельному господству эмпирических формул в гидрогазодинамике, в тепломассообмене, в теории сопротивления материалов положил конец *метод конечных элементов* (пардон за каламбур). Имея быстродействующие компьютеры, можно поток жидкости или газа разбить на очень мелкие элементы и работать не со сложными и непонятными эмпирическими формулами, а с простыми и понятными физическими формулами.

**Промежуточный вывод**

При работе с эмпирическими формулами в среде пакетов, поддерживающих системы единиц измерения, необходимо и достаточно единицы измерений ввести в формулу: исходные данные разделить на оговоренные единицы измерения, а ответ умножить на единицу измерения.

## 3. Псевдоэмпирические формулы

В расчетах встречаются формулы, которые по своей форме, по методу их использования в расчетах являются эмпирическими, а по своей сути – физическими.

Простейшая подобная формула, напрямую связанная с теплотехникой – со сферой деятельности авторов статьи, используется в решении такой задачи. Дан коэффициент полезного действия (КПД) электростанции η, необходимо рассчитать расход условного топлива $b_{ут}$ в граммах на выработку одного киловатт-часа электроэнергии.

Во всех справочниках и учебниках для этого расчета дается формула $b_{ут}$ = 12 300/η (или 123/η), и сказано, что КПД (η) должен быть выражен в процентах (или в относительных единицах), а значение $b_{ут}$ при этом будет выдано в граммах условного топлива на киловатт-час (кВт-ч). Пример: 12 300/38 = 323.7 или 123/0.38 = 323.7 – тепловая электростанция с КПД в 38 процентов сжигает 323.7 граммов условного топлива на выработку 1 кВт-ч электроэнергии.

Если при описании формулы особо оговаривается, в каких единицах должны быть физические величины, то эта формула считается эмпирической – см. раздел 2. Это частично так и есть: многие ошибочно полагают, что формула для расчета $b_{ут}$ эмпирическая не только по форме, но и по сути: был произведен замер КПД и удельного расхода топлива на ряде тепловых электростанций с последующей статистической обработкой и вычислением коэффициента 123. Такая работа отображена на рисунках 5 и 6 в отношении веса и роста человека. Но это, конечно, не так!

Из рисунка 8 можно понять, что это формула («раз-два-три, деленное на КПД») никакая не эмпирическая, а чисто физическая. Просто нужно вспомнить, чему равна теплота сгорания условного топлива (7000 ккал/кг или кал/г), и вернуть эту теплотехническую константу в формулу КПД электростанции.

Дело в том, что когда-то давно, когда не было не только математических пакетов с единицами измерения, но даже простейших калькуляторов, кто-то перевел калории в джоули, часы в секунды и получил итоговый переводной коэффициент 122.835032551284, который округлили до 123 (см. п. VI на рис. 8). Это было сделано для удобства и простоты ручных расчетов. Но теперь, когда мы переходим на современные программные средства, эта услуга оказалась медвежьей. Пользователь Mathcad водит в расчет рекомендованную справочниками и учебниками формулу, и получает… безразмерный ответ (см. п. I на рис. 9). Приходится поступать с этой формулой как с эмпирической – вписывать в нее нужные единицы измерения (см. п. II). Но лучше будет восстановить «физику» в этой формуле (п.п. IV и V), вспомнив об условном топливе (п. III). Пакет Mathcad по его обыкновению предельно упростит единицу измерения (п. IV), которую придется восстановить вручную (п. V на рис. 8).

И таких «медвежьих следов» в справочниках, монографиях и учебниках огромное количество. Пример на рисунке 8 простейший и в плане формы, и в плане понимания его сути. А вот более сложный и более коварный пример.

Необходимо рассчитать *молярность* водного раствора вещества по его *моляльности*. Молярность – это отношение количества растворенного вещества к *объему раствора*, а моляльность – к *массе растворителя*. Химик тут же переиначит эти определения на свой метрологический лад: молярность – это отношение числа молей растворенного вещества к объему раствора, выраженного в литрах, вернее в дециметрах кубических; моляльность же – это отношение числа молей растворенного вещества к массе растворителя, выраженного в килограммах (1000 г). Молярность удобна в процессе дозировки растворов с использованием мерных ёмкостей, но, в отличие от моляльности, молярность меняется при изменении температуры. Это является следствием того, что плотность растворов зависит от температуры.

Область

$кал := cal \quad г := gm \quad кг := kg$

$кДж := 1000\ J \quad кВт{-}ч := kW \cdot hr$

КПД тепловой электростанции $\eta := 38\%$

Удельный расход условного топлива

$$b := \frac{123}{\eta} = 323.684 \qquad \text{(I)}$$

$$b := \frac{123}{\eta} \cdot \frac{г}{кВт{-}ч} = 323.684\ \frac{г}{кВт{-}ч} \qquad \text{(II)}$$

$$Q_{ym} := 7000\ \frac{кал}{г} = 29307.6\ \frac{кДж}{кг} \qquad \text{(III)}$$

$$b := \frac{1}{Q_{ym} \cdot \eta} = \left(8.979 \cdot 10^{-8}\right) \frac{s^2}{m^2} \qquad \text{(IV)}$$

$$b := \frac{1}{Q_{ym} \cdot \eta} = 323.25\ \frac{г}{кВт{-}ч} \qquad \text{(V)}$$

Переводной коэффициент

$$\frac{1}{Q_{ym}} = 122.835\ \frac{г}{кВт{-}ч} \qquad \text{(VI)}$$

**Рис. 8**
Расчет удельного расхода условного топлива

Человек, решающий эту задачу на компьютере, соединенным с интернетом, не полезет в бумажные справочники за нужной формулой пересчета, а сделает соответствующий запрос в Интернете и мгновенно получит, например, ответ, показанный на рисунке 9.

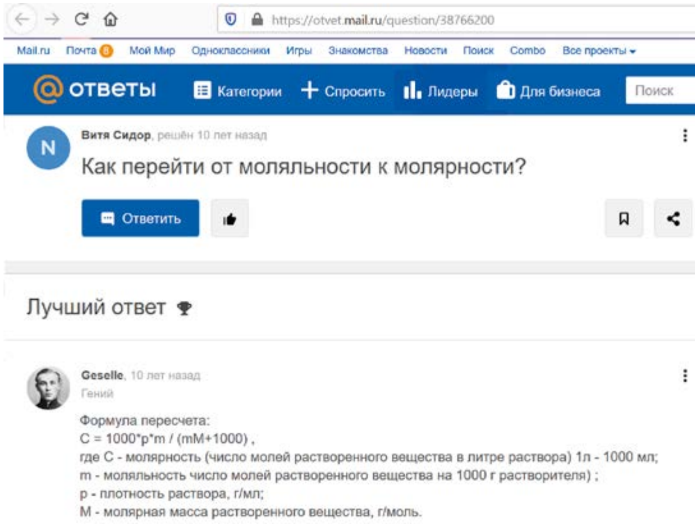



**Рис. 9**
Поиск формулы в интернете

Если ответ, показанный на рисунке 9, один к одному перенести в среду Mathcad (рис. 10), то этот пакет выдаст не просто *ошибку*, а *очень коварную ошибку*: в ответе, во-первых, будут правильные единицы измерения, а, во-вторых, само численное значение ответа будет выглядеть вполне правдоподобно.

Чтобы получить в расчете правильный ответ, нужно вспомнить, что если в формуле упоминаются конкретные единицы измерения, то с ней нужно работать как с эмпирической формулой, о которых мы писали раньше (см. раздел 2). Ответ получился иным – правильным: не 2.246, а 2.013 моль на литр (см. рис. 11)!

Но еще лучше не лезть в Интернет, который многие называют всемирной помойкой, а вспомнить определение молярности и моляльности без упоминания конкретных единиц измерения, составить и символьно решить уравнение, показанное на рисунке 12. Левая часть уравнения – это количество растворенного вещества, выраженное через молярность $C$, а правая – через моляльность $L$. Масса растворителя – это масса раствора (произ-

Плотность раствора $\rho := 1.123\ \frac{gm}{mL}$

Моляльность $m := 2\ \frac{mol}{kg}$

Молярная масса растворенного вещества $M := 58\ \frac{gm}{mol}$

Молярность $C := \frac{1000\ \rho \cdot m}{m \cdot M + 1000} = 2.246\ \frac{mol}{L}$

**Рис. 10**
Пример ошибочного расчета по формуле

Молярность $C:=\dfrac{1000\,\dfrac{\rho}{\frac{gm}{mL}}\cdot\dfrac{m}{\frac{mol}{kg}}}{\dfrac{m}{\frac{mol}{kg}}\cdot\dfrac{M}{\frac{gm}{mol}}+1000}\cdot\dfrac{mol}{L}=2.013\,\dfrac{mol}{L}$

**Рис. 11**
Работа с физической формулой как эмпирической

$$C\cdot V=m\cdot(V\cdot\rho-C\cdot V\cdot M)\xrightarrow{solve,C}\frac{\rho\cdot m}{M\cdot m+1}$$

**Рис. 12**
Вывод формулы через символьное решение уравнения

Молярность $C:=\dfrac{\rho\cdot m}{m\cdot M+1}=2.013\,\dfrac{mol}{L}$

**Рис. 13**
Работа с физической формулой

ведение молярности *C* на объем раствора *V*) за вычетом массы растворенного вещества.

После таких преобразований в формуле исчезнут тысячи (тысячи грамм в килограмме, тысячи миллилитров в литре), и формула станет вполне простой и физической – см. рисунок 13.

## Вывод

Современные справочники должны иметь некоторые формулы в двух видах: для ручных расчетов и для расчетов на компьютерах. Это касается так называемых псевдоэмпирических формул.

**МИ**


**Список использованных источников**

1. Чертов А.Г. Единицы физических величин. – М.: «Высшая школа», 1977.– 287 с.
2. Очков В.Ф. Физические и экономические величины в Mathcad и Maple (Серия «Диалог с компьютером»). – М.: Финансы и статистика, 2002.
3. Очков В.Ф., Богомолова Е.П., Иванов Д.А., Писачич К. Движения планет: расчет и визуализация в среде Mathcad или Часы Кеплера // Cloud of Science.– 2015.– № 2. – Т. 2. – С. 177–215. (http://twt.mpei.ac.ru/ochkov/Planets.pdf)
4. Очков В.Ф., Богомолова Е.П. Это страшное слово дифуры… // Информатика в школе. – 2015.– № 1. – С. 55–58. (http://twt.mpei.ac.ru/ochkov/ODE.pdf)
5. Очков В.Ф., Богомолова Е.П. Интерполяция, экстраполяция, аппроксимация или Ложь, наглая ложь и статистика // Cloud of Science.– 2015.– № 1. – Т. 2. – С. 61–88. (http://twt.mpei.ac.ru/ochkov/CoS_2_1.pdf)
6. Очков В.Ф., Богомолова Е.П., Иванов Д.А. Физико-математические этюды с Mathcad и Интернет. – СПб: Издательство Лань, 2018.
7. Valery Ochkov. $2^5$ Problems for STEM Education. – Chapman and Hall/CRC, 2020.– 374 p.

**References**

1. Chertov A.G. *Edinitsy fizicheskikh velichin* [Units of Physical Quantities]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 1977. 287 p. (In Russian)
2. Ochkov V.F. *Fizicheskie i ekonomicheskie velichiny v Mathcad i Maple* [*Physical and Economic Quantities in Mathcad and Maple*]. Series: Dialogue with a Computer. Moscow, Finansy i statistika, 2002. (In Russian)
3. Ochkov V.F., Bogomolova E.P., Ivanov D.A., Pisachich K. Planetary motions: calculation and visualization in Mathcad or Kepler's clock. *Cloud of Science*, 2015, *vol*. 2, no 2, pp. 177–215. Available at: http://twt.mpei.ac.ru/ochkov/Planets.pdf. (In Russian)
4. Ochkov V.F., Bogomolova E.P. This is a terrible word of difura… *Informatika v shkole* [*Informatics at School*], 2015, no 1, pp. 55–58. Available at: http://twt.mpei.ac.ru/ochkov/ODE.pdf. (In Russian)
5. Ochkov V.F., Bogomolova E.P. Interpolation, extrapolation, approximation or Lies, damned lies, and statistics. *Cloud of Science*, 2015, no 1, vol. 2, pp. 61–88. Available at: http://twt.mpei.ac.ru/ochkov/CoS_2_1.pdf. (In Russian)
6. Ochkov V.F., Bogomolova E.P., Ivanov D.A. Fiziko-matematicheskie etyudy s Mathcad i Internet [*Physics and Mathematics Studies with Mathcad and the Internet*]. St. Petersburg, Lan Publ., 2018. (In Russian)
7. Ochkov V. $2^5$ Problems for STEM Education. Chapman and Hall/CRC Press, 2020. 374 p.



## Abstract

*The emergence of computer computational programs working with physical quantities has shown that there are not only physical and empirical formulas but also… pseudo-empirical ones. The article describes techniques for working with such formulas on a computer. The need to revise scientific and technical reference books, monographs and textbooks related to the specific use of units of measurement in computer calculations is emphasized.*



**Валерий Федорович Очков,**

*доктор технических наук, профессор*

**Константин Александрович Орлов**

*кандидат технических наук, доцент, заведующий кафедрой «Теоретические основы теплотехники»*

*НИУ «МЭИ»*