

5 и 6. Minimize&Maximize

Об очередной функции "великолепной семерки" — о функции `Minimize`, будет рассказано на примере *задачи оптимизации*, связанной также с "водным транспортом".

Задача 3. Определить крейсерскую скорость судна — скорость при которой затраты на его эксплуатацию будут минимальны.

Задача предельно упрощена — затраты на эксплуатацию судна состоят из двух частей: почасовой зарплаты экипажа, пропорциональной времени движения судна (обратно пропорциональной скорости судна), и затрат на горючее, пропорциональных квадрату скорости судна (коэффициенты пропорциональности — a и b). Увеличивая скорость судна, мы экономим на зарплате экипажа, но при этом приходится больше тратить денег на горючее. Попробуем найти тут оптимальное решение!

На рисунке 4.17 показано решение этой типичной задачи оптимизации с помощью встроенной функции `Minimize` с графической иллюстрацией решения.

Этюд 4

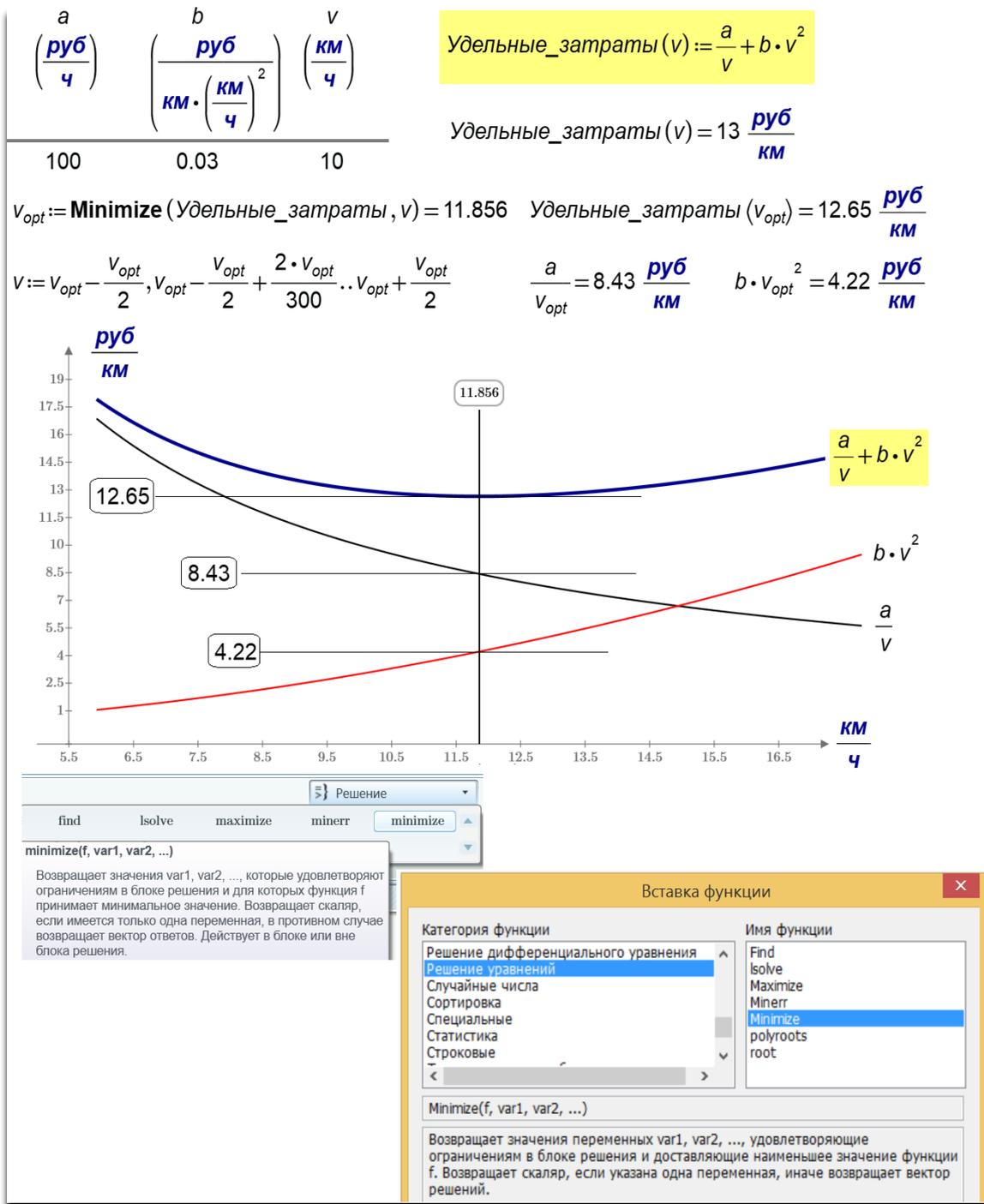


Рис. 4.17. Нахождение крейсерской скорости судна численной математикой Mathcad

Функция Minimize меняет значение своего второго аргумента, начиная от заданного предполагаемого значения (у нас это 10 км/ч) так, чтобы значение первого аргумента (целевой функции Удельные_затраты) приняло минимальное значение. Если бы мы не минимизировали затраты, а максимизировали, например, прибыль владельца судна, то нужно было бы при решении такой задачи функцию Minimize заменить на функцию Maximize. В оптимизационных задачах часто присутствуют ограничения —

Этюд 4

скорость судна, например, не может превышать максимально допустимую. В этом случае функции Minimize или Maximize нужно будет поместить в область Ограничения блока Решить, показанного на рис. 4.15.

Найти минимум нашей целевой функции Удельные_затраты можно и средствами символьной математики Mathcad, что показано на рис. 4.18.

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{a}{x} + b \cdot x^2 \right) \xrightarrow{\text{solve, } x} \left[\begin{array}{l} \left(\frac{a}{2 \cdot b} \right)^{\frac{1}{3}} \\ \frac{\left(\frac{a}{2 \cdot b} \right)^{\frac{1}{3}}}{2} + \frac{\sqrt{3} \cdot \left(\frac{a}{2 \cdot b} \right)^{\frac{1}{3}} \cdot 1i}{2} \\ \frac{\left(\frac{a}{2 \cdot b} \right)^{\frac{1}{3}}}{2} - \frac{\sqrt{3} \cdot \left(\frac{a}{2 \cdot b} \right)^{\frac{1}{3}} \cdot 1i}{2} \end{array} \right]$$

$$\left(\frac{a}{2 \cdot b} \right)^{\frac{1}{3}} = 11.856 \frac{\text{KM}}{\text{ч}}$$

Рис. 4.18. Нахождение крейсерской скорости судна символьной математикой Mathcad

На рисунке 4.18 ведется поиск нулей первой производной функции по удельным затратам на километр пути судна. Но если затраты на топливо будут зависеть от скорости судна, взятой не во второй степени, а в степени n (этот коэффициент, близкий к двойке, уточняют экспериментально) то символьная математика уже не справится с такой усложненной задачей (рис. 4.19), и придется вернуться к численным методам решения задач (рис. 4.17).

The image shows a Mathcad worksheet snippet. It features a derivative expression $\frac{d}{dx} \left(\frac{a}{x} + b \cdot x^n \right)$ enclosed in a red box. To the right of this box is the text `solve, x` with an arrow pointing to a question mark. Below this, a pink error message reads: "Символьный результат не найден." (Symbolic result not found).

Рис. 4.19. Осечка при работе с символьной математикой Mathcad

7. Minerr

Последняя¹ функция "великолепной семерки Mathcad" — это функция `Minerr` (Minimal Error — минимальная ошибка). Если функция `Find` (см. рис. 4.15) не находит решения системы уравнений, то она возвращает сообщение об ошибке. Функция же `Minerr` в такой ситуации возвратит не сообщение об ошибке, а значения своих аргументов (невязку системы), при которых система уравнений будет максимально приближена к системе тождеств — точку последнего приближения к решению. В старых версиях Mathcad не было функций `Minimize` и `Maximize`, и задачи оптимизации приходилось решать именно через функцию `Minerr`. Попробуем и мы поступить так. На рисунке 4.20 показано, как эта функция решает задачу крейсерской скорости судна: при оптимальном движении затраты на эксплуатацию судна будут максимально приближены к нулю (мечта всех судовладельцев).

¹ Последняя в списке, но не последняя по важности — смотрим далее.

The image shows a Mathcad worksheet on the left and a software interface on the right. The worksheet defines variables $a = 100 \frac{\text{руб}}{\text{ч}}$ and $b = 0.03 \frac{\text{руб}}{\left(\frac{\text{км}}{\text{ч}}\right)^2}$. It defines the cost function $\text{Удельные_затраты}(v) := \frac{a}{v} + b \cdot v^2$. An initial guess is set as $v := 10 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$. The optimization is performed using $v_{\text{opt}} := \text{Minerr}(v) = 11.856 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$, resulting in a minimum cost of $\text{Удельные_затраты}(v_{\text{opt}}) = 12.651 \frac{\text{руб}}{\text{км}}$. The software interface on the right shows the 'minerr' function selected in a menu, with a tooltip explaining its purpose: 'Возвращает значения var1, var2, ..., наиболее близкие к удовлетворению системы уравнений и ограничений в блоке решения. Возвращает скаляр, если задан только один аргумент, в противном случае возвращает вектор ответов. Если функция minerr не сходится, она возвращает результаты последней итерации. Действует только в блоке решения.'

Рис. 4.20. Решение задачи оптимизации с помощью функции Minerr

Функция Minerr поможет нам в этюде 8 сделать анимацию правила Чебышева (см. рис. 8.8 и 8.9) при укороченном одном стержне.

Функцию Minerr можно считать *главной* в "великолепной семерке Mathcad", т.к. ею можно заменить и функцию Find, и функцию root (в двух ее вариантах), и функцию polyroots, и функцию lsolve, и в ряде случаев функции Minimize и Maximize. При использовании функции Minerr надо обязательно предусматривать проверку решений. Нередки случаи, когда решения могут оказаться ошибочными, чаще всего из-за того, что из нескольких корней находится нереальный (или не представляющий интереса) корень. Дело в том, что функция Minerr пытается найти максимальное приближение к искомому числу путем минимизации среднеквадратической погрешности решения. Следует заранее убедиться в том, что решение существует, и как можно точнее указать начальное приближение к решению.

С другой стороны, главной (незаменимой) функцией "великолепной семерки Mathcad" можно считать функцию root, т.к. она одна остается активированной при окончании месячного пробного использования Mathcad Prime и при переходе к Mathcad Express.

Компьютерная математика с универсальными и скрытыми от пользователей методами аналитических и численных решений заставляет нас забывать о типах уравнений. Вспомним о них!