

Дифференциальные уравнения – полет капли воды

В.Ф.Очков, Чжо Ко Ко

Национальный исследовательский университет «Московский энергетический институт»

В статье описана технология решения дифференциальных уравнений в среде инженерного калькулятора Mathcad применительно к брызгальным бассейнам и градирням, которые являются основными потребителями технической воды в энергетике и других отраслях промышленности.

Ключевые слова: брызгальный бассейн, градирня, Mathcad

This article describes a technique for solving differential equations in Mathcad with regard to spray pond and cooling towers, which are major consumers of water in the energy and other industries.

Keywords: spray pond, cooling towers, Mathcad, differential equations

Редакция журнала продолжает публиковать статьи по современным методам решения «водных» задач на компьютере – см. ВВВ № 6, 7, 9, 10 и 11 за 2009 г., № 1, 6, 7, 8 и 11 за 2010, № 6 за 2011, №6 за 2012, № 6 за 2013.

В некоторых предыдущих статьях мы рассмотрели возможности пакета Mathcad для *численного* решения системы алгебраических уравнений – для нахождения значений неизвестных, превращающих уравнения в тождества. Вернее, в *почти* тождества, когда правые и левые части уравнений отличаются друг от друга незначительно. Данную «незначительность» (по умолчанию она равна 0.001) хранит системная переменная STOL. Пакет Mathcad может также решать алгебраические уравнения *символьно* (аналитически), когда решения представляют собой не числа, а выражения – цепочки *символов*.

Пакет Mathcad может решать численно системы и *дифференциальных* уравнений, где решениями будут уже не числа, а функции, подстановка которых и их первых и вторых производных в исходную систему превращает ее в систему тождеств.

Описание инструментов Mathcad, предназначенных для решения дифференциальных уравнений и их систем, мы сделаем на примерах, продолжающем гидротехнические примеры, приведенные в [1, 2] – потеря напора в трубопроводе и расчет водопроводной сети.

На теплотехнических объектах очень часто главной задачей является задача не подвода тепла, а его *отвода*. Электрическую энергию мы можем производить на ТЭС только в том случае, когда часть тепла, полученного при сжигании органического или ядерного топлива, мы отправляем в окружающую среду. Это вытекает из основных законов термодинамики и этим определяется термический КПД электростанции. Это тепло очень часто на ТЭС и АЭС сбрасывается в атмосферу через... брызги воды – в градирнях или в специальных брызгальных бассейнах. Отработавший пар турбины поступает в конденсатор, через трубки которого протекает охлаждающая вода. Водяной пар конденсируется на внешней поверхности трубок конденсатора, превращается в воду (в конденсат). Конденсат через систему регенеративных подогревателей питательным насосом возвращается в паровой котел. Потери воды в контуре восполняются специальными системами водоподготовки, которым много внимания уделяет этот журнал.

Охлаждающая вода при этом нагревается. Ее либо сбрасывают в водоем, откуда она была взята (река, пруд-охладитель электростанции), либо охлаждают в брызгальных бассейнах или градирнях, а затем направляют обратно в конденсатор паровой турбины. На фото можно видеть один из брызгальных бассейнов, предназначенных для охлаждения воды.



Брызгальный бассейн

На фото можно видеть систему труб, подобную той, которая рассчитывалась в [2]. На трубы насажены форсунки, через которые вода разбрызгивается и охлаждается за счет, в основном, испарения части влаги и за счет конвективного теплообмена с окружающим воздухом. Градирня отличается от брызгального бассейна тем, что вся эта трубная система с форсунками, заключена в бетонную, деревянную или металлическую оболочку в виде широкой трубы, которая создает тягу воздуха и тем самым интенсифицирует теплообмен¹. Вода, кстати, разбрызгиваясь, может обогащаться кислородом. Такие брызгальные системы иногда устанавливают на погибающих водоемах для аэрации воды, ее охлаждения и, следовательно, для замедления в ней некоторых «вредных» биологических процессов. Знаменитый 140 метровый фонтан на Женевском озере в Швейцарии – это не только туристический аттракцион и реклама фирмы, поставившей насос для

¹ Есть и так называемые сухие градирни (градирни Геллера), в которых вода и воздух отделены металлической (обычно алюминиевой) стенкой. Охлаждение воды в таких градирнях идет не так интенсивно, но зато нет потери охлаждающей воды за счет испарения и капельного уноса. В «мокрых» градирнях и брызгальных бассейнах из-за испарения воды наблюдается повышение концентрации солей в ней, что может приводить к отложению накипи в трубках конденсатора паровой турбины, повышению температуры конденсации пара и снижению КПД энергоблока. Сетевой расчет, размещенный по адресу <http://twf.mpei.ac.ru/MCS/Worksheets/Water/acidation.xmcd>, позволяет рассчитать мероприятия по предотвращению накипеобразования в конденсаторах турбин.

фонтана, но и устройство для подпитки озерной воды кислородом и для некоторого охлаждения озера.

Брызгальные бассейны также широко применяются в промышленных системах кондиционирования воздуха и в холодильных установках.

Давайте на конце трубы установим несколько форсунок под разными углами к горизонту, из которых будет вытекать вода со скоростью V_0 , и посмотрим (рассчитаем) как будет струиться вода, разбиваясь на капли. Задачу мы упростим – будем моделировать полет одиночной шарообразной капли воды под действием силы инерции, гравитационной силы и силы сопротивления воздуха. Вернее, нужно говорить так. Никакой силы инерции нет, а есть закон Ньютона, согласно которому сумма сил, действующих на тело (на нашу каплю) – сила трения и гравитационная сила, равна произведению массы тела на его ускорение. Это произведение в обиходе иногда и называют силой инерции [3].

В задаче будут фигурировать две *пары* искомым функции от времени t : положение капли в пространстве (вернее, на плоскости X – Y) и ее скорость v . Скорость – это первая производная пути по времени, а ускорение – это вторая производная пути по времени или первая производная скорости по времени. Наше дифференциальное уравнение – это уравнение баланса сил, приложенных к капле. Эти силы мы будем раскладывать по осям X и Y – отсюда и появились эти самые *пары уравнений*, о которых мы упомянули выше.

Сила трения, действующая на каплю, зависит от многих параметров. Мы условно примем, что она пропорциональна площади поперечного сечения капли S , плотности воздуха ρ_{air} и квадрату скорости v капли. Сама же капля в полете будет оставаться шарообразной.

Коэффициент пропорциональности f описывается в теории подобия в приложении к данной задаче гидрогазодинамики. Значение этого

коэффициента зависит только от безразмерного числа (критерия) Рейнольдса Re – произведению скорости капли v на ее диаметр D , поделенного на кинематическую вязкость воздуха ν_{air} . Здесь также, как и в задаче о течении воды в трубе [2] наблюдается *ламинарный*, *переходный* и *турбулентный* режимы обтекания воздуха капли воды. В верхней части рис. 1 записана и отражена графически соответствующая зависимость, «выуженная» из Интернета – см. <http://communities.ptc.com/message/223872>.

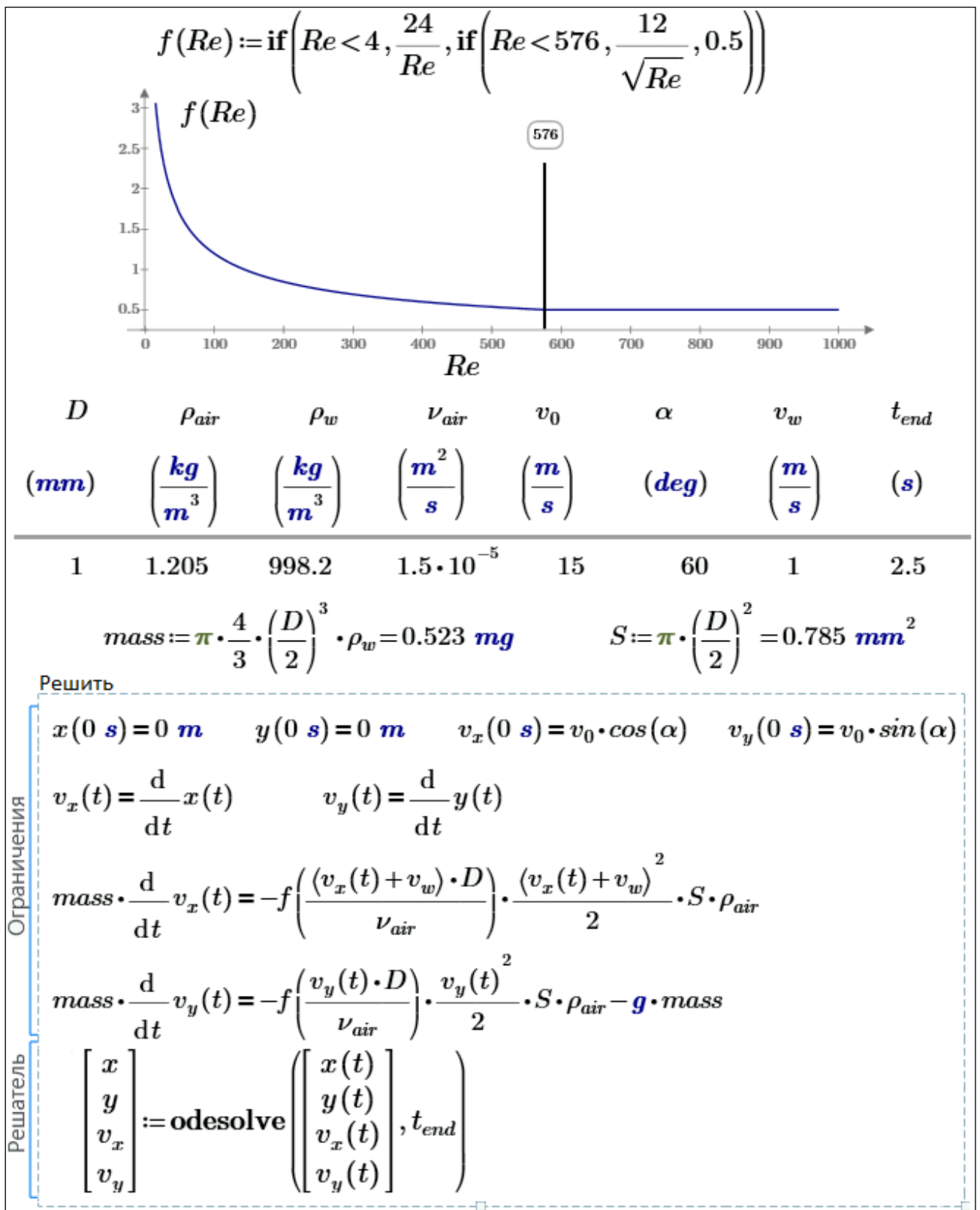


Рис. 1. Моделирование свободного полета шарообразной капли

На рис. 1 после графика и таблицы с исходными данными² (дополнительно введена скорость ветра³ v_w), ведется расчет значения массы капли $mass$ и ее поперечного сечения S . Далее в расчет вставлен блок **Решить**, область которого с именем **Ограничения** хранит описание нашей задачи: начальные условия (положение и скорость капли в начальный момент времени при $t = 0$ s), четыре дифференциальные уравнения, описывающие скорость как производную пути (по горизонтали и вертикали) по времени и баланс сил, действующих на каплю в этих двух направлениях. Область **Решатель** блока **Решить** содержит встроенную в Mathcad функцию `odesolve`, предназначенную для численного решения дифференциального уравнения и их систем. Пользовательская функция `odesolve` вернула четыре функции пользователя с именами x , y , v_x и v_y . Это не совсем обычные функции, т.к. их нельзя просто так рассмотреть оператором $x(t) \rightarrow$ в виде, составленном из неких элементарных функций (\sin , \cos и т.д.) и элементарных операторов (сложение, вычитание, возведение в степень и т.д.). Функции x , y , v_x и v_y получены в результате интерполяции таблиц, сгенерированных при численном решении дифференциальных уравнений. Тем не менее, по функциям x , y , v_x и v_y можно вести вычисления (узнать, например, координаты капли и/или ее скорость через секунду полета) и строить графики. Что мы и сделали – см. рис. 2-4.

² Можно ввести не значения плотностей воды и воздуха и значение кинематической вязкости воздуха, а значения температуры и давления, по которым можно будет потом определить значения этих теплофизических параметров.

³ Ветер влияет на работу брызгальных бассейнов. Упомянувшийся нами фонтан на Женевском озере отключается при большой скорости ветра. Иначе вода из фонтана будет поливать берег озера.

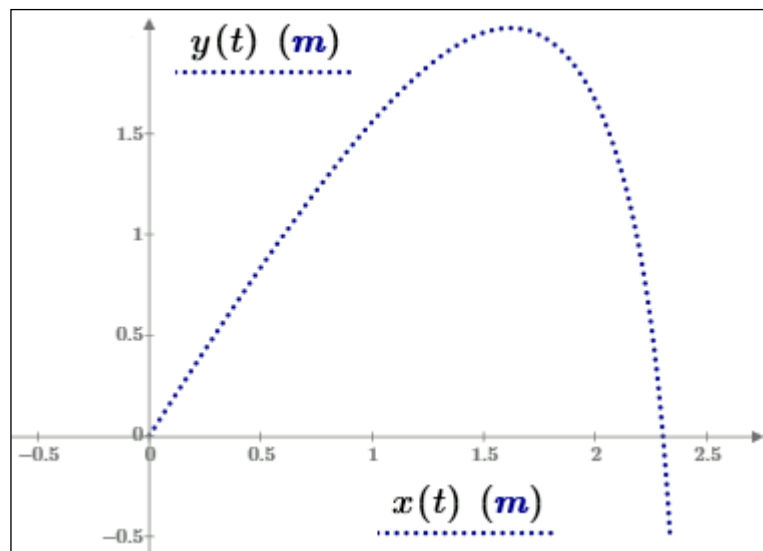


Рис. 2. Полет капли воды при отсутствии ветра

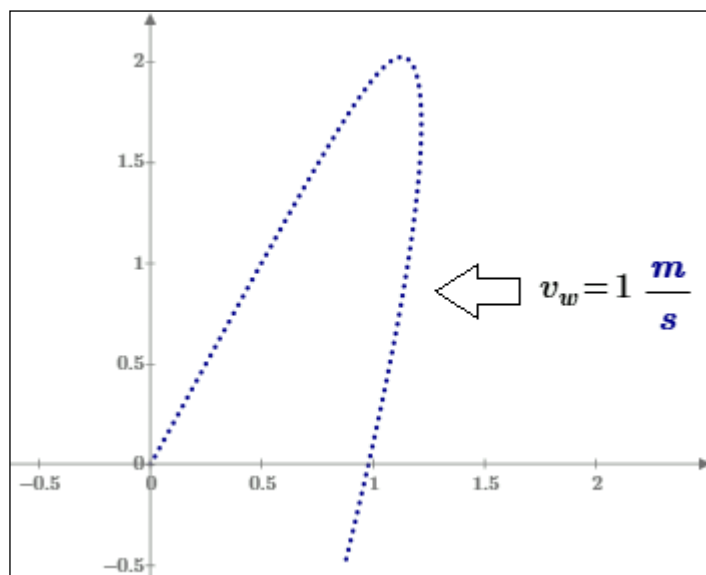


Рис. 3. Полет капли воды при слабом встречном ветре

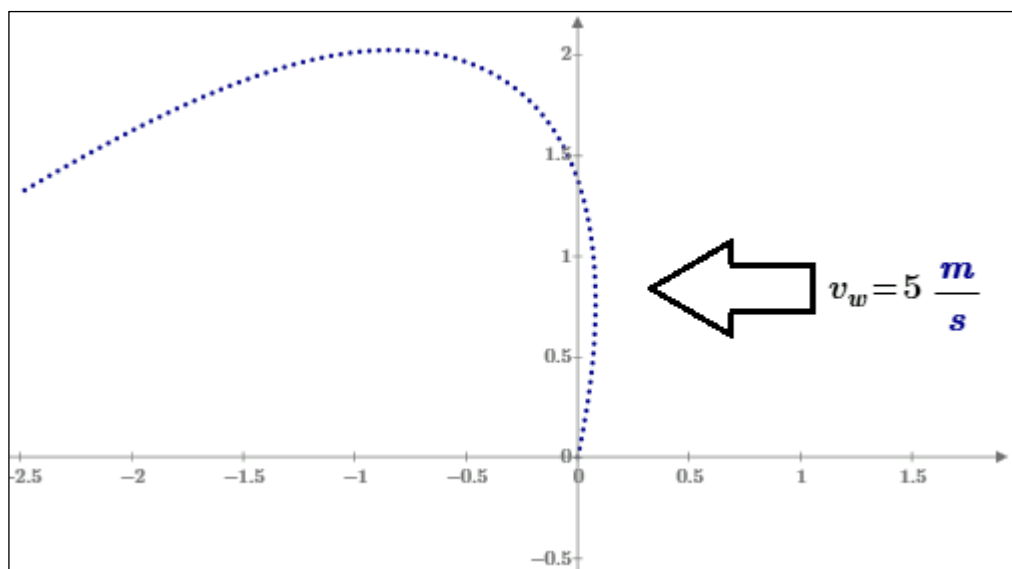


Рис. 4. Полет капли воды при сильном встречном ветре

Полезно сгенерировать функции, являющиеся решением системы дифференциальных уравнений, которые имели бы *дополнительный* аргумент. В нашей задаче о полете капли *основным* аргументом искомым функций x , y , v_x и v_y является время t . Дополнительным аргументом в решении данной задачи может быть, например, угол наклона форсунки. Это позволит построить графики не только по одной струе (см. рис. 2-4), но и по несколькими струями. Это можно сделать с функцией `odesolve` только недокументированным приемом, описанными на форуме <http://communities.ptc.com/message/228509>. Документированный прием при решении подобной задачи показан на рис. 5.

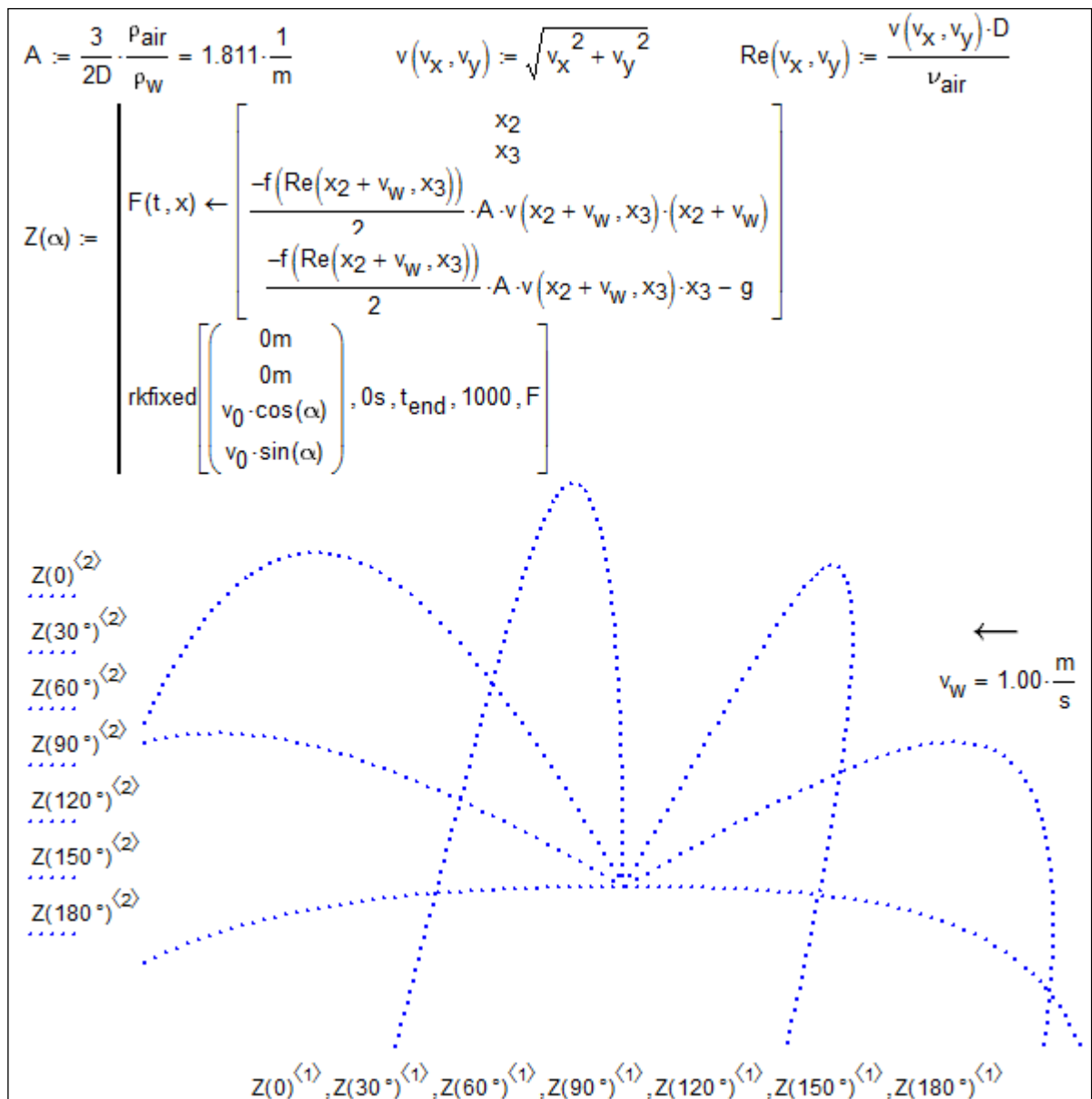


Рис. 5. Решение дифференциальных уравнений с дополнительным аргументом

Встроенная в Mathcad функция `rkfixed`, задействованная в решении, показанном на рис. 5, возвращает функцию-матрицу, возвращающую дискретные значения величин t , x , y , v_x и v_y (столбцы матрицы). Последние четыре величины (x , y – координаты капли и v_x , v_y – ее скорость в двух направлениях) на рис. 5 обозначены как элементы вектора (столбцы матрицы) $x = x_1, x_2, x_3$ и x_4 . Нулевой столбец нашей функции-матрицы содержит дискретные значения времени t . В нашей функции-матрице 1000 строк, что задается четвертым аргументом функции `rkfixed`.

Изменяя скорость ветра и оставляя константами другие исходные величины, можно создать анимацию – живую картину изменения траекторий полета капель воды при разных углах наклона форсунки – 0, 30, 60, 90, 120, 150 и 180 угловых градусов. Один кадр такой анимации при скорости ветра, равной одному метру в секунду, показан на рис. 5. Технология создания подобной анимации описана здесь [4]. Саму анимацию можно посмотреть здесь <http://communities.ptc.com/videos/4530>.

Система уравнений, показанная на рис. 1, должна быть, конечно, намного сложнее. Она должна, например, более тщательно учитывать составляющие скорости по горизонтальному и вертикальному направлениям и по абсолютному значению скорости капли воды, как это сделано в решении, показанном на рис. 5. Эти нюансы рассмотрены на форуме <http://communities.ptc.com/message/228797>. Но можно ограничиться и упрощенным решением, показанным на рис. 1, принимая во внимание то, что наша шарообразная капля воды при реальном полете будет деформироваться и разбиваться на более мелкие капли. Но наше упрощенное решение дает вполне правдоподобную анимацию. А этого достаточно для начальной (качественной) постановки задачи. Задачу можно еще более упростить – принять, например, коэффициент трения капли о воздух, равным 0.5 – см. первую формулу и график на рис. 1.

Дивертисмент

С брызгательными бассейнами у первого автора статьи была интересная история, закончившаяся изобретением.

В 80-е годы прошлого столетия этого автора пригласили на московский микояновский мясокомбинат (www.mikoan.ru) на предмет исследование возможности и эффективности установки магнитного аппарата [8] для предотвращения накипеобразования в испарителе холодильной установки, которая, как известно, работает так. Хладагент испаряется при низком

давлении в испарителе холодильной камеры. Затем компрессор повышает давление хладагента, и он конденсируется в конденсаторе, расположенном вне холодильной камеры [9]. Конденсатор нужно охлаждать либо воздухом как в бытовых холодильниках, либо водой как в промышленных холодильниках, в частности на вышеотмеченном мясокомбинате. На нем горизонтальные трубки конденсатора холодильной установки поливались водой из форсунок, а зимой охлаждались воздухом. Сама же вода охлаждалась на небольшой градирне, тоже, кстати говоря, с форсунками.

Так вот трубки конденсатора холодильной установки зимой покрывались инеем, а летом слоем накипи, что ухудшало работу холодильной установки – вызывало перерасход электроэнергии на привод компрессора (это еще можно было терпеть) и/или повышение температуры в холодильных и морозильных камерах. А это было уже недопустимо, т.к. нарушало режим хранения мяса и мясных изделий.

Вот работники этого комбината и призвали специалистов кафедры Технологии воды и топлива МЭИ помочь им бороться с накипью посредством магнитной обработки воды, которая тогда была очень «модной» технологией.

При исследовании холодильной установки нами было замечено, что особо повышенная интенсивность накипеобразования наблюдается на тех участках труб, которые плохо или совсем не орошаются водой вследствие забивания форсунок сколами накипи. Мы предложили поставить перед форсунками циклон, который сбрасывал бы часть охлаждающей воды с кусочками накипи в приемный поддон, минуя форсунки.

И второе. Хладагентом на данной холодильной установке был аммиак, небольшую часть которого необходимо было продувать из контура холодильной установки и заменять его новым аммиаком из баллонов. Эта продувка велась в бак с водой. Затем эта аммиачная вода отдавалась какому-

то колхозу для удобрения и раскисления почвы. Мы предложили в качестве добавочной воды системы охлаждения конденсатора холодильника мясокомбината использовать не сырую водопроводную воду с накипеобразователями (кальций, магний, гидрокарбонаты и др.), а слабоаммиачную воду, в которой прошел процесс умягчения воды [10]. Все эти исследования и раздумья вылились в авторское свидетельство «Способ работы аммиачной холодильной установки».

И последнее.

Описываемый Микояновский мясокомбинат был первым предприятием Москвы и России, кто использовал рассол, добываемый из-под Москвы. Сейчас таких предприятий очень много и это чревато серьезными экологическими последствиями.

Но это тема для отдельной статьи.

Вывод

Инженерный калькулятор Mathcad простые в освоении, но довольно мощные инструменты для решения систем дифференциальных уравнений. Это позволяет быстро и качественно моделировать некоторые динамические водные системы.

Данная статья является одним из этюдов книги «Теплотехнические этюды в Mathcad», готовящейся к изданию в Издательском доме МЭИ (www.mpei-publishers.ru).

Литература:

1. Очков В.Ф., Чжо Ко Ко, Аунг Ту Ра Тун Шаблоны для расчетов процессов водоподготовки // Водочистка, Водоподготовка, Водоснабжение, № 6, 2013 г., С. 50-55. (<http://tw.t.mpei.ac.ru/ochkov/VPU-Template.pdf>)

2. Очков В.Ф., Орлов К.А., Чжо Ко Ко, Анохин Д.А. «Облачные» функции для инженерных расчетов водоснабжения // Водоснабжение и канализация № 9-10, 2012 г., С.68-74. (<http://twt.mpei.ac.ru/GDHB/CloudFunction.pdf>)
3. Очков В.Ф. Задачи по физике: новый подход к решению (макет статьи) // Открытое образование № 6, 2012 г., С. 12-19 (<http://twt.mpei.ac.ru/ochkov/Mathcad-15/Physic-pdf.pdf>)
4. Очков В.Ф. Живые кинематические схемы в Mathcad // Открытое образование, №3, 2013. С. 27-33 (<http://twt.mpei.ac.ru/ochkov/Mathcad-15/kinematic.html>)
5. Солодов А.П., Очков В.Ф. Mathcad / Дифференциальные модели" Издательство МЭИ, 2002 – http://twt.mpei.ac.ru/ochkov/Diff_MC/index.htm (английский вариант A.Solodov, V. Ochkov. Differential Models. An Introduction with Mathcad, Publishing house Springer, 2005)
6. Коробов В.И., Очков В.Ф. Химическая кинетика: введение с Mathcad/Maple/ MCS М.: Горячая линия-Телеком, 2009 – <http://twt.mpei.ac.ru/ТТНВ/New-Chem-Kin/En-Ru-book.html> (английский вариант V.Korobov, V. Ochkov Chemical Kinetics with Mathcad and Maple, Publishing house Springer, 2010)
7. Сайт «Динамические модели в среде Mathcad – <http://communities.ptc.com/groups/dynamic-models-in-mathcad>
8. Очков В.Ф. Вода и магнит // Водоочистка, Водоподготовка, Водоснабжение, № 10, 2011, С. 36-48. (<http://twt.mpei.ac.ru/ochkov/МО/ВВВ.html>)
9. Очков В.Ф., Орлов К.А., Очков А.В., Знаменский В.Е., Чижмакова В.Ю., Волощук В.А. «Облачный» сервис по свойствам рабочих веществ холодильных установок // Вестник Международной академии холода, №2, 2013 г., С. 23-28. (<http://twt.mpei.ac.ru/ochkov/WSPНВ/Web-Refr-Ochkov-R-407c.pdf>)
10. Очков В.Ф. Программированный расчет известкования и коагуляции воды // Водоочистка, Водоподготовка, Водоснабжение, №7 (19), 2009 г. С. 41-46 (<http://twt.mpei.ac.ru/ochkov/CalcCoag/Chalking-Coagulation.pdf>)