Метод Эйлера в задаче преследования

Валерий Очков

Представлено предельно простое решение классической задачи преследование зайца волком. Обсуждаются аналитические и численные методы решения. Предложен разностный метод решения. Решения представлены в виде кадров анимации и ссылок на саму анимацию. Найден новый вид замкнутых кривых, связанных с задачей преследования зайца волком.

Ключевые слова: заяц, волк, преследование, разностная схема, дифференциальное уравнение, аналитическое и численное решение, метод Эйлера, Mathcad, анимация

Сайт с расчетными файлами и анимациями статьи https://community.ptc.com/t5/PTC-Mathcad/Wolf-and-hare-one-old-problem-with-simple-Mathcad-solution/td-p/574235

Есть такая старая математическая задача: заяц бежит по полю, а за ним гонится волк (борзой пес[1]), который ориентируется не на свой нюх («взял след»), а на зрение – бежит строго на зайца. Какова будет траектория движения волка (кривая погони)? Как она будет связана с траекторией движения зайца?

Языком математики эта задача формулируется так: кривая погони — кривая, представляющая собой решение задачи о «погоне», которая ставится следующим образом. Пусть точка A равномерно движется по некоторой заданной кривой. Требуется найти такую траекторию равномерного движения точки P, что касательная, проведённая к траектории в любой момент движения, проходила бы через соответствующее этому моменту положение точки A.

Эта вроде бы чисто игровая задача имеет важное практическое приложение: зенитная ракета или самолет-перехватчик летит к цели, выбирая некий оптимальный путь. Идея решения этой задачи в среде Mathcad пришла в голову автору, когда он увидел, как собака погналась за кошкой, которая спаслась, вскарабкавшись на дерево.

В Интернете можно найти множество описаний постановки и решения этой задачи[2]. При этом она обычно предельно упрощается: заяц бежит по прямой линии, а сбоку на него выбегает волк (см. рис. 2 ниже). Скорость волка, естественно, выше скорости зайца, и эти две величины постоянны. Исследователи этой задачи, как правило, пытаются найти ее аналитическое решение – ищут математическое выражение для описания траектории бега волка, что выливается в множество

---

[1] Упомянем мимоходом, что русская псовая борзая – это единственная порода собак, которая была выведена в России. У Льва Толстого в романе «Война и мир» очень красочно описана охота с этими прекрасными животными. Тут можно решить такую задачу: волк гонится за зайцем, а за волком гонится свора борзых собак, за которой следуют охотники верхом на лошадях. Предложенный в статье метод решения вполне справиться с такой задачей.

[2] При поиске в Интернете по ключевым словам «Заяц и волк» или «Wolf/Greyhound and hare/rabbit» возникает сильный информационный шум, связанный с известным анимационным сериалом «Ну погоди!».

сложных преобразований и пояснений к ним, в которых непосвященные в тонкостях высшей математики быстро запутываются и теряют нить рассуждений. Пример таких формул можно найти, например, здесь [1, 2] или на сайте статьи. На этом же сайте читатель может увидеть анимации, кадры которых показаны ниже, а также скачать соответствующие Mathcad-документы.

Но в настоящее время мы все чаще и чаще используем не аналитические, а численные методы решения математических задач. Это, увы, несколько снижает «изящество» решения, но открывает другие интересные и не менее «изящные» возможности, в частности, для анимационного иллюстрирования решений, для их большей привязки к реальности.

Задачу о погоне волка за зайцем можно решить не только посредством составления «страшных» дифференциальных уравнений [3], но и другим путем – через реализацию несложной ***разностной схемы***. А разность, как известно, это предтеча дифференциала – разности, стремящейся к нулю, но не достигающей нуля. Дифференциальные уравнения численно решаются через составление этих самых разностных схем. Так давай те же мы не будем составлять дифференциальное уравнение, описывающее бег волка за зайцем, которые аналитически решить невозможно, а вернемся к истокам – к эти самым разностным схемам.

На рисунке 1 показана разностная схема решения задачи о волке и зайце. Центральным элементом этого численного метода является угол φ – угол направления, куда ориентируется волк, догоняя зайца (см. центральный кадр анимации на рис. 2 и первый кадр на рис. 3). По этому углу – через его синус и косинус рассчитывается приращение пути волка в горизонтальном (точнее левом) и вертикальном (правом) направлениях[3] – значения векторов x_{wolf} и y_{wolf}. И все! И никаких головоломных дифференциальных уравнений и их решений – численных или аналитических!

$$\begin{pmatrix} x_{wolf_{i+1}} \\ y_{wolf_{i+1}} \\ \varphi_{i+1} \end{pmatrix} := \begin{bmatrix} x_{wolf_i} + v_{wolf} \cdot \Delta t \cdot \sin(\varphi_i) \\ y_{wolf_i} + v_{wolf} \cdot \Delta t \cdot \cos(\varphi_i) \\ \operatorname{atan}\left(\dfrac{x_{hare_i} - x_{wolf_i}}{y_{hare_i} - y_{wolf_i}}\right) + \pi \cdot \left(y_{wolf_i} > y_{hare_i}\right) \end{bmatrix}$$

Рис. 1. Разностная схема решения задачи о волке, догоняющем зайца

Можно задавать практически любую траекторию движения зайца, которая хранится в векторах x_{hare} и y_{hare}), а также начальное положение волка (первые элементы векторов x_{woif}, y_{woif} и φ) и генерировать довольно занимательные траектории, а также анимации погони волка за зайцем – см. примеры ниже. Следует особо подчеркнуть, что операторы, показанные на рис. 1, выполняются не *последовательно* (сверху вниз), а параллельно [4]. Это является следствием того, что эти три оператора вставлены в расчет не отдельно друг от друга, а вектором. По i-тым известным значениям элементов векторов x_{hare}, y_{hare}, x_{woif}, y_{woif} и φ рассчитываются очередные (i+1) значения элементов

[3] Ниже будут сформированы задачи, решение которых более целесообразно вести не в декартовых, а в полярных координатах.

векторов[4] x_{woif}, y_{woif} и φ. Угол φ рассчитывается через арктангенс (atan) соответствующего отношения катетов прямоугольного треугольника, показанного на рис. 3 и 4. Просто и со вкусом! Как говорил один киноперсонаж: «Это не эстетично, зато дешево, надежно и практично!» (https://www.youtube.com/watch?v=RiMLGxEWuV0). Под «эстетикой» же надо понимать аналитическое решение задачи. Оно, конечно, красивое, но совершенно непрактичное! Стоит только слегка искривить траекторию движения зайца, как все решение рушится. А заяц, как понимает читатель, никогда не бежит по прямой, спасаясь от волка или собаки.

Метод решения задачи о погоне, показанный на рис. 1, подобен методу Эйлера – простейшему методу численного решения обыкновенного дифференциального уравнения (задача Коши с начальными условиями) – см. рис. 2. При реализации этого метода очередное значение искомой функции рассчитывается с учетом предыдущего значения искомой функции и значения производной функции в текущей точке. В методе Эйлера, приложенной к задаче о погоне, производной искомой функции в явном виде нет, но есть прямоугольный треугольник с углом φ (см. рис. 3 и 4), который определяет направляющую касательную к траектории бега волка.

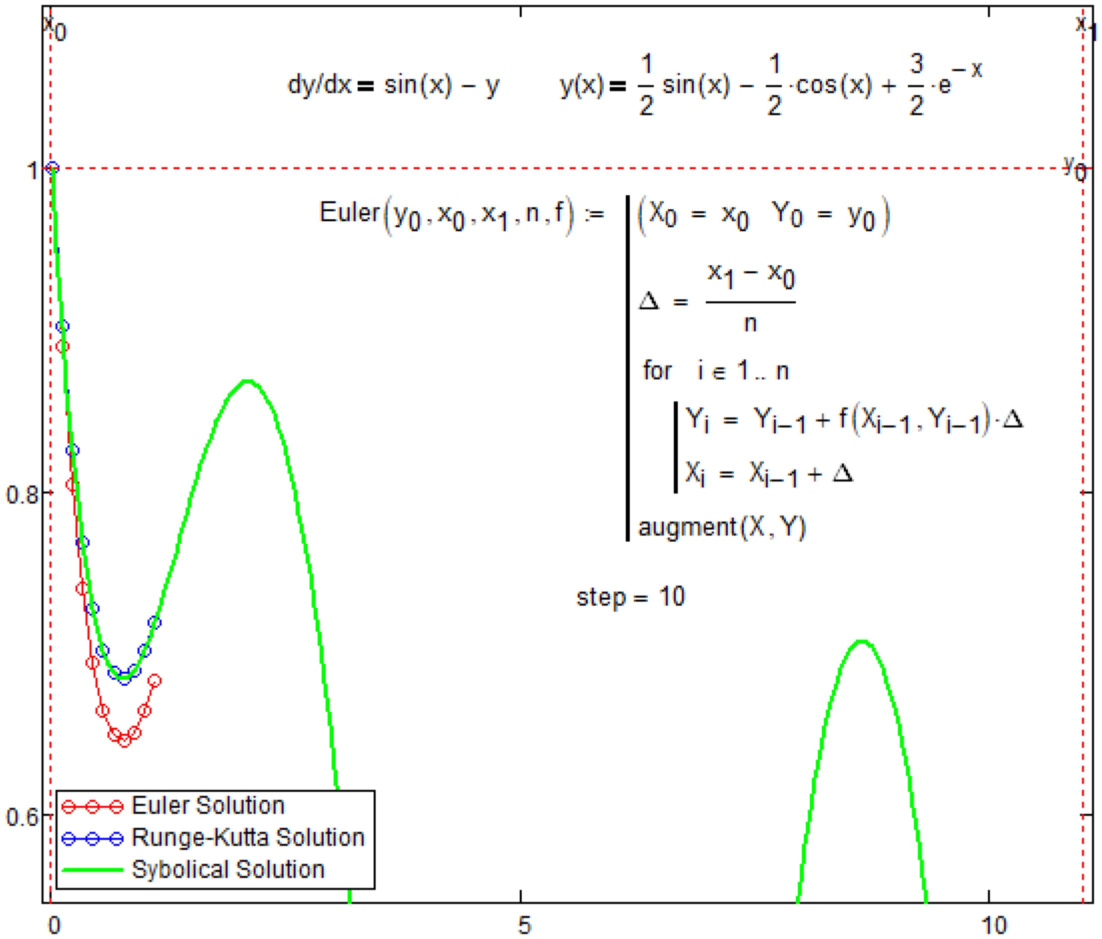

Рис. 2. Метод Эйлера решения обыкновенного дифференциального уравнения

На рисунке 2 можно видеть график численного решения обыкновенного дифференциального уравнения не только методом Эйлера (линия с точками вблизи линии

[4] Можно добавить векторы с буквой z в названии, и решать задачу о погоне не на плоскость, а в трехмерном пространстве.

аналитического решения), но и методом Рунге – Кутты (точки на линии аналитического решения), который более точен. Вопрос о том, как можно метод Рунге – Кутты применить к задаче погони, остается пока открытым. Читатели журнала могут постараться на него ответить.

На рисунке 3 показаны три кадра анимации решения с помощью нашей разностной схемы классического варианта задачи – заяц бежит по прямой горизонтальной линии со скоростью 20 kph, а волк преследует его со скоростью 33 kph и догоняет примерно через 2 минуты, пробежав что-то около 1100 м. Заяц же успел пробежать за это время роковые[5] 666 м. При расчете было сделано 1000 кадров анимации – от нулевого до 999-го [5]. Нетрудно подсчитать, чему равно значение переменой Δt, фигурирующей в формулах на рис. 1. Оно было равно 120 s/1000 = 0.12 s: заяц и волк бегут не по гладкой кривой, а скачками, что лишний раз оправдывает применение разностной схемы, когда гладкая непрерывная кривая заменяется на отрезки прямых линий – скачки зайца и волка!

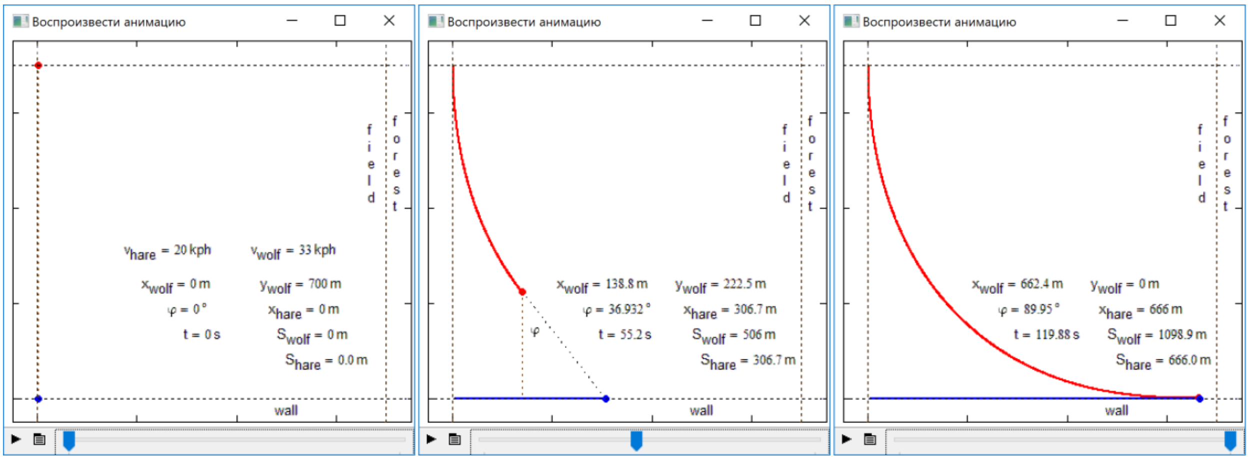

Рис. 3. Решение задачи о волке и зайце – заяц бежит по прямой линии

В задаче, показанной на рис. 3, подразумевается, что заяц бежит по полю (a field) к спасительному лесу (a forest), прижавшись к стенке (a wall). Но до леса бедный заяц, увы, не добежал. На сайте статьи показан случай, когда заяц, почувствовав, что волк нагоняет его, «включает форсаж[6]» – увеличивает свою скорость и успевает убежать в лес. Для этого достаточно было первые два оператора, показанные на рис. 1, дополнить функцией if. На этом же сайте можно видеть анимацию бега зайца без ограничивающей стенки: заяц, увидев, что волк совсем уже близко, резко сворачивает вправо – см. рис. 4.

[5] Число 666 тут оказалось случайно, но вполне кстати! В статье, кстати семь рисунков, семь сносок и семь литературных ссылок – три семерки. На счастье. Чтобы статья имела успех у читателей.

[6] Радар современного военного самолета «видит» приближающуюся ракету и дает сигнал летчику, чтобы тот на это отреагировал. Случай, показанный на рис. 3, можно трактовать и так: самолет продолжает лететь по прямой, но выпускает тепловую ракету, за которая отводит ее от цели. Такие защитные ракеты часто отстреливают вертолеты на парадах, что делает их еще более зрелищными. Эта статья, кстати, частично писалась на борту пассажирского самолета с думой о том, что такие самолеты нужно тоже оборудовать тепловыми ракетами для защиты от ошибочно пущенных зенитных ракет.

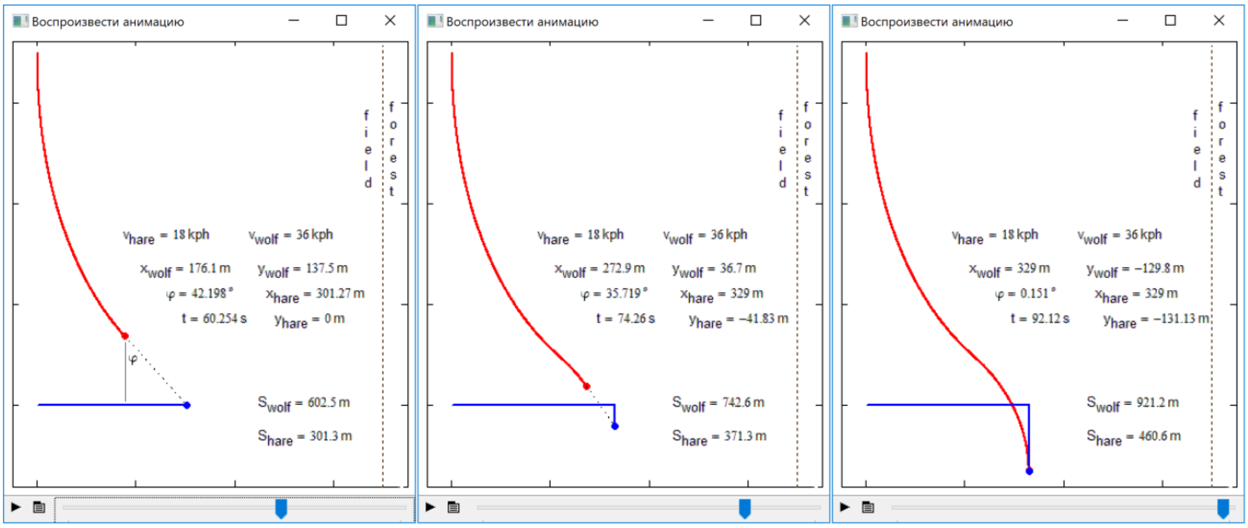

Рис. 4. Решение задачи о волке и зайце – заяц бежит по прямой линии и резко сворачивает вправо

Если задача, отображенная на рис. 3, решается аналитически [1, 2], то задача на рис. 4 уже нет.

Решение, показанное на рисунке 5, еще более сложное – заяц бежит по кругу. Это уже не живое существо, а некий тряпичный заяц, которого крутят специальным устройством для тренировки гончих собак или для организации их бегов[7]. Скорость собаки меньше скорости зайца, и собака постепенно выходит на «круговую орбиту», двигаясь пеленгом – несколько сзади и справа от «зайца» так, чтобы угловые скорости движения обоих животных были одинаковы. Нетрудно рассчитать радиус собачьего круга. Понятно, что в случае, показанном на рис. 5, собака может поймать зайца, если изменит тактику бега – остановится, например, а потом побежит в другую сторону. Но случай бега зайца по замкнутой кривой интересен в том плане, что он позволит нам открыть… новый вид замкнутых кривых.

[7] Или скачек? С лошадьми все ясно – если лошади бегут галопом, то это скачки, а если рысью, то это бега. Но собаку нельзя заставить бежать за зайцем рысью. Рысью приучают бегать лошадей для того, чтобы они ровно, без толчков везли повозки. В классической русской тройке коренной конь бежит рысью, а пристяжные лошади – галопом. Дети, кстати, иногда бегают не рысью, а галопом. У Чичикова из гоголевских «Мертвых душ» была знаменитая «птица-тройка», лошадям которой кучер Селифан дал клички «Коренной», «Чубарый» и «Заседатель». «Этот чубарый конь был сильно лукав и показывал только для вида, будто бы везет, тогда как коренной гнедой и пристяжной каурой масти, называвшийся Заседателем, потому что был приобретен от какого-то заседателя, трудился от всего сердца, так что даже в глазах их было заметно получаемое ими от того удовольствие.»

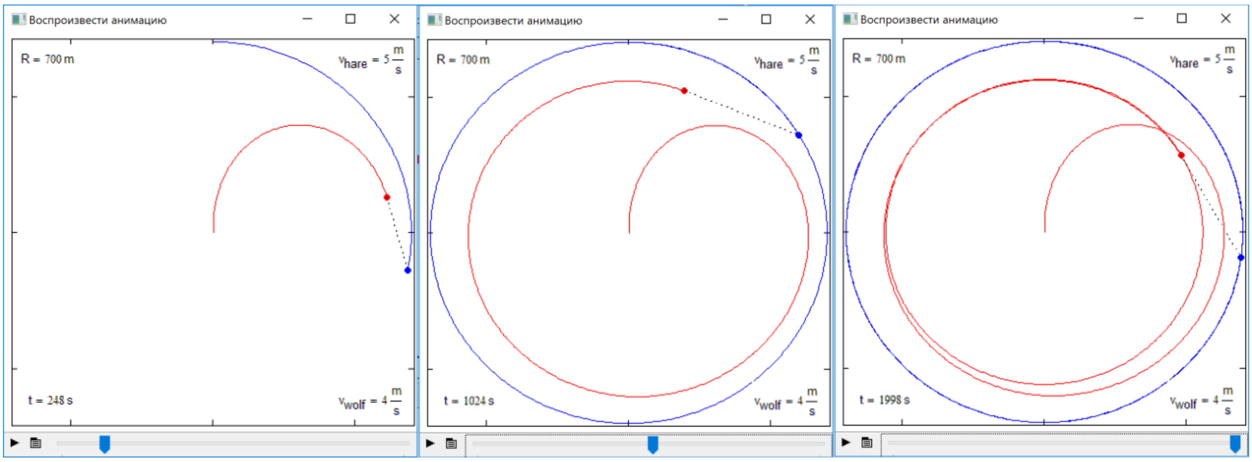

Рис. 5. Решение задачи о волке и зайце – заяц бежит по кругу

Чтобы еще больше подзадорить собаку, можно пустить тряпичного зайца не по кругу, а по… квадрату – см. рис. 6.

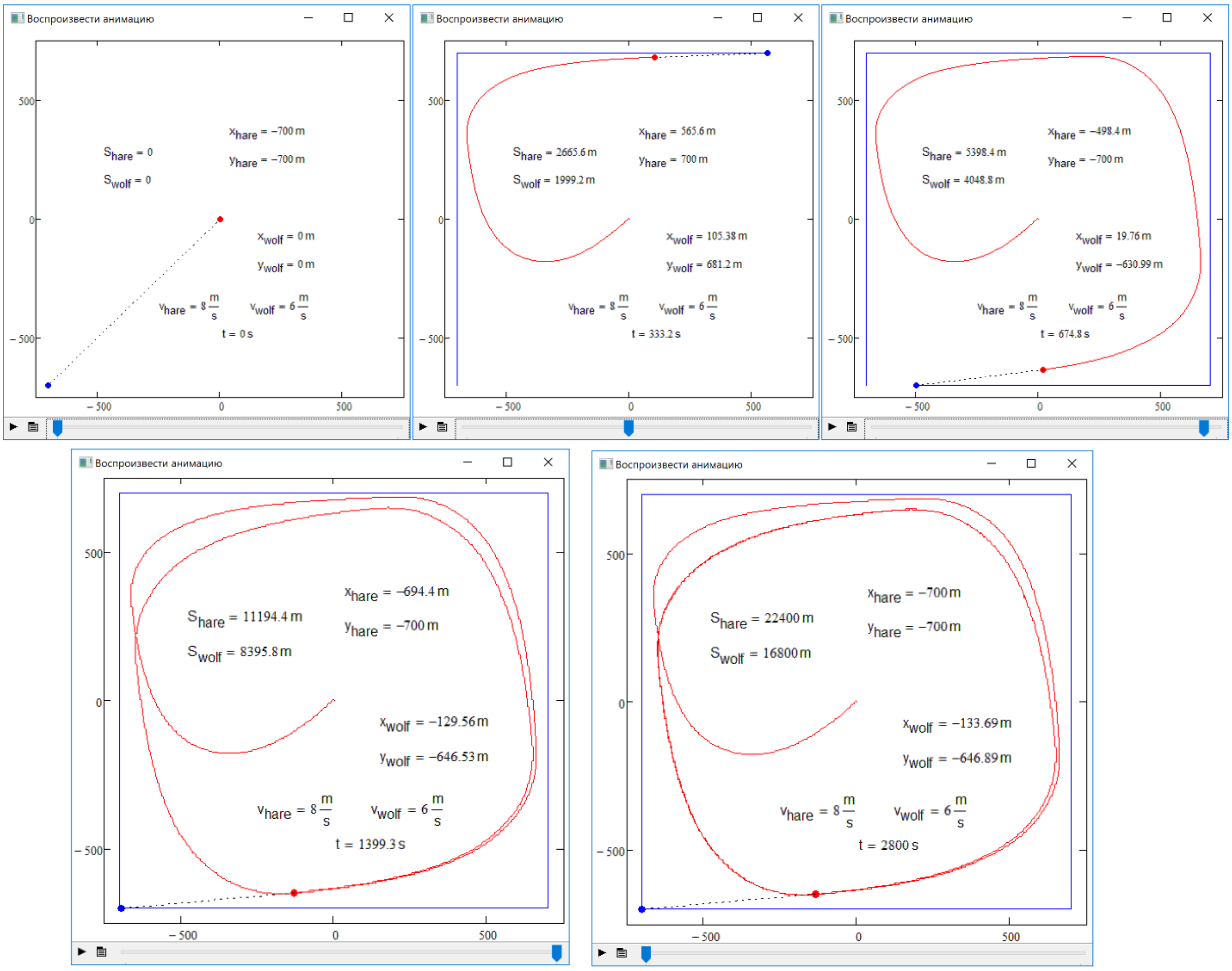

Рис. 6. Решения задачи о волке и зайце – заяц бежит по квадрату

В этом случае собака тоже постепенно по спирали перейдет на бег по замкнутой кривой, вид которой подобен контуру экранов старых телевизоров и компьютеров, немного повернутых набок. Определение аналитического вида этой кривой может быть предметом отдельного математического исследования.

На рисунке 7 (см. сноску 5) можно видеть еще один занимательный случай бега волка за зайцем: заяц бежит по эллипсу. Тут волк также в конце концов выбегает на эллиптическую «орбиту», оси которой так же, как и в случае с квадратом (см. рис. 6) наклонены на бок.

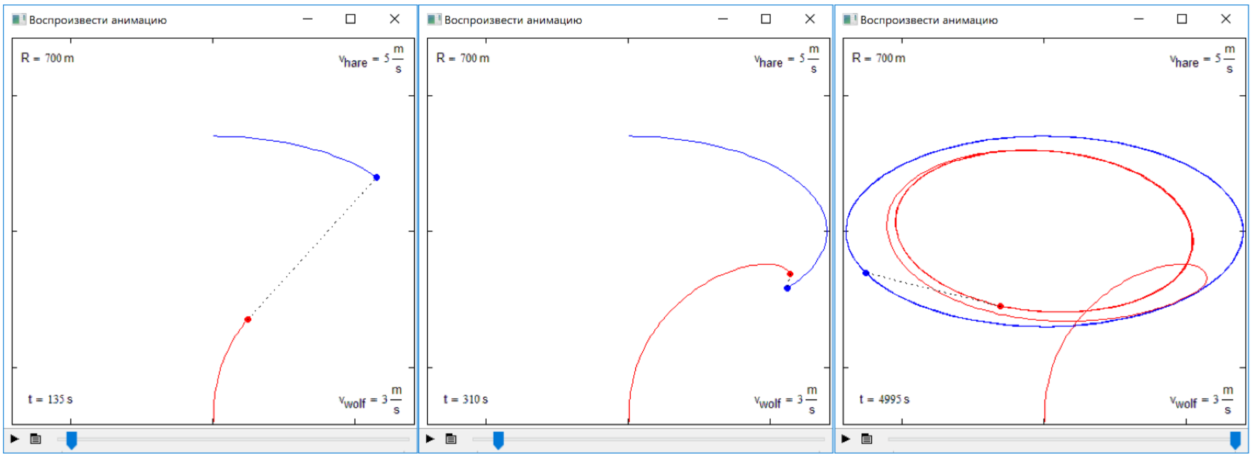

Рис. 7. Решения задачи о волке и зайце – заяц бежит по эллипсу, а волк выбегает не из центра (см. рис. 5 и 6), а из периферии

Автор же, желая «подзадорить» читателя, предлагают ему пустить зайца по более сложным замкнутым траекториям – по треугольнику, по ромбу, по лемнискате Бернулли или по авторским кривым, описанным в [6, 7].

Литература:

1. Силагадзе З. К., Чащина О. И. Задача преследования зайца волком как упражнение элементарной кинематики // Вестник НГУ. № 2. 2010 г. С. 111-115. URL: http://www.phys.nsu.ru/vestnik/catalogue/2010/02/Vestnik_NSU_10T5V2_p111_p115.pdf
2. Pták P., Tkadlec J. The Dog-and-Rabbit Chase Revisited // Acta Polytechnica. 1996. Vol. 36. pp. 5–10. URL: ftp://math.feld.cvut.cz/pub/tkadlec/papers/tdarcr.pdf
3. Очков В.Ф., Богомолова Е.П. Это страшное слово дифуры… // Информатика в школе. №1. 2015. С. 55-58. URL: http://twt.mpei.ac.ru/ochkov/ODE.pdf
4. Очков В. Ф., Калинина А. В. По порядку становись! // Информатика в школе. № 3 за 2017 г. С. 56-62. URL: http://twt.mpei.ac.ru/ochkov/sort.pdf
5. Очков В. Ф. Живые кинематические схемы в Mathcad // Открытое образование. — 2013. — № 3. URL: http://twt.mpei.ac.ru/ochkov/Mathcad-15/ kinematic.html.
6. Очков В.Ф., Фалькони А.Д. Семь вычислительных кривых или Велосипед Аполлония // Cloud of Science. 2016. Т. 3. № 3. С. 397-418. URL: http://twt.mpei.ac.ru/ochkov/7-curves.pdf
7. Очков В. Ф., Богомолова Е. П., Иванов Д. А. Физико-математические этюды с Mathcad и Интернет: Учебное пособие. — 2-е изд., испр. и доп. — СПб.: Издательство «Лань», 2018. — 560 с.: ил. URL: http://twt.mpei.ac.ru/ochkov/T-2018/PhysMathStudies.pdf