Степенные лемнискаты

В. Очков

В данном кратком сообщении рассматривается новое семейство плоских кривых, построенное на основе обобщения определения эллипса и овала Кассини с использованием понятия среднего степенного. Это делается на основе корректировки определений эллипса, овала Кассини и других подобных замкнутых кривых, базирующихся на понятии среднее степенное.

Ключевые слова: эллипс, среднее арифметическое, среднее геометрическое, лемниската Бернулли, среднее степенное, среднее Колмогорова, обобщенная лемниската, обобщенная лемниската с 3 фокусами.

Вот как можно слегка скорректировать определение *эллипса* [1]: эллипс – это геометрическое место точек на плоскости, у которых *среднее арифметическое* расстояний до двух фокусов постоянно.

Если в этом определении слово *арифметическое* заменить на слово *геометрическое*, то это будет скорректированным определением *овала Кассини*. Если же это среднее геометрическое сделать равным половине расстояния между фокусами, то мы получим *лемнискату Бернулли*.

В этих определениях среднее арифметическое mean (среднее геометрическое gmean или среднее гармоническое hmean) можно заменить на *среднее степенное* или даже на *среднее Колмогорова* [2] с дополнительной монотонной функцией. В этом случае мы получим семейство лемнискат, которое можно назвать *обобщенными лемнискатами*. На рисунке 1 показаны некоторые частные случаи степенных лемнискат при разных значениях d – показателя степени среднего степенного. На первом кадре рисунка 1 дана формула среднего степенного для величин a и b (функция пользователя Mean(a, b, d).

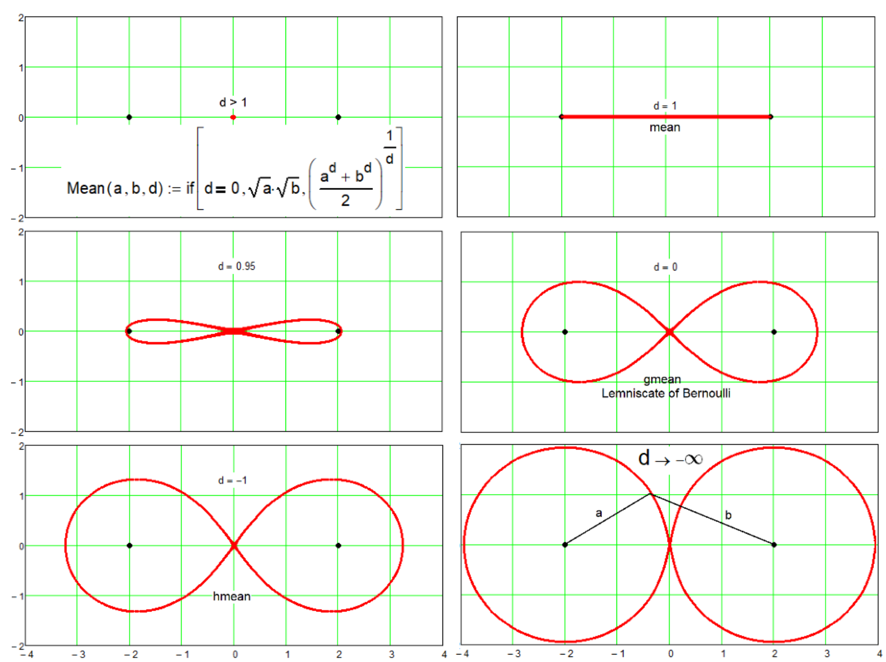

Рис.1 Примеры степенных лемнискат степени d

При $d > 1$ степенная лемниската вырождается в точку, расположенную на середине отрезка, соединяющей два фокуса. Если $d = 1$, то такая лемниската вырождается в отрезок прямой (вырожденный эллипс – сдутый резиновый шарик), соединяющей два фокуса. Если значение d делать меньше единицы, то отрезок прямой начнет… надуваться, как уже упомянутый резиновый шарик, у которого середину перевязали ниткой. При $d = 0$ мы получим лемнискату Бернулли (частный случай овала Кассини), а при $d = -1$ – замкнутую кривую, которую можно назвать *гармонической лемнискатой* – замкнутой кривой, опирающейся на среднее гармоническое. При значении d, приближающемуся к минус бесконечности степенная лемниската будет превращаться в две одинаковые соприкасающиеся окружности, центрами которых будут фокусы.

Все описанные рассуждения и построения можно отнести и к кривым с более чем двумя фокусами. В этом случае лемнискаты будут также иметь более двух лепестков. Пример на рисунке 2, где, правда, в центре получилась не точка, а некая шестиконечная размытая область. Так вышло из-за того, что была использована авторский метод приближенного построения графиков сканированием прямоугольной области [4].

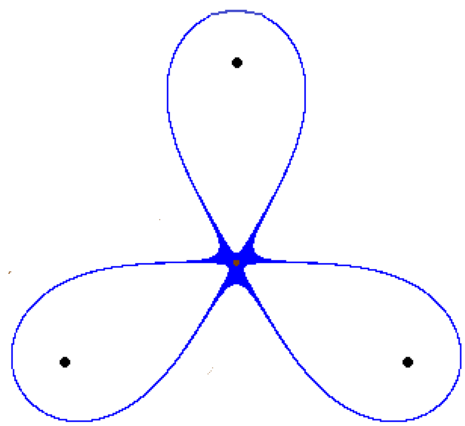

Рис. 2. Трехлепестковая степенная лемниската (трехлепестковая роза)

На сайте [4] можно увидеть рисунки и анимации геометрических объектов, описанных в статье, а также скачать Mathcad-файлы.

Литература:

1. А. А. Савелов. Кривые Персея // Плоские кривые: систематика, свойства, применение / под ред. А. П. Нордена. — М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1960.
2. Колмогоров А. Н. Математика и механика // Избранные труды / отв. ред. С. М. Никольский, сост. В. М. Тихомиров. — М.: Наука, 1985. — Т. 1. — С. 136-138.
3. Очков В.Ф., Фалькони А.Д. Семь вычислительных кривых или Велосипед Аполлония // Cloud of Science. 2016. Т. 3. № 3. С. 397-418 (http://twt.mpei.ac.ru/ochkov/7-curves.pdf)
4. https://community.ptc.com/t5/PTC-Mathcad/Tree-ovals-mean-gmean-amp-hmean/m-p/702024