

11 Инженерные методы расчета тепломассообмена в энергетических установках

11.1 Уравнение Ньютона-Рихмана

Согласно уравнению Ньютона-Рихмана,

$$q = \alpha(t_w - t_f), \quad (11.1)$$

плотность теплового потока q , Вт/м² на поверхности тела пропорциональна температурному напору $\Delta t \equiv t_w - t_f$, К, т.е. разности температур стенки t_w и жидкости t_f . Коэффициент теплоотдачи α , Вт/(м²К), зависит от геометрии поверхности, скорости обтекания, теплофизических свойств теплоносителя и, вообще говоря, от температурного напора.

В зарубежной технической литературе уравнение (11.1) называют законом охлаждения Ньютона. Историческим основанием для этого служат эксперименты Ньютона (1701 г.) по охлаждению металлического предмета в потоке воздуха. Непосредственный результат Ньютона может быть выражен соотношением

$$\frac{dT}{d\tau} \propto -(T - T_f), \quad (11.2)$$

согласно которому скорость охлаждения пропорциональна избыточной температуре тела по отношению к окружающей среде. В этом уравнении не фигурирует ни тепловой поток, ни коэффициент теплоотдачи, однако между утверждениями (11.1) и (11.2) существует тесная связь, которую полезно проследить самостоятельно. Современная формулировка (11.1) была получена через сто лет после Ньютона французским математиком Фурье при создании аналитической теории распространения тепла, т.е. при установлении дифференциального уравнения теплопроводности Фурье и соответствующих краевых условий.

В расчетной практике возможны два варианта постановки задачи с применением (11.1). Если задан температурный напор $\Delta t \equiv t_w - t_f$, то рассчитывают плотность теплового потока q как величину, определяющую тепловую производительность теплообменной установки. Если же задана плотность теплового потока q , как при электрическом или ядерном обогреве, а также температура теплоносителя t_f , то рассчитывают температуру стенки t_w и решают вопрос о том, достаточно ли эффективно охлаждение, чтобы эта температура не превышала допустимую. Ясно, что в обоих случаях желательно иметь высокие значения α , чтобы получить высокопроизводительный теплообменник или чтобы обеспечить необходимое охлаждение теплонапряженных поверхностей.

Для расчета коэффициента теплоотдачи в элементах теплообменных устройств современный инженер располагает необходимым арсеналом расчетных соотношений, созданным в течение столетия интенсивных теоретических и экспериментальных исследований конвективного тепломассообмена.

Далее излагаются основные сведения о закономерностях конвективного теплообмена при вынужденной и свободной конвекции, полученные с помощью простых модельных представлений методами оценки порядка величин. Точные решения для этих задач получены методами пограничного слоя в следующей главе Электронного курса (см. гл. 12 «Теплообмен и трение в пограничном слое»).

Приводятся практические расчетные рекомендации для основных конфигураций, таких как продольное обтекание пластин и криволинейных профилей, поперечное обтекание труб и пучков труб, течение в трубах и каналах. Рассмотрен метод интерполяции между асимптотами, посредством которого получены глобальные аппроксимации для теплоотдачи, пригодные в широкой области изменения определяющих параметров (чисел Рейнольдса, Прандтля, Рэлея).

Задачи *массообмена* решаются в рамках аналогии между процессами теплообмена и массообмена (см. § 11.11). *Уравнение массоотдачи*,

$$j_{v, \text{conduct}} = \rho\beta(c_{v,s} - c_{v,\infty}),$$

как аналог уравнения теплоотдачи (11.1), применяется для расчета *диффузионного* потока $j_{v, \text{conduct}}$, кг/м²с, на поверхности раздела. Разность концентраций c_v рассматриваемого (индекс v) компонента смеси служит движущей силой массопереноса. Для расчета *коэффициента массоотдачи*, β , м/с, применяют соответствующим образом модифицированные соотношения для коэффициента теплоотдачи, как показано в § 11.11.

11.2 Теплоотдача при вынужденной конвекции

Простейшая модель конвективной теплоотдачи

Модельное, предельно упрощенное представление о процессе конвективной теплоотдачи при вынужденном течении формируется следующим образом. Представим натекание холодной жидкости на горячую горизонтальную поверхность с фиксированной температурой t_w как продольное (вдоль x) перемещение полуограниченного (по координате y) холодного массива жидкости t_f с заданной скоростью u_∞ (Рис. 11.1).

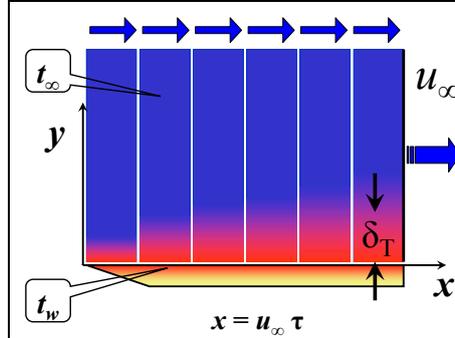


Рис. 11.1. Образование теплового пограничного слоя

Покажем воображаемыми вертикальными линиями перемещающийся слева направо массив жидкости и проследим за глубиной его прогрева δ_T по мере продвижения вдоль горячей стенки. Проблема очень похожа на задачу о *прогреве полуграниченного массива*, решенную ранее в [гл. 8](#) «Нестационарная теплопроводность: аналитические решения». Рекомендуется перечитать весь параграф 8.4 этой главы, включая оценки для аналогичной гидродинамической задачи.

Воспользуемся основным полученным тогда результатом для глубины прогрева δ_T :

$$\delta_T \approx \sqrt{a \tau} \quad (11.3)$$

где символ « \approx » означает «по порядку величины». Время прогрева τ связано с продольной координатой x очевидным соотношением: $\tau = x / u_\infty$. В результате получим следующую оценку для глубины прогрева, или *толщины теплового пограничного слоя*:

$$\delta_T \approx \sqrt{a_f \tau} \approx \sqrt{a_f \frac{x}{u_\infty}} \quad (11.4)$$

Чем больше скорость теплоносителя, тем меньше время теплового контакта и тем меньше толщина пограничного слоя.

Выпишем теперь плотность теплового потока на стенке двумя способами: по уравнению Ньютона—Рихмана (11.1) и через градиент температуры в жидкости у стенки, в соответствии с законом теплопроводности Фурье:

$$q = \alpha(t_w - t_\infty) = -\lambda_f \left. \frac{\partial t}{\partial y} \right|_{y=0} \Rightarrow \alpha = \lambda_f \frac{1}{t_\infty - t_w} \left. \frac{\partial t}{\partial y} \right|_{y=0} \quad (11.5)$$

Таким образом, получилось соотношение между коэффициентом теплоотдачи и градиентом температуры у стенки. Оценивая величину градиента температуры,

$$\left. \frac{\partial t}{\partial y} \right|_{y=0} \approx \frac{t_{\infty} - t_w}{\delta_T}, \quad (11.6)$$

приходим к представлению коэффициента теплоотдачи как проводимости плоского слоя (пограничного слоя):

$$\alpha \approx \lambda_f \frac{1}{t_{\infty} - t_w} \left(\frac{t_{\infty} - t_w}{\delta_T} \right) \Rightarrow \alpha \approx \frac{\lambda_f}{\delta_T} \quad (11.7)$$

После подстановки δ_T из (11.4) получим искомое оценочное соотношение для коэффициента теплоотдачи:

$$\alpha \approx \frac{\lambda_f}{\delta_T} \approx \frac{\lambda_f}{\sqrt{a_f \frac{x}{u_{\infty}}}} = \sqrt{\lambda_f \rho_f c_{p,f}} \sqrt{\frac{u_{\infty}}{x}} \quad (11.8)$$

Итоговое соотношение (11.8) содержит основные закономерности конвективного теплообмена и заслуживает детального анализа:

- Коэффициент теплоотдачи растет вместе со скоростью набегающего потока, что объясняется уменьшением толщины теплового пограничного слоя (см. (11.7)). Движение с повышенной скоростью создает большие градиенты температуры в жидкости у стенки и, соответственно, большие тепловые потоки.
- Коэффициент теплоотдачи убывает по длине обтекаемой поверхности вследствие нарастания толщины теплового пограничного слоя.
- Коэффициент теплоотдачи растет с увеличением теплопроводности, плотности и теплоемкости теплоносителя; влияние этих свойств рекомендуется проследить самостоятельно в соотношениях (11.3) – (11.8).

Из проведенного анализа следуют полезные выводы и рекомендации для конструкторов теплообменников:

- Увеличение скорости позволяет получить более компактные теплообменники (возможно, ценой увеличения гидравлического сопротивления и роста затрат на прокачку теплоносителя).
- При конструировании желательно избегать слишком протяженных по ходу теплоносителя поверхностей и, возможно, предусматривать разрывы и перемешивание перед последующими секциями.
- Вода является более эффективным охладителем, чем воздух, благодаря своей относительно высокой теплопроводности, плотности и теплоемкости.

Отметим теперь основные ограничения полученного результата (11.8). Во-первых, в простейшей модели не учитывались эффекты, связанные с вязкостью жидкости. Это приемлемо в случае высокотеплопроводных и маловязких теплоносителей, таких как жидкие металлы. Но для вязких неметаллических жидкостей торможение у стенки заметно увеличит время контакта, толщину теплового пограничного слоя и, следовательно, уменьшит коэффициент теплоотдачи.

Второе ограничение касается режима течения: была рассмотрена теплоотдача при *ламинарном* обтекании твердой поверхности.

Наконец, остался неизвестным числовой безразмерный коэффициент в формуле (11.8), неявно присутствующий в форме знака оценки порядка « \sim ». Можно утверждать только, что это безразмерный множитель порядка единицы.

Главный позитивный результат анализа состоит в понимании того, каким образом обеспечивается высокая интенсивность теплоотдачи при конвективном теплообмене: быстрое движение жидкости уменьшает толщину пограничного слоя δ_T и тем самым увеличивает термическую проводимость при контакте жидкости со стенкой (см. (11.8)), т.е. коэффициент теплоотдачи: $\alpha \sim \lambda_f / \delta_T$.

Зафиксируем температурный напор $\Delta t \equiv t_w - t_f$. Изменяя скорость течения, мы получаем возможность управлять значениями градиента температуры у стенки (см. (11.6)). Сделав скорость очень большой, мы обеспечим высокий градиент температуры, и следовательно, большие значения плотности теплового потока и коэффициента теплоотдачи. Полезно рассмотреть, что произойдет, если, напротив, внезапно остановить движение жидкости, т.е. прекратить транспортировку теплоты вдоль стенки посредством конвекции.

Представление результатов в безразмерном виде

Представим соотношение (11.4) для толщины теплового пограничного слоя δ_T в безразмерном виде, взяв в качестве *линейного масштаба* (*характерного размера*) соответствующее значение продольной координаты x :

$$\frac{\delta_T}{x} \approx \sqrt{\frac{1}{\left(\frac{u_\infty x}{a}\right)}} \equiv \sqrt{\frac{1}{\text{Pe}_x}} \quad (11.9)$$

Получившийся в правой части *безразмерный комплекс* носит название числа Пекле и интерпретируется следующими образом

$$\text{Re}_x \equiv \frac{u_\infty x}{a_f} = \frac{\rho_f c_{p,f} u_\infty (t_w - t_f)}{\frac{\lambda_f}{x} (t_w - t_f)} \approx \frac{\text{конвективный перенос теплоты}}{\text{теплопроводность}} \quad (11.10)$$

Для потоков в технических устройствах, таких как теплообменники, число Re имеет обычно большие значения и, как следует из (11.9), толщина теплового пограничного слоя оказывается намного меньшей протяженности обтекаемой поверхности:

$$\text{Re} \gg 1 \Rightarrow \frac{\delta_T}{x} \ll 1 \quad (11.11)$$

Неравенство $\text{Re} \gg 1$ является условием, при котором происходит формировании *тонкого* теплового пограничного слоя на обтекаемой стенке.

Для гидродинамической задачи (см. [гл. 8](#) «Нестационарная теплопроводность: аналитические решения», п. 8.4) имеет место формула, аналогичная (11.9):

$$\frac{\delta}{x} \approx \sqrt{\frac{1}{\left(\frac{u_\infty x}{\nu_f}\right)}} \equiv \sqrt{\frac{1}{\text{Re}_x}} \quad (11.12)$$

где δ – толщина динамического пограничного слоя: тонкого слоя жидкости вблизи стенки, заторможенного силами вязкости (скорость внутри этого слоя изменяется от нуля на стенке до скорости набегающего потока). Число Рейнольдса,

$$\text{Re}_x \equiv \frac{u_\infty x}{\nu_f} = \frac{(\rho_f u_\infty) u_\infty}{\mu_f \frac{u_\infty}{x}} \approx \frac{\text{конвективный перенос импульса}}{\text{молекулярный перенос импульса}} \equiv \frac{\text{динамическое давление}}{\text{вязкое трение}} \equiv \frac{\text{инерционные силы в потоке}}{\text{силы вязкого трения}} \quad (11.13)$$

в зависимости от контекста, интерпретируется тремя эквивалентными вербальными способами.

Подобно (11.11):

$$\text{Re} \gg 1 \Rightarrow \frac{\delta}{x} \ll 1 \quad (11.14)$$

Верхней границей применимости полученных соотношений является *критическое значение числа Рейнольдса*:

$$\text{Re}_{\text{cr}} \approx (3 \div 5)10^5 \quad , \quad (11.15)$$

при котором происходит переход от ламинарного режима к турбулентному.

Уравнения (11.9) и (11.13) совместно определяют соотношение толщин теплового и динамического пограничных слоев в зависимости от числа Pr:

$$\frac{\delta_T}{\delta} \approx \sqrt{\frac{a_f}{\nu_f}} \Rightarrow \frac{\delta_T}{\delta} \approx \frac{1}{\sqrt{\text{Pr}}} \quad (11.16)$$

Формула (11.16) служит основой для классификации теплоносителей:

$$\begin{aligned} \text{газы: } \text{Pr} \approx 1 &\Rightarrow \delta_T \sim \delta \\ \text{жидкие металлы: } \text{Pr} \ll 1 &\Rightarrow \delta_T \gg \delta \\ \text{вязкие органические жидкости: } \text{Pr} \gg 1 &\Rightarrow \delta_T \ll \delta \end{aligned} \quad (11.17)$$

Для жидких металлов ($\text{Pr} \ll 1$) динамический слой находится на самом дне относительно толстого теплового пограничного слоя, и теплообмен развивается в потоке жидкости с практически равномерным профилем скорости. Этот предельный случай использовался при построении простейшей модели теплоотдачи (11.8), Рис. 11.1.

Напротив, для вязких низкопроводных жидкостей ($\text{Pr} \gg 1$), таких как тяжелые углеводороды, тепловой пограничный слой весьма тонок по сравнению с динамическим. Поэтому гидродинамика течения, поле скорости в непосредственной близости от стенки в значительной степени определяет интенсивность теплоотдачи. Например, оказывается важной зависимость вязкости жидкости от температуры, поскольку изменение вязкости приводит к деформации поля скорости. Искусственные возмущения течения – с целью интенсифицировать теплообмен – будут эффективными, если только они сосредоточены в непосредственной близости от стенки, как это делают с помощью искусственной шероховатости.

В случае газовых теплоносителей ($\text{Pr} \approx 1$) толщины теплового и динамического слое соизмеримы. Для проблемы интенсификации теплоотдачи отсюда следует общая рекомендация обеспечивать искусственную турбулизацию посредством специальных вставок, соизмеримых с характерным поперечным размером потока.

Безразмерным представлением коэффициента теплоотдачи является число Нуссельта, определяемое как отношение тепловой проводимости α к соответствующему масштабу:

$$\text{Nu}_x \equiv \frac{\alpha x}{\lambda_f} = \frac{\alpha}{\frac{\lambda_f}{x}} \sim \frac{\text{истинная тепловая проводимость}}{\text{тепловая проводимость слоя толщиной } x} \quad (11.18)$$

Масштабом служит проводимость (λ_f/x) *гипотетического* неподвижного слоя жидкости с толщиной x , равной протяженности поверхности вдоль потока.

Теперь можно представить полученное нами выше *оценочное* соотношение (11.8) для коэффициента теплоотдачи в безразмерном виде:

$$\text{Nu}_x \equiv \frac{\alpha}{\frac{\lambda_f}{x}} \approx \frac{\frac{\lambda_f}{\delta_T}}{\frac{\lambda_f}{x}} = \frac{1}{\frac{\delta_T}{x}} = C \sqrt{\frac{u_\infty x}{\nu_f}} \sqrt{\frac{\nu_f}{a_f}}; \quad (11.19)$$

$$\text{Re}_x \equiv \frac{u_\infty x}{\nu_f}; \quad \text{Pr} \equiv \frac{\nu_f}{a_f}; \quad C \approx 1;$$

$$\text{Nu}_x = C \text{Re}_x^{0.5} \text{Pr}^{0.5}$$

Для течений типа пограничного слоя:

$$\text{Re}_x \gg 1; \quad \frac{\delta_T}{x} \ll 1; \quad \text{Nu}_x \gg 1. \quad (11.20)$$

Постоянный безразмерный коэффициент C есть величина порядка единицы. Зависимость от числа Pr требует уточнения: напомним, что фактически оценки проведены для теплоносителей с малыми числами Pr , таких как жидкие металлы.

Обобщая полученный результат, можно утверждать, что при вынужденной конвекции число Нуссельта есть некоторая функция чисел Рейнольдса и Прандтля:

$$\text{Nu} = f(\text{Re}, \text{Pr}).$$

Применяют также другую, равносильную формулировку:

$$\text{St} = \text{St}(\text{Re}, \text{Pr});$$

$$\text{St} \equiv \frac{\alpha}{\rho c_p u_\infty} \equiv \frac{\text{Nu}}{\text{Re Pr}}; \quad \text{Re} \equiv \frac{u_\infty l}{\nu}; \quad \text{Pr} \equiv \frac{\nu}{a} \equiv \frac{\mu c_p}{\lambda}; \quad \nu = \frac{\mu}{\rho}$$

Число Стантона St является другой, по сравнению с числом Nu , безразмерной формой представления коэффициента теплоотдачи:

$$\text{St} \equiv \frac{\alpha}{\rho c_p u_\infty} \propto \frac{\text{истинная тепловая проводимость}}{\text{проводимость при конвективном транспорте теплоты}} \ll 1$$

Замечание о тройной аналогии

Хотя наше внимание сосредоточено сейчас на процессе теплообмена, в реальной практике инженеру часто приходится рассчитывать также трение и

массообмен. При самом общем взгляде, заметно сходство структуры математического описания этих трех процессов переноса (см. гл. 1, 2, 3 Электронного курса). Например, законы переноса (закон теплопроводности Фурье, закон вязкого трения Ньютона, закон диффузии Фика) утверждают, что потоки теплоты, импульса, массы компонента смеси пропорциональны градиентам температуры, скорости, концентрации, соответственно. Похожими могут быть граничные условия: например, *условие постоянства* температуры, скорости и концентрации вдоль обтекаемой твердой поверхности. Можно ожидать, что и решения этих задач, т.е. поля температуры, скорости, концентрации, а также поля плотностей потоков будут выглядеть аналогично, при определенных условиях.

Простейшая формулировка тройной аналогии следующая:

$$\text{St} = \text{St}_D = \frac{c_f}{2} \quad \Leftarrow \quad \text{Pr} = \text{Pr}_D = 1; \quad \text{Re} = \textit{idem};$$
$$\text{St} \equiv \frac{\alpha}{\rho c_p u_\infty}; \quad \text{St}_D \equiv \frac{\beta}{u_\infty}; \quad \frac{c_f}{2} \equiv \frac{s_w}{\rho u_\infty^2}; \quad \text{Pr} \equiv \frac{\nu}{a}; \quad \text{Pr}_D \equiv \frac{\nu}{D};$$

Дополнительно к указанным ограничениям, поток теплоносителя должен быть безградиентным, т.е. без перепадов давления. Условия равенства единице чисел Прандтля (Pr) и Прандтля диффузионного (Pr_D) на практике приближенно означают, что рассматриваются газовые теплоносители (например, для воздуха Pr ≈ 0.7).

Практическая полезность такой аналогии очевидна, поскольку из относительно простых экспериментов по измерению гидродинамического сопротивления можно получить информацию о закономерностях теплообмена и массообмена. Однако указанные выше ограничения весьма существенны. Аналогия между сопротивлением и теплоотдачей нарушается для потоков с градиентом давления, например, при поперечном обтекании труб или трубных пучков. Причина состоит в том, что в дифференциальном уравнении движения появляется оператор сил давления, аналога которому нет в дифференциальном уравнении конвективного теплообмена.

Более широка область применимости аналогии между *двумя процессами*: теплообмена и массообмена. Эти вопросы подробнее обсуждаются ниже в п. 11.11, а также в гл. 20 Электронного курса «Теплообмен в парогазовом потоке при конденсации и испарении».

Строгий анализ трения и теплообмена в пограничном слое см. в гл. 12 Электронного курса.

Расчет локальной теплоотдачи при вынужденном обтекании пластины

Ламинарный режим

Полная количественная теория теплоотдачи основывается на системе дифференциальных уравнений в *частных производных*, описывающих

перенос импульса и энергии. Применение двух фундаментальных идей – о пограничном слое и о преобразованиях подобия – позволяет свести задачу к численному интегрированию системы *обыкновенных* дифференциальных уравнений для распределений температуры и скорости (см. [гл. 12](#) Электронного курса «Теплообмен и трение в пограничном слое»). Получающаяся в результате теоретическая формула для теплоотдачи при обтекании пластины ламинарным потоком имеет факторизованную структуру (Рис. 11.2): зависимость от числа Рейнольдса представлена множителем $\sqrt{Re_x}$, что совпадает с результатом оценок (ср. с (11.19)); зависимость от числа Прандтля – множителем, содержащим безразмерный градиент температуры g' в жидкости в непосредственной близости от стенки. Графически сопоставлены (Рис. 11.2) асимптотические выражения для градиента при малых и больших значениях числа Прандтля и приближенное универсальное уравнение, полученное методом интерполяции между асимптотами и пригодное во всем диапазоне чисел Прандтля.

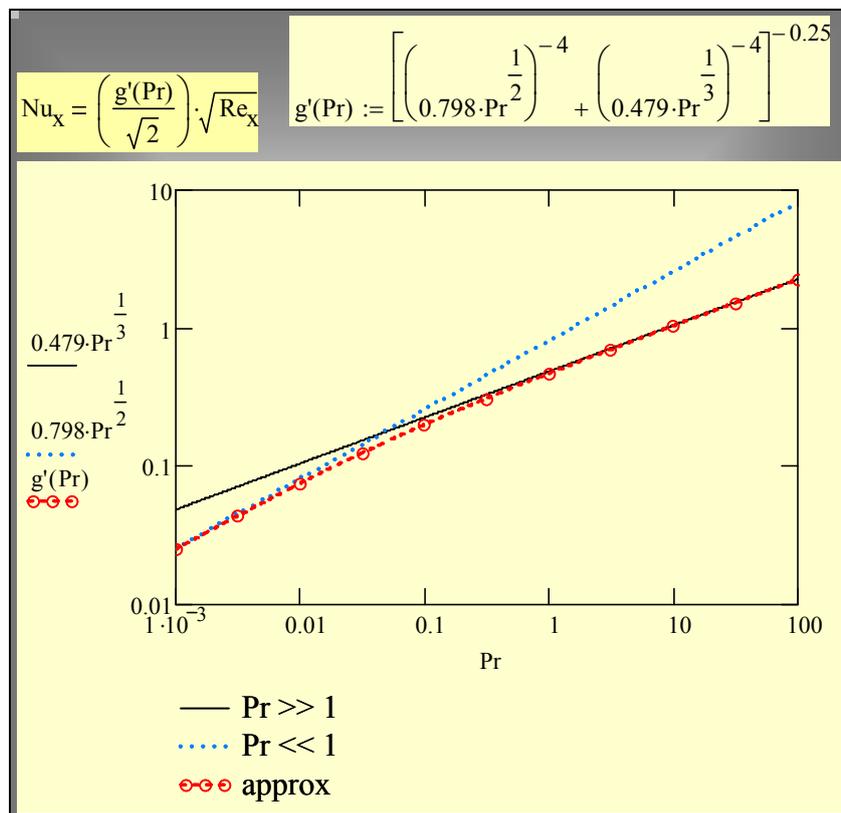


Рис. 11.2. Зависимость безразмерного градиента температуры в пограничном слое на стенке от числа Прандтля теплоносителя

На Рис. 11.3 сопоставлены значения коэффициента теплоотдачи (α , Вт/м²К) для трех различных теплоносителей – ртути, воздуха и масла МК, относящихся к трем характерным группам в соответствии с классификацией по числам Прандтля, а также для самого важного теплоносителя – воды.

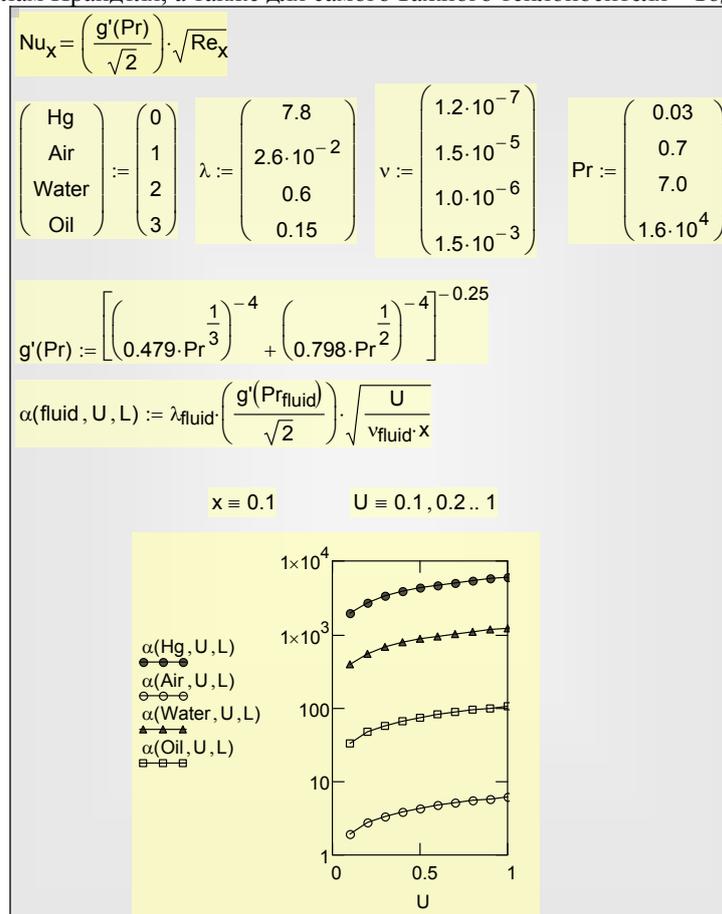


Рис. 11.3. Теплоотдача к различным теплоносителям

Результаты вычислений показывают, как сильно зависит интенсивность теплообмена от физических свойств жидкости. Теплоотдача к потоку ртути (жидкого металла с высокой теплопроводностью) на три порядка превышает теплоотдачу к воздуху. Видно, что вода является гораздо лучшим охладителем, чем вязкое масло или воздух с его малой плотностью и теплопроводностью. Иллюстрируется и другой важный вывод теории – существенный рост интенсивности теплообмена при увеличении скорости течения.

Хотя эти результаты получены для ламинарного режима, качественный характер зависимостей сохраняется и для более важных для практики (и более сложных для расчета) турбулентных потоков.

Далее приведены наиболее употребительные локальные соотношения для теплоотдачи пластины в вынужденном потоке жидкости.

Для обычных (неметаллических) жидкостей и газов результаты теоретических расчетов *ламинарного* пограничного слоя аппроксимируются соотношением (11.21):

$$\boxed{1 \ll Re_x < 3 \cdot 10^5; \quad Pr = 0.5 \div 10; \quad t_w = const :} \quad (11.21)$$
$$Nu_x = 0.33 Re_x^{0.5} Pr^{0.33}$$

Количественная теория *ламинарного* режима для *жидких металлов* дает:

$$Nu_x = 0.56 Re_x^{0.5} Pr^{0.5} \quad (11.22)$$

Заметно влияние способа постановки граничного условия: локальная теплоотдача на обогреваемой *постоянным тепловым потоком* стенке (11.23) примерно на 40% выше, чем при *постоянной температуре стенки* (11.21):

$$Nu_x = 0.47 Re_x^{0.5} Pr^{0.33} \quad (q_w = const) \quad (11.23)$$

Турбулентный режим

Математические модели теплоотдачи в *турбулентных потоках* значительно сложнее, чем для ламинарных течений. Подробный расчетный пример приведен в Электронном курсе для специальной задачи о турбулентной пленке жидкости, образующейся при конденсации пара на охлаждаемой поверхности.

Элементарную оценку теплоотдачи при турбулентном режиме можно получить, предполагая что *все* сопротивление переносу теплоты сосредоточивается в т.н. *вязком подслое* δ_{vis} – тонком слое жидкости у стенки, в котором турбулентное перемешивание полностью подавлено силами вязкости (действует условие прилипания), в то время как за пределами этого слоя – в ядре потока – термическое сопротивление пренебрежимо мало, благодаря интенсивному турбулентному перемешиванию. Такая упрощенная схема примерно соответствует действительности для вязких теплоносителей в случае очень больших чисел Рейнольдса.

Из сказанного следует, что для коэффициента теплоотдачи справедлива оценка:

$$\alpha \approx \frac{\lambda_f}{\delta_{vis}}$$

Толщина вязкого подслоя определяется через сопротивление вязкого трения следующим образом:

$$\tau \approx \mu \frac{U}{\delta_{vis}} = C_f \frac{\rho U^2}{2} \Rightarrow \delta_{vis} \approx \frac{2\nu}{C_f U};$$

$$C_f = \frac{0.059}{\text{Re}_x^{0.2}},$$

где коэффициент сопротивления C_f как функция числа Рейнольдса вычисляется по надежной эмпирической формуле для обтекания пластины.

Последующие простые подстановки приводят к окончательному результату:

$$\alpha \approx \frac{\lambda_f}{\delta_{vis}} \Rightarrow \frac{\alpha x}{\lambda_f} \approx \frac{x}{\delta_{vis}} \Rightarrow \frac{\alpha x}{\lambda_f} \approx \frac{Ux}{\nu} \frac{C_f}{2} = \left(\frac{Ux}{\nu} \right) \left(\frac{0.03}{\text{Re}_x^{0.2}} \right) \Rightarrow$$

$$\text{Nu}_x \approx 0.03 \text{Re}_x^{0.8}$$

согласно которому коэффициент теплоотдачи растет с увеличением скорости потока по закону: $\alpha \sim U^{0.8}$, т.е. существенно быстрее, чем при ламинарном режиме: $\alpha \sim U^{0.5}$.

Для практических расчетов локальной теплоотдачи при турбулентном обтекании пластины неметаллическими теплоносителями рекомендуется формула (11.24):

$$\boxed{\text{Nu}_x = 0.03 \text{Re}_x^{0.8} \text{Pr}^{0.4}; \quad \text{Re}_x \geq \text{Re}_{x_{cr}}; \quad \text{Re}_{x_{cr}} \approx (3 \div 5) 10^5} \quad (11.24)$$

Влияние рода граничных условий на стенке (постоянства t_w или q_w) при турбулентном режиме практически незаметно. Ламинарно–турбулентный переход происходит в некотором диапазоне чисел Рейнольдса $(3 \div 5) \cdot 10^5$. Координату x отсчитывают от передней кромки пластины.

Для жидкометаллических теплоносителей, благодаря их высокой собственной (молекулярной) теплопроводности, вклад турбулентного перемешивания в суммарный теплоперенос должен быть относительно небольшим. Кроме этого общего утверждения, следует учитывать также характерное соотношение толщин (δ) динамического и теплового пограничных слоев (см. (11.17)).

На Рис. 11.4 схематически показано, как развиваются динамический и тепловой пограничные слои в жидкометаллическом теплоносителе. По вертикальной оси отложены локальные числа Рейнольдса, построенные по толщинам потери импульса (δ_{**}) и потери энтальпии (δ_{T**}) (это специальные меры толщины динамического и теплового пограничного слоя), по горизонтальной – число Рейнольдса, построенное по продольной координате x :

$$\text{Re}_\delta \equiv \frac{u_\infty \delta^{**}}{\nu}; \quad \text{Re}_{\delta_T} \equiv \frac{u_\infty \delta_{T^{**}}}{\nu}; \quad \text{Re}_x \equiv \frac{u_\infty x}{\nu}.$$

(Понятия толщин потери импульса и потери энтальпии, как и формулы на Рис. 11.4, подробно рассматриваются далее в Электронном курсе в главах 12, 14, 20. Сейчас, для качественного анализа проблемы жидкометаллического теплоносителя, достаточно сделанных поясняющих замечаний).

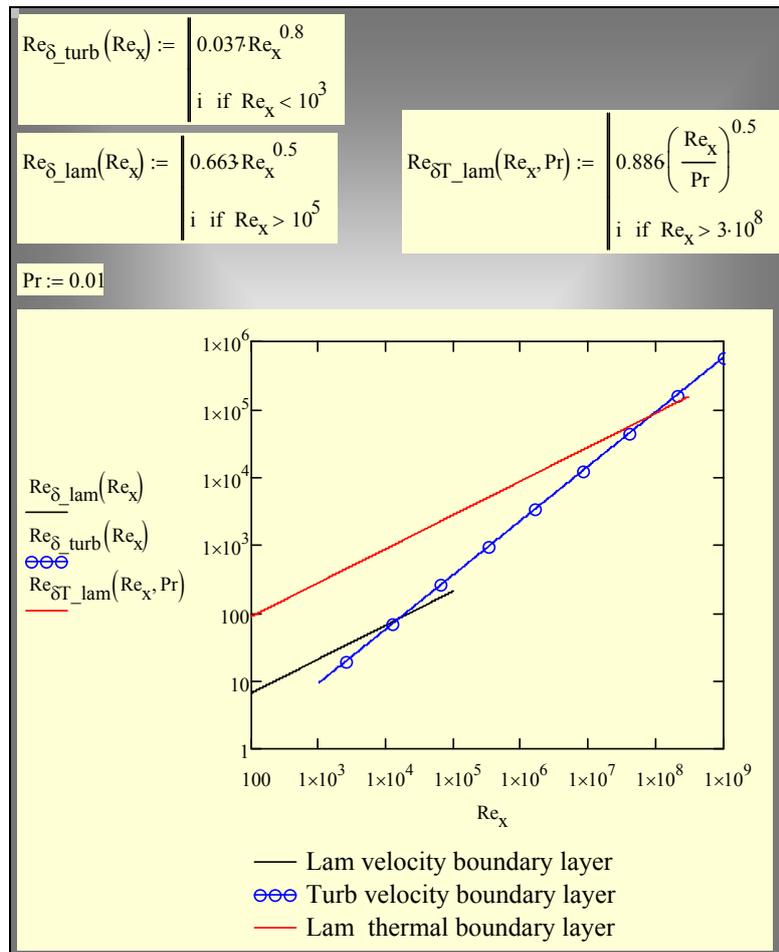


Рис. 11.4. Развитие динамического и теплового пограничных слоев в жидкометаллическом теплоносителе

В ламинарной области ($\text{Re}_x < 10^5$) динамический слой в жидкометаллическом теплоносителе весьма тонок по сравнению с тепловым.

Далее, при переходе к турбулентному режиму, нарастающий турбулентный гидродинамический пограничный слой постепенно заполняет область теплового пограничного слоя. Это заполнение происходит в широком диапазоне чисел Рейнольдса ($Re_x \approx 10^5 \div 10^8$), который можно интерпретировать как зону перехода от теплоотдачи при ламинарном режиме к теплоотдаче при турбулентном режиме для жидкометаллического теплоносителя.

При еще больших Re_x тепловой и динамический слой развиваются синхронно, благодаря интенсивной турбулентной диффузии теплоты и импульса. Эту область можно описать моделью с *гипотетическим* теплоносителем, имеющим одинаковые с жидким металлом теплопроводность, теплоемкость и плотность, но другую вязкость, такую, что $\nu = a$, т.е. $Pr = 1$. В результате получается предельная формула для *турбулентного* режима обтекания пластины *жидким металлом*:

$$Nu_x = 0.03 (Re_x Pr)^{0.8} \quad (11.25)$$

11.3 Теплоотдача при свободной конвекции

Простейшая модель свободной конвекции

Феномен свободной конвекции состоит в самопроизвольном возникновении движения (циркуляции) при контакте холодной жидкости с горячей стенкой. Причиной движения является разность плотностей нагретой (прилегающей к стенке) и холодной (вдали от стенки) жидкости. В поле силы тяжести разность плотностей приводит к появлению движущей Архимедовой силы, направление которой (вверх или вниз) зависит от знака температурного напора ($t_w - t_f$).

Характерные распределения скорости и температуры вблизи вертикальной стенки показаны на Рис. 11.5.

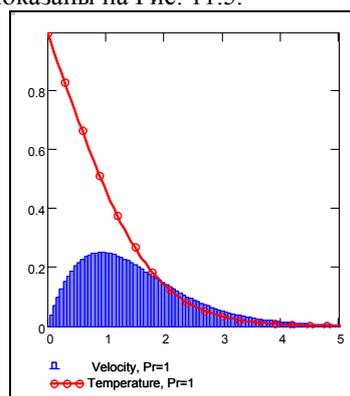


Рис. 11.5. Распределения скорости и температуры в свободноконвективном пограничном слое (вертикальная ось отождествляется со стенкой)

Вертикальное движение имеет место в той же области вблизи стенки, где сосредоточено основное изменение температуры (Рис. 11.5). Скорость жидкости нулевая на самой стенке (вследствие условия прилипания) и вдали от нее, так что имеется максимум u_m на профиле скорости. В отличие от вынужденной конвекции, характерная скорость потока является внутренним, подлежащим определению параметром задачи.

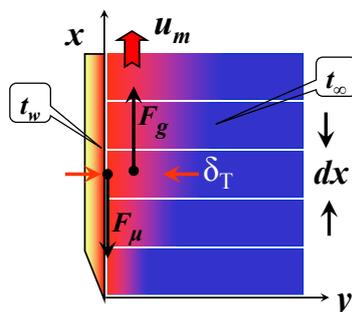


Рис. 11.6. Модельное представление свободной конвекции

Упрощенные модельные представления о свободной конвекции (Рис. 11.6) основываются на наблюдениях, согласно которым скорость жидкости оказывается относительно небольшой и движение происходит без сильных ускорений, под действием противодействующих друг другу одинаковых по порядку сил гравитации и вязкого трения. Режим течения предполагается ламинарным, тепловой поток и трение определяются эффектами молекулярного переноса.

Гравитационное воздействие (сила F_g , Рис. 11.6) мы опишем, учитывая различие в плотности жидкости

- в пределах пограничного слоя (при температуре примерно t_w)
- и за его пределами (при температуре t_∞).

Контрольный объем, для которого записывается баланс действующих сил, определяется как $\delta \cdot dx$; размер по нормали к рисунку принимается единичным. Ситуация выглядит так, как будто объем $(\delta \cdot dx)$ горячей и поэтому менее плотной жидкости погружен в холодную плотную жидкость, поэтому:

$$F_g = \underbrace{\rho_{t_\infty} [\delta dx] g}_{\text{Архимедова сила}} - \underbrace{\rho_{t_w} [\delta dx] g}_{\text{Вес}} = \Delta \rho [\delta dx] g; \quad (11.26)$$

$$\Delta \rho \equiv \rho_{t_\infty} - \rho_{t_w}$$

где $g = 9.8 \text{ м/с}^2$ – ускорение силы тяжести, $\Delta \rho$ – разность плотностей холодной и горячей жидкости.

Сила вязкого трения, действующая на прилегающую к стенке грань (dx), оценивается как

$$F_{\mu} = -\mu_f \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_w [dx] \approx -\mu_f \frac{u_m}{\delta} [dx] \quad (11.27)$$

где μ_f – динамическая вязкость жидкости.

Выпишем условие равенства *по порядку величин* сил гравитации и вязкого трения:

$$F_g \approx F_{\mu} \Rightarrow \Delta\rho [\delta dx] g \approx \mu_f \frac{u_m}{\delta} [dx] = 0. \quad (11.28)$$

Толщина δ пограничного слоя и максимальная скорость u_m в пограничном слое являются внутренними характеристиками, *неизвестными* до решения задачи.

В качестве дополнительного, замыкающего уравнения принимается оценочное соотношение (11.4) для толщины пограничного слоя, с другим, актуальным для рассматриваемой теперь задачи значением скорости u_m :

$$\delta \approx \sqrt{a_f \tau} \approx \sqrt{a_f \frac{x}{u_m}} \quad (11.29)$$

Полученная система из двух уравнений для неизвестных u_m и δ

$$\begin{aligned} \Delta\rho \delta g &\approx \mu_f \frac{u_m}{\delta}; \\ \delta &\approx \sqrt{a_f \frac{x}{u_m}}; \end{aligned} \quad (11.30)$$

имеет решение:

$$u_m \approx \left(\frac{\Delta\rho g x a}{\rho \nu} \right)^{1/2}; \quad \delta \approx \frac{1}{\left(\frac{\Delta\rho g}{\rho x a \nu} \right)^{1/4}} \quad (11.31)$$

Располагая оценкой (11.31) для толщины пограничного слоя, мы действуем далее по такому же плану, как при анализе вынужденной конвекции, чтобы получить оценку коэффициента теплоотдачи. Применяя (11.7), получим:

$$\boxed{\alpha \approx \frac{\lambda_f}{\delta} = \lambda_f \left(\frac{\Delta\rho g}{\rho x a \nu} \right)^{1/4}}, \quad (11.32)$$

где разность плотностей $\Delta\rho$ определяется разностью температур ($t_w - t_f$), т.е. температурным напором.

Отметим основные закономерности, выражаемые соотношением (11.32):

- Коэффициент теплоотдачи растет вместе с температурным напором, что объясняется увеличением разности плотностей, соответствующим увеличением Архимедовой выталкивающей силы, увеличением скорости течения, сокращением времени теплового контакта и, наконец, соответствующим уменьшением толщины теплового пограничного слоя (см. (11.31)).
- Коэффициент теплоотдачи убывает по длине (высоте) обтекаемой поверхности вследствие нарастания толщины теплового пограничного слоя.

Зависимость теплоотдачи от свойств теплоносителя полезно проанализировать самостоятельно.

Представление результатов в безразмерном виде

Оценочное соотношение (11.32) для коэффициента теплоотдачи при свободной конвекции представляется в безразмерной форме следующим образом:

$$\text{Nu}_x \equiv \frac{\alpha x}{\lambda_f} \approx \frac{1}{\left(\frac{\delta}{x}\right)} \approx \left(\frac{\Delta\rho}{\rho} \frac{x^3 g}{a_f v_f}\right)^{1/4} \quad (11.33)$$

Безразмерный комплекс в правой части (11.33) называют числом Рейля:

$$\text{Ra}_x \equiv \frac{\Delta\rho}{\rho} \frac{x^3 g}{a_f v_f} = \frac{\Delta\rho}{\rho} \frac{x^3 g}{v_f^2} \left(\frac{v_f}{a_f}\right) \equiv \left(\frac{\Delta\rho}{\rho} \frac{g x^3}{v_f^2}\right) \text{Pr} \equiv \text{Gr}_x \text{Pr}; \quad (11.34)$$

$$\text{Gr}_x \equiv \frac{\Delta\rho}{\rho} \frac{g x^3}{v_f^2}$$

Выделяя в явной форме число Прандтля Pr, получают формулировку с числом Грасгофа Gr. Результат (11.33) оценок для теплоотдачи можно записать в двух тождественных формах:

$$\begin{aligned} \text{Nu}_x &= C \text{Ra}_x^{0.25} \\ \text{Nu}_x &= C (\text{Gr}_x \text{Pr})^{0.25} \end{aligned} \quad (11.35)$$

Относительная разность плотностей ($\Delta\rho/\rho$) зависит от температурного напора ($t_w - t_\infty$). Из определения понятия объемного коэффициента расширения:

$$\beta \equiv - \left. \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} \right|_p \approx \frac{1}{\rho} \frac{\rho_{t_{\infty}} - \rho_{t_w}}{t_w - t_{\infty}} \quad (11.36)$$

следует:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta \rho}{\rho} &\equiv \frac{\rho_{t_{\infty}} - \rho_{t_w}}{\rho} \approx \beta (t_w - t_{\infty}) \equiv \beta \Delta t; \\ \text{Gr}_x &= \frac{\beta \Delta t g x^3}{\nu_f^2}; \\ \text{Ra}_x &= \text{Gr}_x \text{Pr} \end{aligned} \quad (11.37)$$

Для идеальных газов β есть величина, обратная абсолютной температуре газа, $\beta = 1/T$.

Итак, формулы (11.35), (11.37) представляют результат теоретической оценки коэффициента теплоотдачи при ламинарной свободной конвекции на вертикальной поверхности.

Рассмотрим физический смысл числа Грасгофа – безразмерного комплекса, определяющего интенсивность теплоотдачи при свободной конвекции. Оценим предварительно соотношение инерционных и вязких эффектов при свободной конвекции, то есть число Рейнольдса свободноконвективного течения. Используя формулу (11.31) для скорости, последовательно получим (при $\text{Pr} = 1$):

$$\begin{aligned} u_m &\approx \left(\frac{\Delta \rho}{\rho} g x \right)^{1/2}; \\ \text{Re}_x &\equiv \frac{u_m x}{\nu} = \left(\frac{\Delta \rho}{\rho} g x \right)^{1/2} \cdot \frac{x}{\nu} = \left(\frac{\Delta \rho g x^3}{\rho \nu^2} \right)^{1/2} \\ &= \sqrt{\text{Gr}_x}; \end{aligned} \quad (11.38)$$

Таким образом, $\sqrt{\text{Gr}_x}$ играет роль числа Рейнольдса при свободноконвективном течении.

Оценим далее соотношение Архимедовой выталкивающей силы и вязкого трения.

Напомним, что такая оценка постулировалась ранее при детальном анализе (см. (11.26), (11.27)). Мы приняли тогда, что движение возникает под действием Архимедовой силы и что противодействующая сила трения есть величина такого же порядка, чтобы исключить возможные большие ускорения, не наблюдаемые в действительности. При этом мы использовали *внутренний*, не известный до решения задачи масштаб – толщину пограничного слоя δ .

Однако при оценке, которую мы сейчас намереваемся произвести, будет использоваться только *внешний*, заданный при постановке задачи масштаб, а именно, высота поверхности x , вблизи которой возникает свободноконвективное течение:

$$\begin{aligned}
 u_m &\approx \left(\frac{\Delta\rho}{\rho} g x \frac{1}{\text{Pr}} \right)^{1/2}; \\
 \frac{\text{Архимедова сила}}{\text{Вязкое трение}} &\approx \frac{g \Delta\rho x^3}{\mu \frac{u_m}{x} x^2} \Rightarrow \frac{g \frac{\Delta\rho}{\rho} x^3}{\frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\Delta\rho}{\rho} g x \frac{1}{\text{Pr}} \right)^{1/2} x} = \\
 &= \left(\frac{g x^3 \Delta\rho}{\nu^2 \rho} \text{Pr} \right)^{1/2} = \text{Ra}_x^{1/2}
 \end{aligned}
 \tag{11.39}$$

Приведем характерные значения числа Ra_x , построенного по внешнему линейному масштабу x : высоте поверхности в большом объеме жидкости, размеру замкнутого объема и т.п. Заметная естественная циркуляция возникает при $\text{Ra}_x \gg 1$, $\text{Ra}_x > 10^3$. Область $10^3 < \text{Ra}_x < 10^5$ соответствует формированию тонкого пограничного слоя у обогреваемой стенки. Переход к турбулентному течению совершается при $\text{Ra}_x \approx 10^9 - 10^{10}$ (что примерно соответствует критическому значению для числа Рейнольдса $\sim 10^5$, если учесть соотношение (11.38)).

На практике часто возникает смешанная конвекция, например, при обдуве комнатного обогревателя вентилятором. Используя (11.38), можно ввести следующую меру соотношения между свободной и вынужденной конвекцией:

$$\frac{u_m}{U} = \frac{\frac{u_m x}{\nu}}{\frac{U x}{\nu}} = \frac{\sqrt{\text{Gr}}}{\text{Re}}
 \tag{11.40}$$

где U – заданная скорость вынужденного потока.

Свободная конвекция в жидких металлах

При свободной конвекции движение инициируется Архимедовой выталкивающей силой, отличной от нуля в области *теплового пограничного слоя*, где имеется разность температур в жидкости. Если вязкие эффекты невелики ($Pr \ll 1$, $\nu \ll a$), то Архимедова сила будет заметно ускорять движение вдоль стенки:

$$\underbrace{\rho u_m^2 \delta}_{\text{Инерционная сила, поток импульса}} \approx \underbrace{\Delta \rho \delta g x}_{\text{Архимедова выталкивающая сила}} \Rightarrow u_m \approx \sqrt{\frac{\Delta \rho}{\rho} g x}$$

$$\delta \approx \sqrt{a_f \frac{x}{u_m}} \quad (11.41)$$

$$Nu_x \approx \frac{1}{\left(\frac{\delta}{x}\right)} \approx (Gr Pr^2)^{1/4}; \quad (Pr \ll 1).$$

Видно, что в рассмотренном пределе теплоотдача не зависит от вязкости теплоносителя. Полезно сопоставить (11.41) с формулой (11.35) для неметаллических теплоносителей.

Расчет локальной теплоотдачи при свободной конвекции

Для расчета теплоотдачи при *ламинарной* свободной конвекции на вертикальной изотермической поверхности строгая количественная теория (см. [гл. 12](#) Электронного курса «Теплообмен и трение в пограничном слое») дает следующие соотношения (см. также Рис. 11.7):

$$\begin{aligned} Nu_x &= F(Pr) Gr_x^{1/4}; \\ F(Pr \rightarrow 0) &\cong 0.6004 Pr^{1/2}; \quad F(Pr \rightarrow \infty) \cong 0.5027 Pr^{1/4}; \\ &0 < Pr < \infty; \\ F(Pr) &= \left[\left(0.6004 Pr^{1/2}\right)^{-n} + \left(0.5027 Pr^{1/4}\right)^{-n} \right]^{-1/n}; \\ &n = 2.265. \end{aligned} \quad (11.42)$$

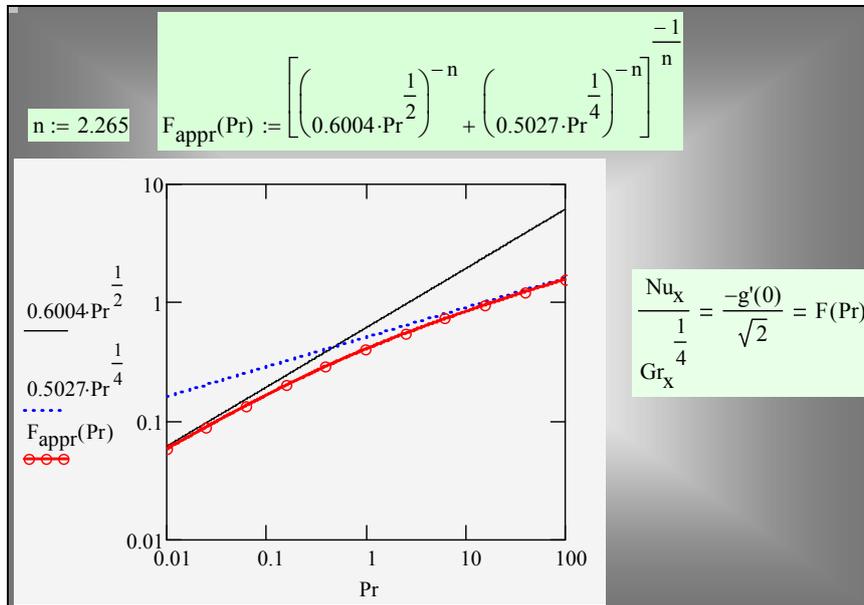


Рис. 11.7. Локальная теплоотдача при ламинарной свободной конвекции: зависимость от числа Прандтля

Сопоставление точного решения (11.42) с приближенной оценкой (11.35) подтверждает удовлетворительность прогноза.

При *турбулентном* режиме свободноконвективного течения неметаллических жидкостей теплоотдачу рассчитывают по эмпирическому соотношению:

$$\boxed{Nu_x = 0.13 Ra_x^{1/3} \equiv 0.13 (Gr_x Pr)^{1/3}; \quad (Pr > 0.5)} \quad (11.43)$$

Согласно (11.43), локальный коэффициент теплоотдачи постоянен вдоль вертикальной координаты x .

Формулу (11.43) продолжают в область малых чисел Pr (для жидких металлов) следующим образом, учитывая структуру предельного соотношения (11.41):

$$Nu_x = 0.13 (Gr_x Pr^2)^{1/3}. \quad (11.44)$$

Формулы (11.43) и (11.44) дают одинаковые значения в точке $Pr = 1$.

Сопоставление вынужденной и свободной конвекции

Обсудим основные отличия теплоотдачи при вынужденной и свободной конвекции. С точки зрения технических приложений, главное состоит в том, что свободная конвекция обеспечивает теплоотвод при отсутствии специальных устройств для обеспечения циркуляции теплоносителя (насосов, вентиляторов и т.п.). Поэтому, например, в ядерной энергетике последним рубежом защиты от последствий гипотетической аварии является так называемая система пассивного отвода тепла (СПОТ), работающая на принципе свободной конвекции, т.е. способная функционировать, даже если не остается источников энергии для работы насосов аварийного охлаждения. Другим, всем известным примером служит охлаждение персональных компьютеров: естественное охлаждение было бы безусловно предпочтительным, благодаря прежде всего абсолютной бесшумности.

К сожалению, интенсивность теплоотдачи при свободной конвекции невысока, вследствие получающихся малых скоростей естественной циркуляции (11.31). Для обычных условий в технике, вынужденная конвекция обеспечивает на порядок большие коэффициенты теплоотдачи (для одного и того же теплоносителя).

Вопросами для дальнейшего обсуждения и анализа при самостоятельной работе над предметом могут быть:

- Получение шкалы коэффициентов теплоотдачи для различных теплоносителей и разных видов конвекции.
- Сопоставление вынужденной и свободной конвекции в особых условиях: при пониженной или повышенной гравитации, в условиях невесомости.
- Критическое обсуждение закона Ньютона-Рихмана в связи с обнаруженной зависимостью коэффициента теплоотдачи от температурного напора.
- Возможности интенсификации теплоотдачи при свободной конвекции.
- Совместное действие свободной и вынужденной конвекции, влияние теплообмена излучением.

11.4 Структура критериальных соотношений для инженерных расчетов теплоотдачи

Осреднение коэффициента теплоотдачи

При проектных проработках теплообменников часто применяют расчеты по средним величинам:

$$\begin{aligned} Q &= \bar{\alpha}(\overline{t_w - t_f})F; \\ \bar{q} &\equiv \frac{Q}{F} = \bar{\alpha}(\overline{t_w - t_f}), \end{aligned} \quad (11.45)$$

где черта сверху означает осредненную величину, Q , Вт – полный тепловой поток через поверхность теплоотдачи F , м².

Осредненные значения коэффициента теплоотдачи, плотности теплового потока, температурного напора определяются соотношениями:

$$\begin{aligned} \bar{q} = \frac{Q}{F} &= \frac{1}{l} \int_0^l q(x) dx; \quad \overline{\Delta t} = \frac{1}{l} \int_0^l \Delta t dx; \quad \bar{\alpha} = \frac{\bar{q}}{\overline{\Delta t}}; \\ F &= ul; \end{aligned} \quad (11.46)$$

где l – протяженность поверхности по ходу теплоносителя, u – периметр поверхности, по которому происходит теплоотдача (полагается постоянным). Итак, сначала находится среднеинтегральное значение температурного напора, а затем определяется средний коэффициент теплоотдачи (11.46) как коэффициент пропорциональности в формуле Ньютона–Рихмана (11.45).

Простые граничные условия, обычно принимаемые в теоретических моделях, такие как постоянство температуры стенки или постоянство плотности теплового потока, могут не соответствовать более сложным реальным ситуациям в теплообменных устройствах. Однако осреднение по способу (11.45), (11.46) сглаживает зависимость от граничных условий.

Локальные теоретические формулы ((11.21) при $t_w = \text{const}$, (11.42)) получены в предположении о *постоянстве температурного напора*. В этом случае осреднение по правилу (11.46) сводится к вычислению среднеинтегрального по поверхности значения коэффициента теплоотдачи:

$$\begin{aligned} \Delta t &= \text{const}; \\ \bar{\alpha} &= \frac{\bar{q}}{\overline{\Delta t}} = \frac{\int_0^l q(x) dx}{\int_0^l \Delta t dx} = \frac{\int_0^l \alpha(x) \Delta t dx}{\int_0^l \Delta t dx} = \\ &= \frac{1}{l} \int_0^l \alpha(x) dx \end{aligned} \quad (11.47)$$

Подстановка в (11.47) зависимости (11.21) для локальной теплоотдачи при вынужденном ламинарном обтекании пластины приводит к следующему результату:

$$\begin{aligned} \Delta t &= const; \quad \alpha(x) = C x^{-1/2}; \\ \bar{\alpha} &= \frac{1}{l} \int_0^l \alpha(x) dx = \frac{1}{l} \int_0^l C x^{-1/2} dx = \quad , \\ &= \frac{C}{l} 2l^{1/2} = 2[C l^{-1/2}] = 2\alpha_{x=l} \end{aligned} \quad (11.48)$$

означающему, что средний коэффициент теплоотдачи равен удвоенному локальному значению в конце интервала осреднения. Поэтому для средней теплоотдачи при *вынужденном ламинарном* течении получаем формулу:

$$\boxed{\overline{Nu}_l = 0.66 Re_l^{0.5} Pr^{0.33}} \quad (11.49)$$

Аналогичные вычисления в случае *турбулентного* обтекания пластины (исходная формула для локальной теплоотдачи (11.24)) дают:

$$\boxed{\overline{Nu}_l = 0.037 Re_l^{0.8} Pr^{0.4}} \quad (11.50)$$

Соответственно, из (11.25) следует соотношение для средней теплоотдачи жидких металлов:

$$\overline{Nu}_l = 0.037 (Re_l Pr)^{0.8} = 0.037 \cdot Pe_l^{0.8} \quad (11.51)$$

Исходные локальные соотношения (11.42) для свободной конвекции также соответствуют условию изотермической стенки. Подставляя в (11.47) выражение $\alpha(x)$ из (11.42), получаем:

$$\begin{aligned} \Delta t &= const; \quad \alpha(x) = C x^{-1/4}; \\ \bar{\alpha} &= \frac{1}{l} \int_0^l \alpha(x) dx = \frac{1}{l} \int_0^l C x^{-1/4} dx = \\ &= \frac{C}{l} \frac{4}{3} l^{3/4} = \frac{4}{3} [C l^{-1/4}] = \frac{4}{3} \alpha_{x=l} \end{aligned} \quad (11.52)$$

Из (11.42) и (11.52) следует критериальная формула для средней теплоотдачи при ламинарной свободной конвекции:

$$\boxed{\begin{aligned} \overline{Nu}_l &= \frac{4}{3} F(Pr) Gr_l^{1/4}; \\ F(Pr) &= \left[(0.6004 Pr^{1/2})^{-n} + (0.5027 Pr^{1/4})^{-n} \right]^{-1/n}; \quad n = 2.265, \end{aligned}} \quad (11.53)$$

где l – высота поверхности. В практически важной области $Pr = 0.5 \div 10$ (воздух, вода) аппроксимация (11.53) для ламинарной свободной конвекции дает:

$$\overline{Nu}_l \approx 0.56 (Gr_l Pr)^{1/4}; \quad (0.5 < Pr < 10) \quad (11.54)$$

Среднюю теплоотдачу при *турбулентной* свободной конвекции рассчитывают по соотношениям, совпадающим с локальной формулировкой (11.43), (11.44), поскольку в этом режиме теплоотдача автомодельна относительно протяженности поверхности по высоте l :

$$\begin{cases} \overline{Nu}_l = 0.13 Ra_l^{1/3}; & Pr > 0.5; \\ \overline{Nu}_l = 0.13 (Ra_l Pr)^{1/3}; & Pr \ll 1 \end{cases} \quad (11.55)$$

Соотношения (11.55) «сшиваются» в точке $Pr = 1$ и могут быть использованы для построения глобальной аппроксимации в такой форме:

$$\begin{cases} \overline{Nu}_l = 0.13 Ra_l^{1/3}; & Pr \geq 1; \\ \overline{Nu}_l = 0.13 (Ra_l Pr)^{1/3}; & Pr < 1 \end{cases} \quad (11.56)$$

Обобщенная структура критериальных формул

На практике вынужденная или свободная конвекция редко встречаются в «чистом» виде. Например, комнатный обогреватель, рассчитанный на свободную конвекцию, может обдуваться вынужденным потоком воздуха от вентилятора. Или, при медленном вынужденном течении холодного воздуха в обогреваемой горизонтальной трубе может возникнуть заметная естественная циркуляция в поперечном сечении. В таких случаях говорят о *смешанной* конвекции и применяют обобщенную запись критериального соотношения теплоотдачи:

$$\overline{Nu}_l = f(Re_l, Gr_l, Pr), \quad (11.57)$$

согласно которой безразмерный коэффициент теплоотдачи (Nu , (11.18)) зависит от соотношения инерционных и вязких эффектов в потоке (Re , (11.13)), соотношения выталкивающей Архимедовой силы и силы вязкости (Gr , (11.39)), типа теплоносителя (Pr , см. (11.16), (11.17)).

В критериальных формулах (11.49), (11.53) буквенный индекс « l » указывает на линейный масштаб, или *определяющий размер* поверхности теплоотдачи. Для пластины это длина по ходу потока теплоносителя. Для более сложных геометрических объектов может потребоваться несколько характерных размеров. Например, при течении в короткой трубе важны и

диаметр и длина. При течении в коротком канале прямоугольного сечения потребуются два поперечных размера и длина канала. При течении в пакете труб важны диаметр труб и шаг их расположения.

Обобщим структуру (11.57) для задач со сложной геометрией обтекаемых поверхностей:

$$\overline{\text{Nu}}_{l_0} = f(\text{Re}_{l_0}, \text{Gr}_{l_0}, \text{Pr}, \frac{l_1}{l_0}, \frac{l_2}{l_0}) \quad (11.58)$$

где l_0 – *определяющий* размер, например, диаметр трубы в пакете труб, l_1 – другой характерный размер, например, поперечный шаг труб в пакете, l_2 – продольный шаг.

Формулы такой структуры применяют для инженерных расчетов конвективной теплоотдачи в однофазных теплоносителях.

Теплофизические свойства веществ, входящие в безразмерные комплексы расчетных уравнений вида (11.58), зависят от температуры, которая меняется в сечении пограничного слоя в пределах от температуры стенки t_w до температуры жидкости в набегающем потоке t_f .

Характерная температура, по которой определяют значения физических параметров теплоносителя (плотность, вязкость, теплопроводность и т.д.), называется *определяющей температурой*. Разумным выбором представляется среднеарифметическая температура пограничного слоя: $(t_w + t_f)/2$.

Другим традиционным способом является выбор температуры набегающего потока t_f с одновременным введением поправочного множителя ε_t в критериальные формулы:

$$\overline{\text{Nu}}_{l_0} = f(\text{Re}_{l_0}, \text{Gr}_{l_0}, \text{Pr}, \frac{l_1}{l_0}, \frac{l_2}{l_0}) \cdot \varepsilon_t;$$

$$\varepsilon_t = \left(\frac{\text{Pr}_f}{\text{Pr}_w} \right)^{0.25} \quad \text{для жидкостей}; \quad (11.59)$$

$$\varepsilon_t = \left(\frac{T_f}{T_w} \right)^{0.25} \quad \text{для газов}.$$

Рекомендации по выбору определяющей температуры обычно указывают в примечании к расчетной формуле.

В окрестности термодинамической критической точки, температурная зависимость свойств очень сильная, и ее корректный учет в расчетах теплоотдачи становится принципиально важной проблемой, решаемой обычно численными методами.

В теории теплообмена имеется круг задач, для которых температурная зависимость свойств учитывается точно. Это стационарные одномерные задачи теплопроводности, для которых в качестве расчетного значения

коэффициента теплопроводности следует выбирать *среднеинтегральное* значение в актуальном интервале температур.

Метод интерполяции между асимптотами

Соотношения для ламинарной вынужденной конвекции (11.49) и ламинарной свободной конвекции (11.54) можно рассматривать как предельные (асимптотические) случаи некоторой общей ситуации, когда движение вблизи вертикальной поверхности инициируется обеими актуальными силами – и гравитацией и инерцией (смешанная конвекция).

Задача состоит в том, чтобы на уровне логического анализа подобрать такую глобальную аппроксимацию,

$$\overline{Nu}_l = f(Re_l, Gr_l, Pr) \quad (11.60)$$

которая обеспечивала бы правильные асимптотические переходы к свободной (free) конвекции или к вынужденной (forced) конвекции:

$$\begin{aligned} \frac{Gr_l}{Re_l^2} \gg 1; & \quad Nu_l \rightarrow Nu_{free} \\ \frac{Gr_l}{Re_l^2} \ll 1; & \quad Nu_l \rightarrow Nu_{forced} \end{aligned} \quad (11.61)$$

и давала разумные результаты в промежуточной ситуации, т.е. при соизмеримом воздействии обоих факторов.

Интерполяционные соотношения, удовлетворяющие предельным переходам (11.61), можно построить в единой форме:

$$Nu_{Glob} = \left(Nu_{Limit1}^n \pm Nu_{Limit2}^n \right)^{1/n} \quad (11.62)$$

где знак плюс выбирается для спутных свободного и вынужденного потоков, а знак минус – для противоположно направленных.

Аналогичная задача возникает при построении расчетных формул для широкого интервала чисел Рейнольдса, чисел Прандтля и т.п.

Значение показателя степени n подбирается так, чтобы получить наилучшее согласование с экспериментальными и теоретическими данными в промежуточной области. В литературе рекомендуются значения $n = 4$ для ламинарно-турбулентного перехода и $n = 2$ для области, промежуточной между гравитационным и вынужденно-конвективным пределами. Как показывает опыт, этим простым способом можно получить эффективные аппроксимации для очень сложных задач.

Пример для ламинарной смешанной конвекции (11.60), (11.61) представлен на Рис. 11.8. Асимптоты построены по уравнениям (11.49) и (11.54). Видно, как при больших числах Рейнольдса теплоотдача (кривые со значками) выходит на режим вынужденной конвекции (наклонная линия). При относительно малых числах Рейнольдса внешнего потока происходит

переход к режиму свободной конвекции (горизонтальные линии, соответствующие трем различным значениям числа Рэлея).

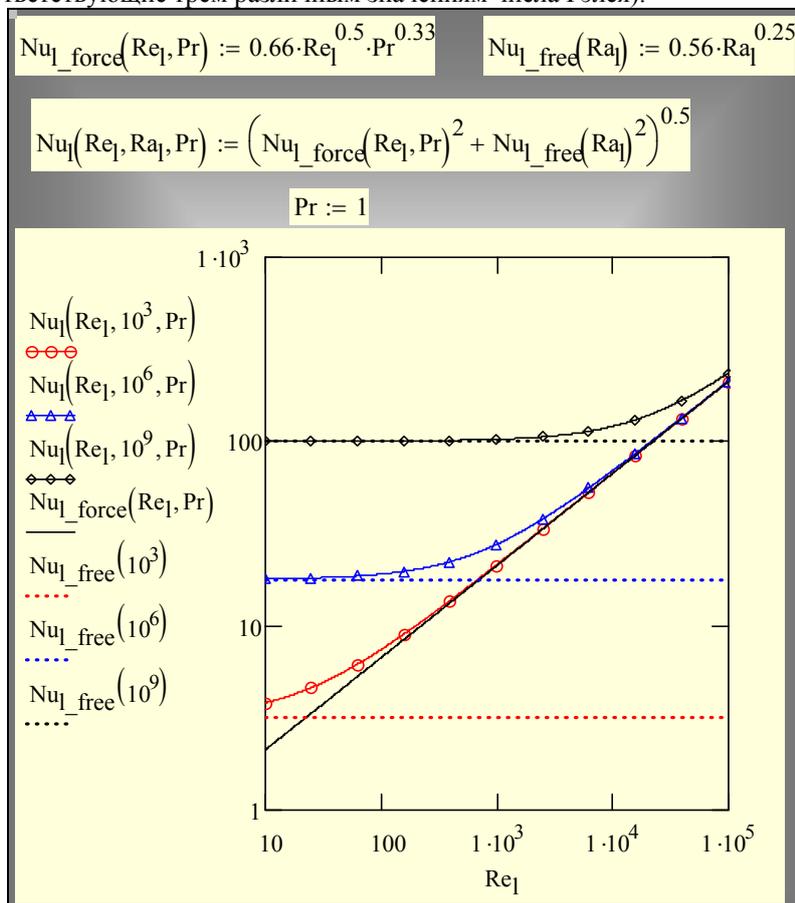


Рис. 11.8. Расчет средней теплоотдачи при смешанной конвекции (ламинарный режим, спутное движение у вертикальной поверхности)

11.5 Средняя теплоотдача при вынужденном продольном обтекании пластины в широком диапазоне чисел Re

[..\Mathcad_HMT\11_Engineering\Global_plate_mc14_3.xmcdz](#)

Построим интерполяционное соотношение для вынужденного обтекания пластины неметаллическими теплоносителями в широком диапазоне чисел Рейнольдса, так чтобы учесть переход от ламинарного к турбулентному режиму течения. Базовыми соотношениями являются формулы для ламинарного

$$\overline{Nu}_{l_Lam} = 0.66 Re_l^{0.5} Pr^{0.33} \quad (11.63)$$

и турбулентного обтекания пластины

$$\overline{Nu}_{l_Turb} = 0.037 Re_l^{0.8} Pr^{0.4}, \quad (11.64)$$

которые рассматриваются как асимптотические соотношения для малых и больших чисел Рейнольдса.

На Рис. 11.9 представлено интерполяционное соотношение

$$\overline{Nu}(Re_l, Pr) = \left(\overline{Nu}_{l_Lam}(Re_{l_Lam}, Pr)^2 + \overline{Nu}_{l_Turb}(Re_l, Pr)^2 \right)^{1/2}, \quad (11.65)$$

обеспечивающее правильные асимптотические переходы:

$$\begin{aligned} Re \ll Re_{cr}; & \Rightarrow Nu \rightarrow Nu_{Lam} \\ Re \gg Re_{cr}; & \Rightarrow Nu \rightarrow Nu_{Turb} \end{aligned} \quad (11.66)$$

и удовлетворительные результаты в промежуточной области чисел Рейнольдса, т.е. в переходной области от ламинарного к турбулентному режиму.

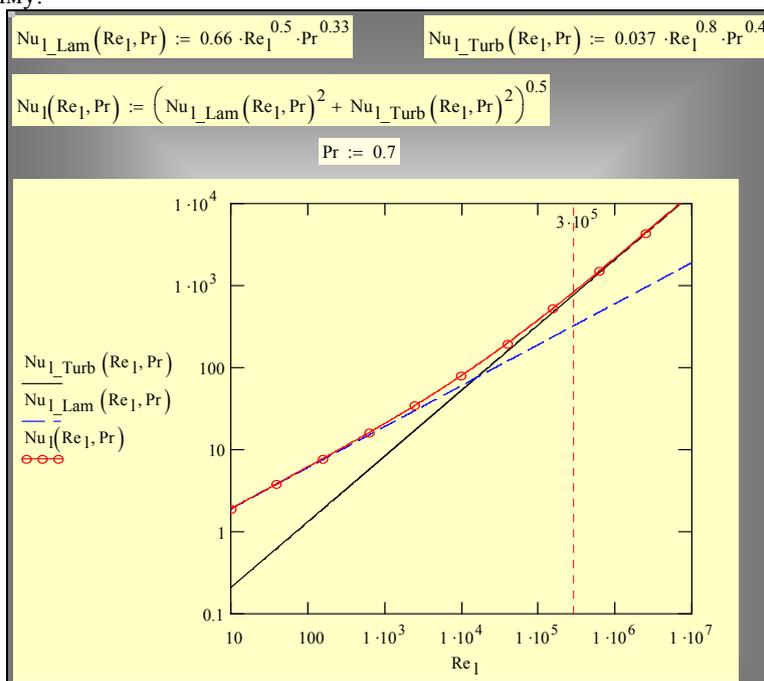


Рис. 11.9. Расчет средней теплоотдачи при вынужденном обтекании пластины неметаллическими теплоносителями (формулы для турбулентного и ламинарного режимов и интерполяционное соотношение)

Простые интерполяции вида (11.65) пригодны для *технических* потоков с высоким уровнем возмущений, когда ламинарно–турбулентный переход осуществляется постепенно и начинается уже на относительно небольших расстояниях от входных сечений. Источником возмущений (турбулизации) потока являются, в частности, неудобнообтекаемые острые входные кромки каналов, инициирующие отрыв пограничного слоя, как показано на Рис. 11.10.

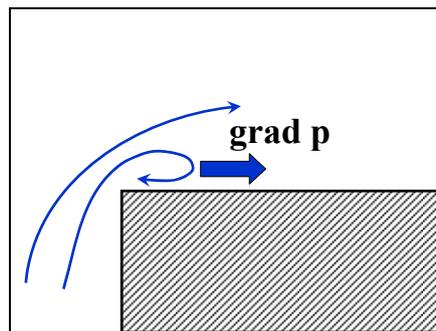


Рис. 11.10. Отрыв потока в области обратного градиента давления (давление растет слева направо в окрестности острой передней кромки, и заторможенный силами вязкости поток у стенки поворачивает вспять)

Обобщим далее интерполяционное соотношение (11.65), чтобы сделать его пригодным в широком диапазоне чисел Прандтля, т.е. для расчета теплоотдачи к любым типам теплоносителей – жидким металлам, газам, вязким жидкостям (Рис. 11.11). Особенности теплоотдачи к жидким металлам обсуждались выше в п. «Расчет локальной теплоотдачи при вынужденном обтекании пластины». Для сравнения на график нанесена специальная аппроксимация для жидких металлов (С.С.Кутателадзе), ход которой хорошо согласуется с результатами интерполяции между асимптотами.

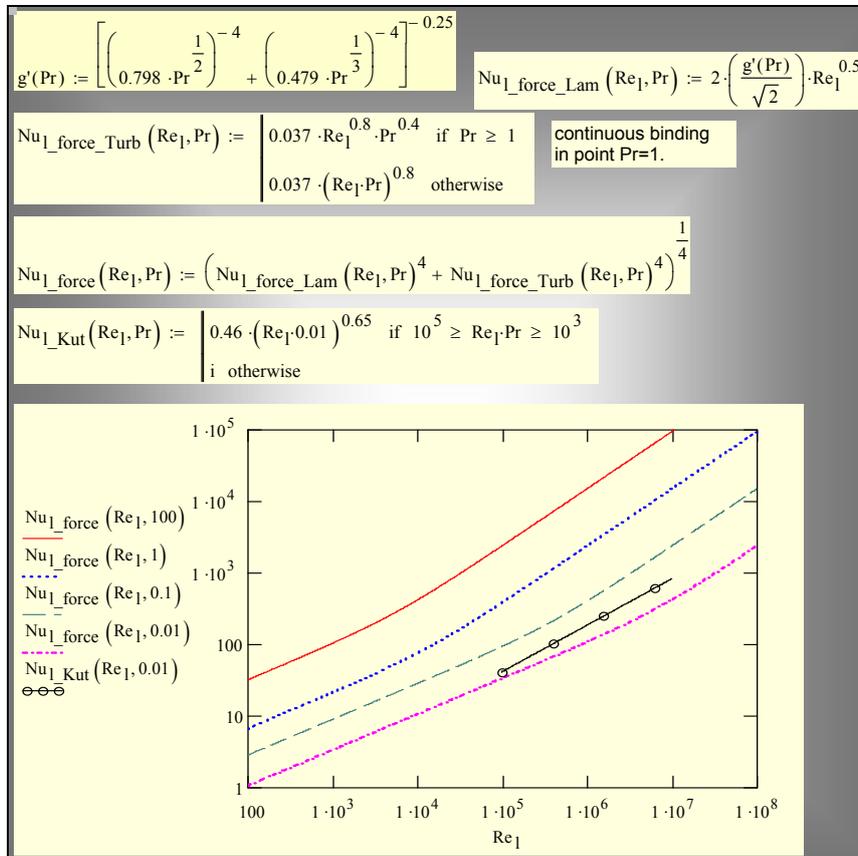


Рис. 11.11. Расчет средней теплоотдачи при вынужденном обтекании пластины теплоносителями с числами Прандтля $Pr = 0 \div \infty$

11.6 Предельный режим теплопроводности для теплоотдачи ограниченных тел

Поскольку конструируется глобальная аппроксимация, необходимо рассмотреть также предел *стремящихся к нулю* чисел Рейнольдса и Грасгофа ($Re \rightarrow 0$, $Gr \rightarrow 0$), когда движение жидкости прекращается. Формально, предельные значения числа Нуссельта оказываются нулевыми (см. (11.49), (11.54)), однако этот результат не является строгим, поскольку анализируемые соотношения (11.49), (11.54) получены в рамках теории пограничного слоя (т.е. при $Re \gg 1$).

Для *ограниченных трехмерных тел* должны существовать некоторые предельные ненулевые значения числа Нуссельта Nu_{min} , обусловленные чистой теплопроводностью в окружающее неограниченное пространство.

Примером является соотношение (11.67), являющееся точным решением стационарной одномерной задачи теплопроводности от сферы в неограниченное пространство:

$$\text{Nu}_{d,\min} \equiv \frac{\alpha_{\min} d}{\lambda} = 2 \quad (11.67)$$

В случае изотермической пластины размером $l \cdot b$ ($l \ll b$) предельное число Нуссельта, построенное по короткой стороне l как определяющему размеру, вычисляется по формуле:

$$\text{Nu}_{l,\min} \equiv \frac{\alpha_{\min} l}{\lambda} = \frac{\pi}{\ln\left(4 \frac{b}{l}\right)}; \quad b \gg l$$

представленной графически на Рис. 11.12.

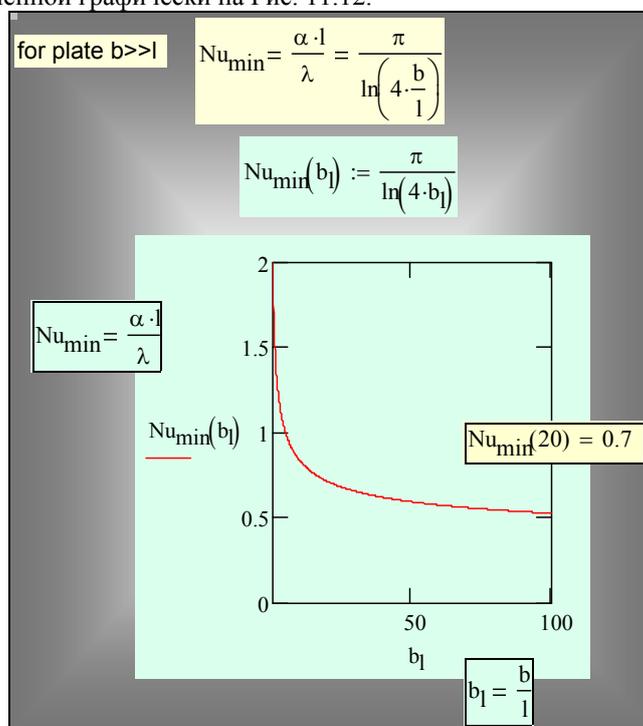


Рис. 11.12. Предел теплопроводности для теплоотдачи пластины

Для различных геометрических конфигураций и тепловых граничных условий необходимы специальные вычисления, чтобы найти предельные значения Nu_{\min} . Эта проблема может быть особенно актуальной для техники измерений температуры, например, посредством микрорезисторов или

других микроэлектронных устройств с разнообразной геометрической формой.

11.7 Глобальная аппроксимация для теплоотдачи пластины при смешанной конвекции

Представим теперь весь комплекс расчетных соотношений, обеспечивающих глобальную аппроксимацию для теплоотдачи пластины, т.е. расчет вынужденной, свободной и смешанной конвекции при любых режимах течения и для любых теплоносителей (см. Рис. 11.13, Рис. 11.14, Рис. 11.15). Графики демонстрируют асимптотические и переходные режимы теплоотдачи.

$$g'(Pr) := \left[\left(0.798 \cdot Pr^{\frac{1}{2}} \right)^{-4} + \left(0.479 \cdot Pr^{\frac{1}{3}} \right)^{-4} \right]^{-0.25}$$

$$Nu_{I_force_Lam}(Re_1, Pr) := 2 \cdot \left(\frac{g'(Pr)}{\sqrt{2}} \right) \cdot Re_1^{0.5}$$

$$Nu_{I_force_Turb}(Re_1, Pr) := \begin{cases} 0.037 \cdot Re_1^{0.8} \cdot Pr^{0.4} & \text{if } Pr \geq 1 \\ 0.037 \cdot (Re_1 \cdot Pr)^{0.8} & \text{otherwise} \end{cases}$$

continuous binding
in point Pr=1.

$$Nu_{I_force}(Re_1, Pr) := \left(Nu_{I_force_Lam}(Re_1, Pr)^4 + Nu_{I_force_Turb}(Re_1, Pr)^4 \right)^{\frac{1}{4}}$$

$$n := 2.265 \quad F_{appr}(Pr) := \left[\left(0.6004 \cdot Pr^{\frac{1}{2}} \right)^{-n} + \left(0.5027 \cdot Pr^{\frac{1}{4}} \right)^{-n} \right]^{\frac{-1}{n}}$$

$$Nu_{I_free_Lam}(Gr_1, Pr) := \frac{4}{3} \cdot F_{appr}(Pr) \cdot Gr_1^{\frac{1}{4}}$$

$$Nu_{I_free_Turb}(Gr_1, Pr) := \begin{cases} 0.13 \cdot (Gr_1 \cdot Pr)^{\frac{1}{3}} & \text{if } Pr \geq 1 \\ 0.13 \cdot (Gr_1 \cdot Pr^2)^{\frac{1}{3}} & \text{otherwise} \end{cases}$$

continuous binding
in point Pr=1

$$Nu_{min} := 0.7$$

$$Nu_{I_free}(Gr_1, Pr) := Nu_{min} + \left(Nu_{I_free_Lam}(Gr_1, Pr)^4 + Nu_{I_free_Turb}(Gr_1, Pr)^4 \right)^{\frac{1}{4}}$$

$$Nu_I(Re_1, Gr_1, Pr) := \left(Nu_{I_force}(Re_1, Pr)^2 + Nu_{I_free}(Gr_1, Pr)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Рис. 11.13. Глобальная аппроксимация для теплоотдачи пластины

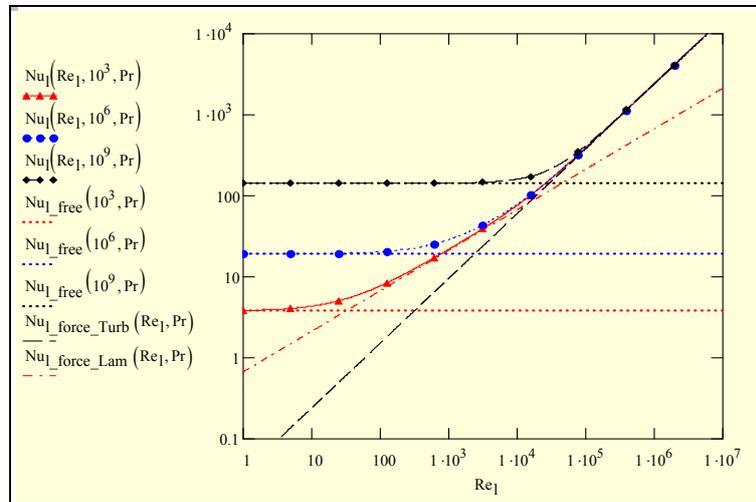


Рис. 11.14. Глобальная аппроксимация (кривые со значками) для теплоотдачи пластины

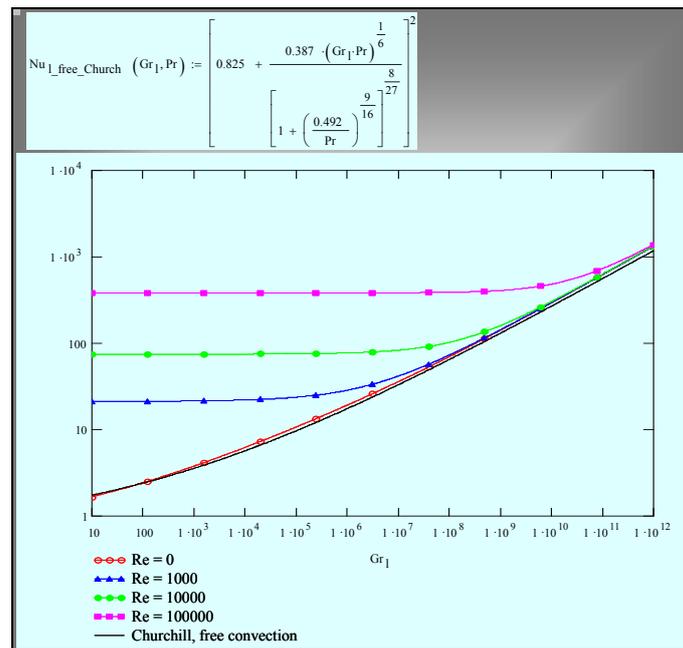


Рис. 11.15. Глобальная аппроксимация (кривые со значками) для теплоотдачи пластины

Построение глобальных аппроксимаций, пригодных в широкой области изменения параметров, является важной составной частью компьютерного моделирования реальных теплообменных устройств. Адекватные модели должны обеспечивать правильное воспроизведение не только штатных режимов работы установок, когда параметры (скорость, температурный напор и т.д.) фиксированы, но и переходных и ухудшенных режимов. Например, когда скорость теплоносителя резко уменьшается из-за неполадок с насосным оборудованием. Такие компьютерные модели могут быть использованы для прогнозирования и анализа возможных аварийных ситуаций.

11.8 Обтекание профилей

Теплоотдачу при поперечном обтекании цилиндра, не обязательно круглого профиля, можно приближенно рассчитать, применяя формулы для продольного обтекания пластины и считая характерным размером l длину обтекания, как показано на рисунке (Рис. 11.16):

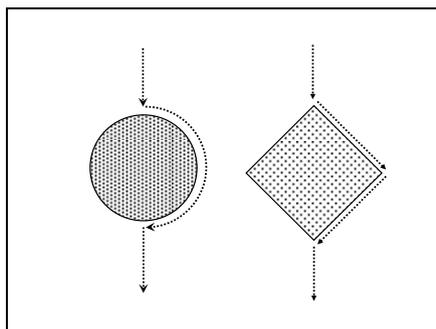


Рис. 11.16. Длина обтекания профилей

Для круглого цилиндра длина обтекания составит половину окружности:

$$l = \frac{\pi d}{2} \quad (11.68)$$

Обычно обтекаемый профиль находится в канале, и скорость жидкости изменяется из-за сужения или расширения сечения потока. Характерное среднее значение определяют с помощью параметра пористости насадки ψ , т.е. доли объема, занятой теплоносителем. Для расчетной ячейки, показанной на Рис. 11.17 пунктиром, пористость составит:

$$\Psi_{cell} = \frac{db - \frac{\pi d^2}{4}}{db} = 1 - \frac{\pi d}{4b}; \quad b > d, \quad (11.69)$$

а характерная скорость –

$$u = \frac{w}{\Psi_{cell}} = \frac{w}{1 - \frac{\pi d}{4b}} \quad (11.70)$$

Скорость w , отнесенную к полному, незагроможденному сечению канала, называют приведенной скоростью. Ее значение определяется заданным расходом теплоносителя в канале. Характерная скорость u , по которой рассчитывается число Рейнольдса в критериальных формулах, является мерой истинной скорости, увеличенной из-за сужения живого сечения потока.

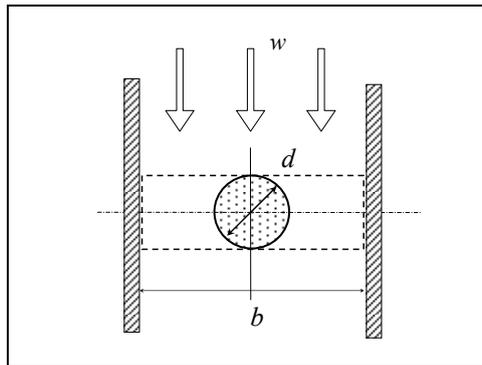


Рис. 11.17. Обтекание профиля в канале

Таким образом, для средней теплоотдачи при обтекании профилей рекомендуются следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \overline{Nu}_{l_Lam} &= 0.66 Re_l^{0.5} Pr^{0.33}; \\ \overline{Nu}_{l_Turb} &= 0.037 Re_l^{0.8} Pr^{0.4}; \\ \overline{Nu}_l(Re_l, Pr) &= (\overline{Nu}_{l_Lam} + \overline{Nu}_{l_Turb})^{1/2}; \quad 0.6 \leq Pr \leq 1000 \end{aligned} \quad (11.71)$$

Определяющий размер – длина обтекания (Рис. 11.16), определяющая скорость – средняя скорость в канале (11.70).

В случае одиночного круглого цилиндра после подстановки (11.68) в (11.71) получаются расчетные соотношения, представленные на Рис. 11.18. Определяющим размером в этих формулах является диаметр цилиндра d . Результаты интерполяции (11.71) сопоставляются со специальной

эмпирической формулой для поперечного обтекания одиночного цилиндра. Постоянное слагаемое 0.3 в интерполяционной формуле вводится для улучшения согласования с опытными данными в пределе нулевой скорости обтекания.

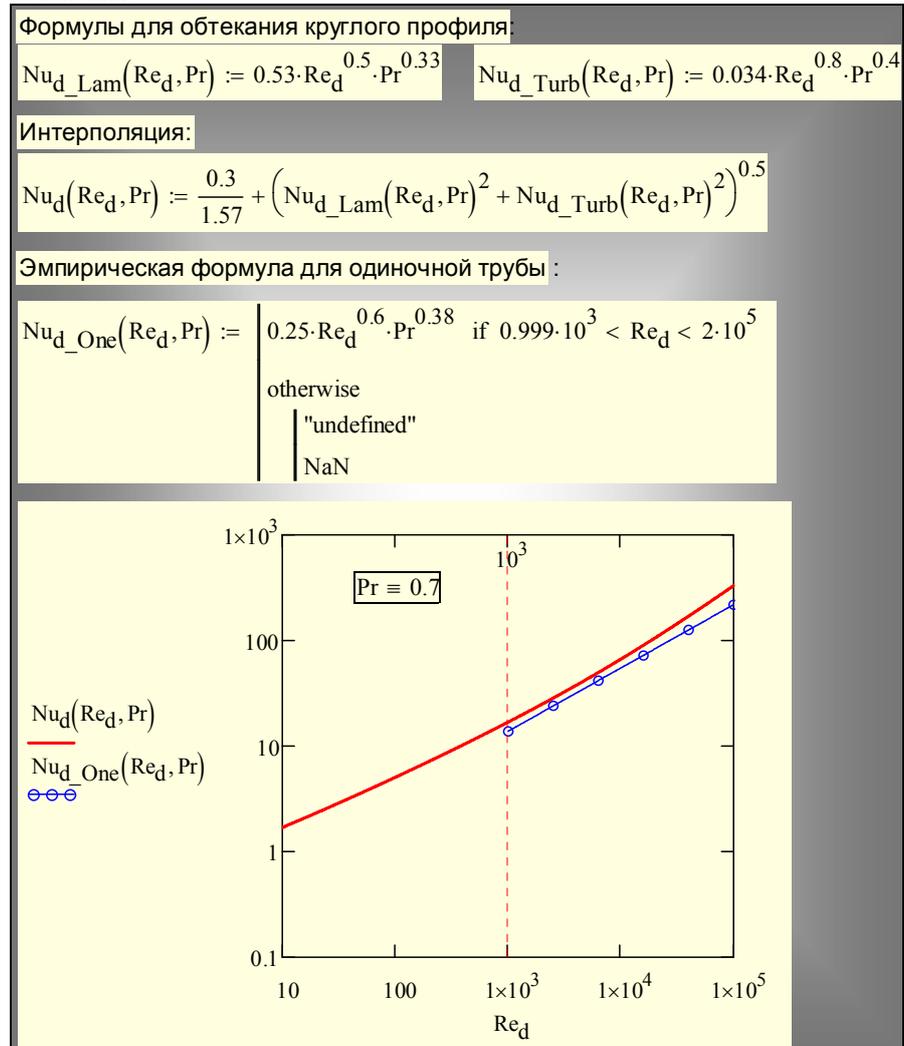


Рис. 11.18. Теплоотдача при поперечном обтекании одиночного цилиндра: сопоставление метода интерполяции со специальной эмпирической формулой

При обтекании *трехмерных объектов* протяженность по ходу течения оценивают как отношение полной поверхности к максимальному периметру в сечении, перпендикулярном к потоку (Рис. 11.19).

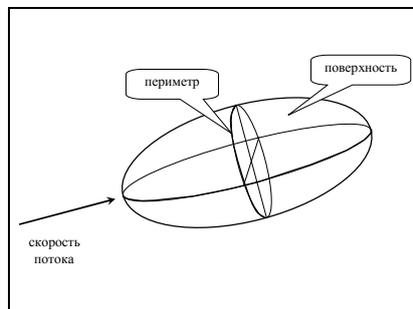


Рис. 11.19. Длина обтекания для трехмерных объектов

Для сферы:

$$\begin{aligned}
 l &= \frac{\pi d^2}{\pi d} = d; \\
 \overline{Nu}_{l_Lam} &= 0.66 Re_l^{0.5} Pr^{0.33}; \\
 \overline{Nu}_{l_Turb} &= 0.037 Re_l^{0.8} Pr^{0.4}; \\
 \overline{Nu}_l(Re_l, Pr) &= 2 + (\overline{Nu}_{l_Lam} + \overline{Nu}_{l_Turb})^{1/2};
 \end{aligned}
 \tag{11.72}$$

Постоянное слагаемое 2 соответствует пределу стационарной теплопроводности от сферы в бесконечное пространство.

11.9 Теплоотдача в поперечно-обтекаемых пучках труб

..\Mathcad_HMT\11_Ingenearing\Tube_Bundles\TubeBundles_global_mc14.xmcdz

Однорядный пучок труб

При поперечном обтекании *однорядного* пучка средняя теплоотдача рассчитывается как для одиночного цилиндра (см. (11.71)), с учетом естественным образом модифицированного значения пористости (Рис. 11.20):

$$\psi_{cell} = \frac{s_1 d - \frac{\pi d^2}{4}}{s_1 d} = 1 - \frac{\pi}{4} \frac{1}{S_1}; \quad S_1 \equiv \frac{s_1}{d},
 \tag{11.73}$$

где S_1 – относительный поперечный шаг.

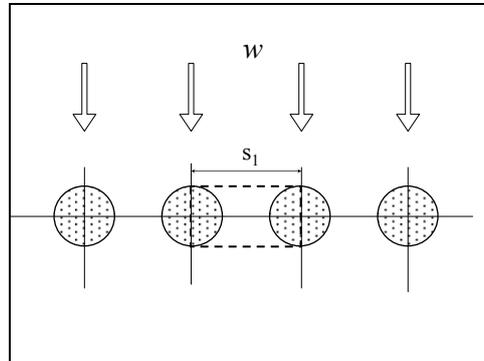


Рис. 11.20. Пористость для одиночного ряда труб

Числа Рейнольдса и Нуссельта, согласно определению, есть:

$$\text{Re}_l \equiv \frac{ul}{\nu_f} = \left(\frac{w}{\psi_{cell}} \right) \frac{l}{\nu_f}; \quad \text{Nu}_l \equiv \frac{\alpha l}{\lambda_f}; \quad (11.74)$$

$$l = \frac{\pi}{2} d; \quad \psi_{cell} = 1 - \frac{\pi}{4} \frac{1}{S_1}$$

Многорядный пучок труб

Пористость ψ упорядоченных структур, какими являются *многорядные коридорные* и *шахматные* пучки труб, определяется для элементарных ячеек, показанных прямоугольниками на рисунках (Рис. 11.21, Рис. 11.22). В обоих случаях на ячейку приходится одна труба пучка.

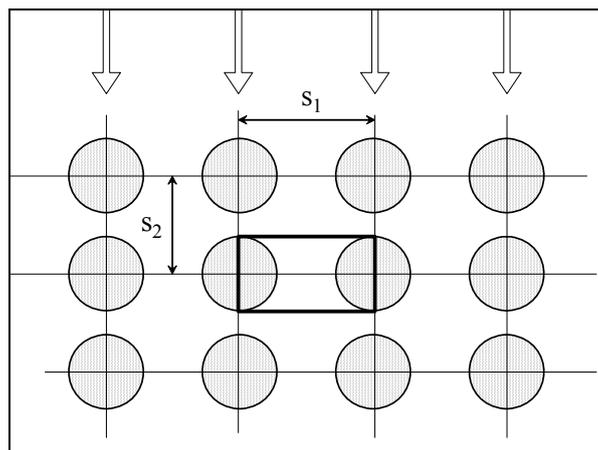


Рис. 11.21. Пористость коридорного пучка труб

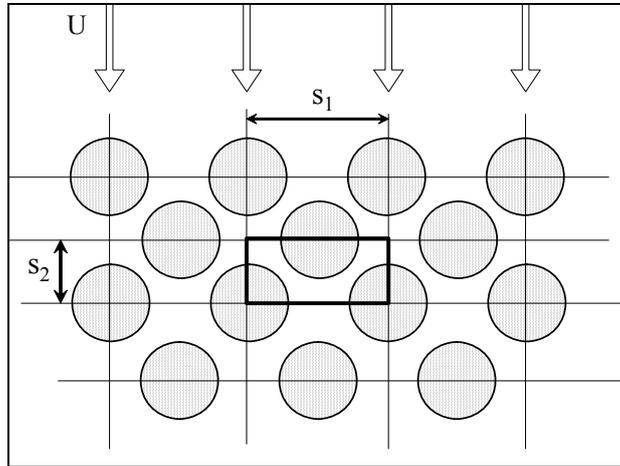


Рис. 11.22. Пористость шахматного пучка труб

Обобщенными геометрическими характеристиками пучка являются пористость, поверхность теплоотдачи в расчете на единицу объема ячейки F_{cell} и эквивалентный диаметр канала d_e . (Последний важен для расчетных методик, в которых межтрубное пространство рассматривается как канал сложной формы).

В случае $S_2 \geq 1$ для коридорного и шахматного пучка с расчетной ячейкой ($s_1 d$) получим:

$$\begin{aligned} \psi_{cell} &= 1 - \frac{\pi d^2 / 4}{s_1 d} = 1 - \frac{\pi}{4} \frac{1}{S_1}; & F_{cell} &= \frac{\pi d}{s_1 d} = \frac{\pi}{s_1} = \frac{1}{d} \frac{\pi}{S_1}; \\ d_e &= 4 \frac{\psi_{cell}}{F_{cell}} = \left(\frac{4}{\pi} \psi_{cell} S_1 \right) d & & (11.75) \\ & \left(\text{если } S_2 > 1 \Rightarrow F_{vol} = \frac{F_{cell}}{S_2} \right) & & \end{aligned}$$

Индекс «cell» означает, что величины отнесены к объему ячейки, не заполняющей весь объем насадки, если $S_2 > 1$. Полный объем будет больше в S_2 раз, как следует из рисунка (Рис. 11.21); поэтому поверхность теплоотдачи, отнесенное к полному объему насадки, пересчитывается в последней строке (11.75).

Для шахматного пучка при $S_2 < 1$ (см. Рис. 11.22) расчетная ячейка есть ($s_1 s_2$), и пористость, поверхность теплоотдачи в расчете на единицу объема и эквивалентный диаметр канала d_e рассчитываются по формулам:

$$\psi = 1 - \frac{\pi d^2 / 4}{s_1 s_2} = 1 - \frac{\pi}{4} \frac{1}{S_1 S_2}; \quad F_{vol} = \frac{\pi d}{s_1 s_2} = \frac{1}{d} \frac{\pi}{S_1 S_2};$$

$$d_e = 4 \frac{\psi}{F_{vol}} = \left(\frac{4}{\pi} \psi S_1 S_2 \right) d \quad (11.76)$$

При компьютерном моделировании следует учитывать нереализуемые по геометрическим соображениям конфигурации, как это сделано в приведенном ниже блоке Mathcad программы (Рис. 11.23, Рис. 11.24).

```

ψ(S1, S2) :=
return 0 if S1 < 1

ψmin ← 1 -  $\frac{\pi}{4 \cdot 1 \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{4}}}$ 

if S2 ≥ 1
    "for both Cor and Chess as for one row: "
    ψ ← 1 -  $\frac{\pi}{4 \cdot S_1}$ 
otherwise
    "only for Chess"
    S2_min ← max  $\left[ \frac{1}{2}, \sqrt{1 - \left( \frac{\min(S_1, 2)}{2} \right)^2} \right]$ 
    return 0 if S2 < S2_min
    "for admissible configurarion"
    ψ ← 1 -  $\frac{\pi}{4 \cdot S_1 \cdot S_2}$ 
ψ ← max(ψ, ψmin)
    
```

Рис. 11.23. Пористость расчетной ячейки пучка труб (см. Рис. 11.21, Рис. 11.22)

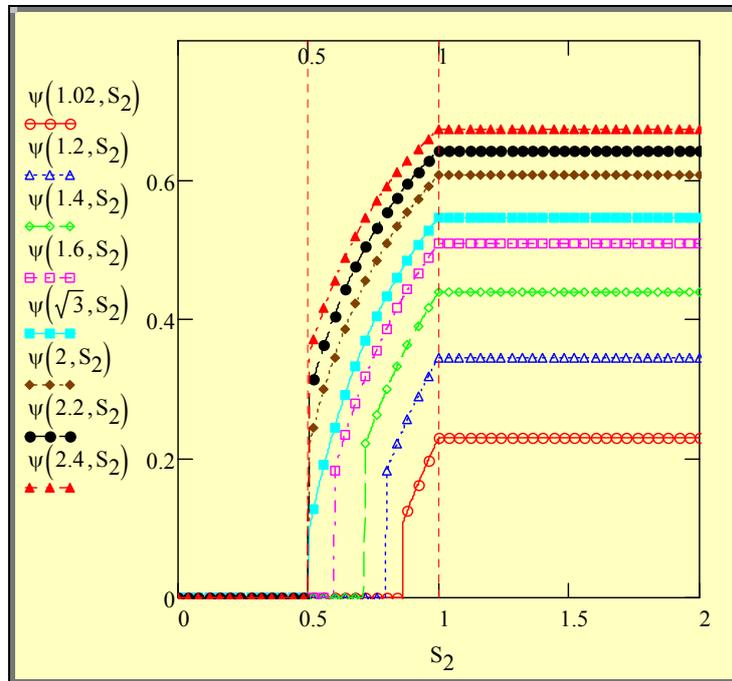


Рис. 11.24. Зависимость пористости расчетной ячейки от геометрических параметров пучка

Расчет теплоотдачи в *многорядных пучках* производят по формуле

$$Nu_{\text{bank}} = f_A \cdot Nu_{\text{OneRow}}, \quad (11.77)$$

где число Нуссельта однорядного пучка рассчитывается по (11.71). Числа Рейнольдса и Нуссельта определяются по длине обтекания профиля l и средней скорости в пористой структуре:

$$Re_l \equiv \frac{ul}{v_f} = \left(\frac{w}{\psi} \right) \frac{l}{v_f}; \quad Nu_l \equiv \frac{\alpha l}{\lambda_f}; \quad l = \frac{\pi d}{2},$$

где w – приведенная скорость, отнесенная к полному, незагроможденному сечению канала. Пористость ψ рассчитывается по (11.75), (11.76) (см. Рис. 11.23), а коэффициент структуры f_A пучка – по формулам на Рис. 11.25.

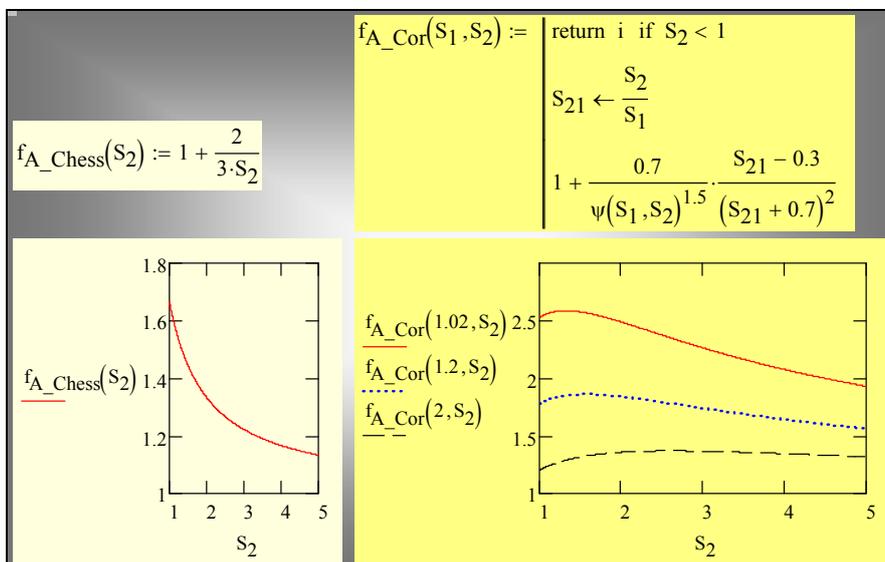


Рис. 11.25. Зависимость коэффициента структуры f от геометрических параметров пучка

Графические иллюстрации (Рис. 11.26, Рис. 11.27) представляют теплоотдачу коридорного и шахматного пучков с неметаллическим теплоносителем. Исходные формулы (11.71) пересчитаны к характерному размеру – диаметру трубы в соответствии с (11.68). На рисунках показано также, как вычисляется пористость ψ (см. Рис. 11.23) и коэффициент структуры f_A (Рис. 11.25).

Преимуществом интерполяционных соотношений перед специализированными формулами, также представленными на рисунках, является существенно более широкая охватываемая область чисел Рейнольдса и геометрических параметров. Если вместо исходных соотношений (11.71), пригодных для неметаллических теплоносителей, использовать универсальные соотношения (Рис. 11.11), то получится методика, пригодная также для расчета теплоотдачи в пучках, обтекаемых жидкими металлами.

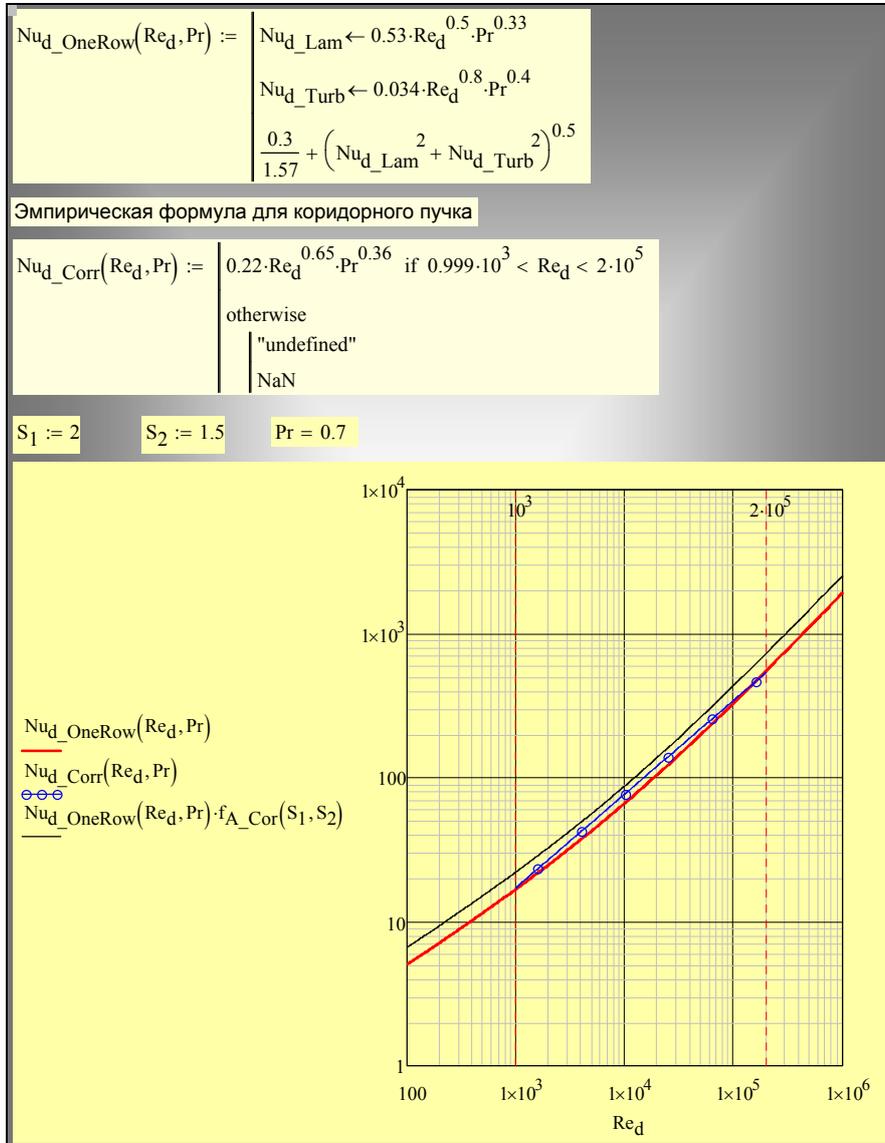


Рис. 11.26. Теплоотдача коридорного пучка

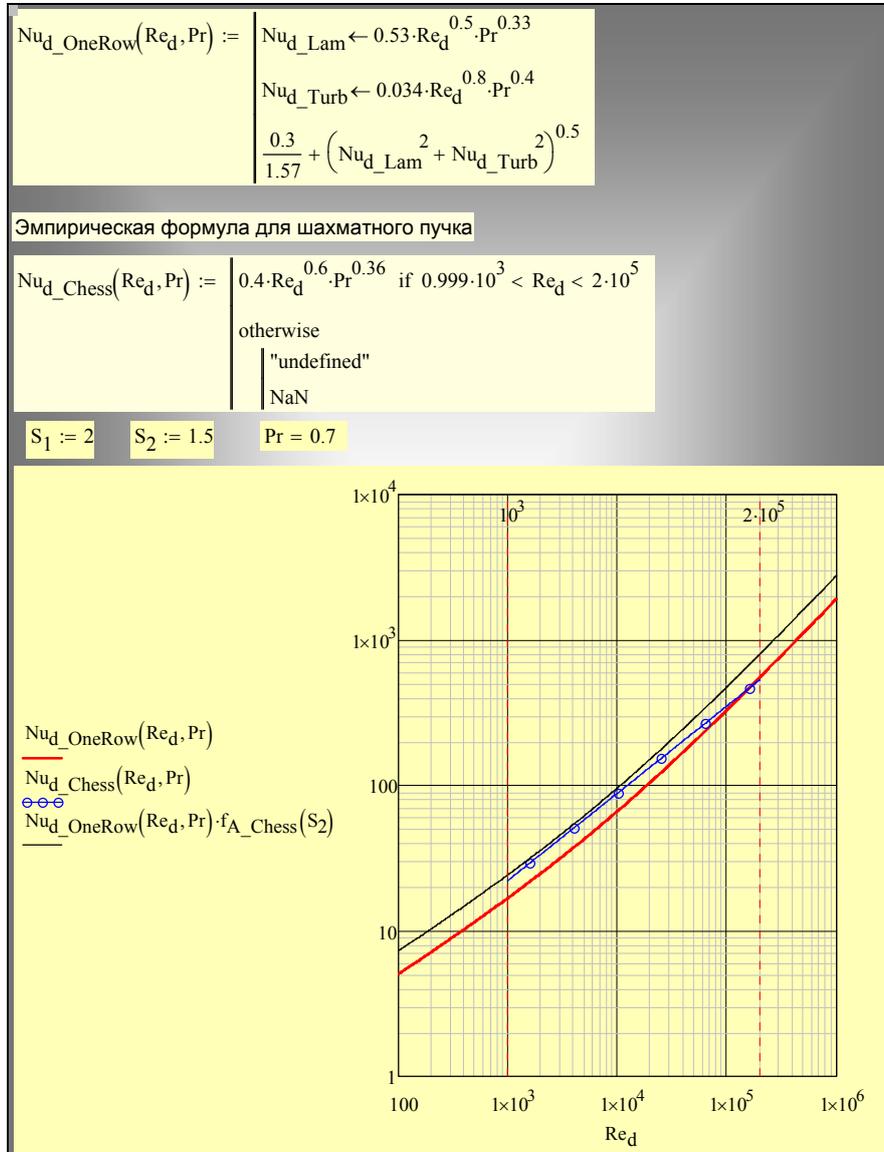


Рис. 11.27. Теплоотдача шахматного пучка

11.10 Теплоотдача в трубах и каналах

Теплоотдача в круглых трубах

Общая картина развивающихся полей скорости и температуры при ламинарном вынужденном течении в трубе (при $Re_d \leq 2300$) показана на рис. 11.28. Поля рассчитаны численным методом (подробности решения задачи можно найти в html-документе: ..\Matlab_HMT\Tube\tube_lam.html). Холодная жидкость поступает в трубу, температура которой поддерживается на постоянном повышенном уровне. Цветом показано распределение температур с интуитивно понятной градацией: от низких (синий цвет) к высоким (красный цвет) значениям. Слой прогретой жидкости у горячей стенки утолщается по мере продвижения жидкости вдоль трубы, пока прогрев не охватит всю толщину потока от стенки до оси трубы. Аналогично развивается поле скоростей, показанное стрелками. Осевой поток жидкости подтормаживается у стенки, пока не сформируется установившийся, известный из курса гидродинамики параболический (пуазейлевский) профиль скорости. Говорят, что на *начальном участке* (рис. 11.28) *развиваются* гидродинамический и тепловой пограничные слои с увеличивающейся толщиной, вплоть до достижения радиуса трубы. Далее развитие по продольной координате прекращается и имеет место *стабилизированное* течение и *стабилизированная* теплоотдача.

Можно полагать, что на начальном участке теплоотдача развивается аналогично тому, как это происходит при продольном обтекании пластины. Новым является вопрос о длине участка стабилизации и предельном, установившемся значении теплоотдачи (см. соответствующие оценки ниже). Дополнительную информацию о *локальной теплопередаче* при ламинарном течении в *микрочанальных теплообменниках* можно найти в гл. 25 Электронного курса «Микротеплообменники».

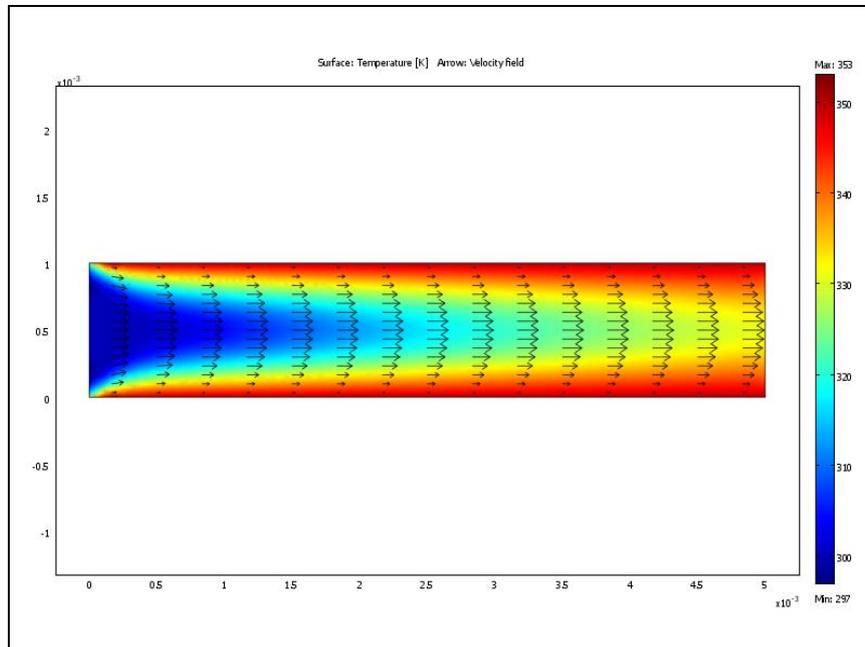


Рис. 11.28. Теплоотдача на начальном участке при ламинарном режиме (цвет – распределение температуры, стрелки – распределение скорости)

При переходном ($2300 < Re_d < 10000$) и турбулентном ($Re_d > 10000$) режимах картина течения и теплообмена в трубах оказывается существенно более сложной. Мы продемонстрируем ее с помощью численной модели. Подробности решения можно найти в html-документе: ..\Matlab\HMT\Tube\long_tube_forc_3.html, а основные результаты представлены графически (см. рис. 11.29 – рис. 11.32).

Основная сложность расчета турбулентных потоков связана с необходимостью скорректировать значения коэффициентов *вязкости и теплопроводности* теплоносителя, чтобы учесть явление *турбулентного перемешивания*:

$$\lambda = \lambda_M + \lambda_T; \quad \mu = \mu_M + \mu_T.$$

Таким образом, коэффициенты теплопроводности и вязкости в выражениях законов теплопроводности или трения

$$q = -\lambda \frac{\partial t}{\partial n}; \quad \tau = \mu \frac{\partial u}{\partial n}$$

считаются не просто характеристиками молекулярного (индекс M) переноса – свойствами вещества, но *эффективными* величинами, содержащими

дополнительную составляющую, связанную с турбулентным перемешиванием (индекс T).

Для определения коэффициентов турбулентного переноса существует целая иерархия расчетных моделей. В инженерных расчетах часто применяют k - ε модель турбулентности, где k – турбулентная энергия в расчете на единицу массы ($\text{м}^2/\text{с}^2$) и ε – скорость диссипации турбулентной энергии ($\text{м}^2/\text{с}^3$) – величины, связанные следующим балансовым уравнением в простейшем случае *затухающей* турбулентности:

$$\rho \frac{\partial k}{\partial t} = -\rho \varepsilon.$$

Вообще говоря, (k, ε) – это две новые переносимые величины (дополнительно к массе, импульсу и энергии потока), для которых должны быть составлены дифференциальные уравнения сохранения (переноса). Например, в случае кинетической энергии турбулентности содержание такого уравнения будет следующим: скорость возрастания турбулентной энергии k в единичном контрольном объеме определяется подводом k через его границу посредством кондукции и конвекции, производством турбулентной энергии за счет работы сил сопротивления и диссипацией ε .

Величины (k, ε) определяют значения турбулентных коэффициентов переноса:

$$\mu_T = \rho C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}; \quad \text{Pr}_T \equiv \frac{\nu_T}{a_T} \approx 1 \Rightarrow \lambda_T \approx c_p \mu_T.$$

В иллюстративном расчетном примере (Рис. 11.29 – Рис. 11.32) рассматривается теплоотдача к турбулентному потоку воздуха в трубе диаметром 0.1 м и длиной 5 м. Расположение трубы на рисунках вертикальное, правая вертикальная линия – ось симметрии (ось трубы), левая вертикальная линия – стенка трубы.

Общая картина развития теплоотдачи на начальном участке круглой трубы при турбулентном режиме (Рис. 11.29) схожа с ламинарным течением (Рис. 11.28): в обоих случаях сначала развиваются гидродинамический и тепловой пограничные слои, пока их толщина не достигнет радиуса трубы; далее имеет место *стабилизированное* течение и *стабилизированная* теплоотдача.

Однако существенные детали различаются очень сильно.

Обратите внимание прежде всего на профили скорости турбулентного потока (Рис. 11.30). Вместо плавного изменения скорости по сечению пограничного слоя (или по всему сечению трубы на стабилизированном участке) имеет место резко неравномерный профиль. Проследивая изменение скорости от нуля на стенке (левая вертикаль на рисунке) до максимального значения на оси потока (правая вертикаль), мы регистрируем сначала очень быстрое нарастание в тонком пристенном слое (настолько тонком, что его затруднительно изобразить на рисунке, и нарастание

показано в виде скачка), а затем относительно плавное изменение в ядре потока.

Аналогично выглядят распределения температуры по сечению трубы на рис. 11.31.

Объяснение этому феномену дается распределением *турбулентной теплопроводности* λ_T по толщине потока (Рис. 11.32) (и аналогичным по форме распределением *турбулентной вязкости* μ_T , не показанном на рисунках).

Видно, что обусловленная интенсивным турбулентным перемешиванием в ядре потока турбулентная теплопроводность λ_T намного превышает *молекулярные* значения (0.026 Вт/м К для воздуха), благодаря чему обеспечивается очень высокая *эффективная* теплопроводность потока, $\lambda = \lambda_M + \lambda_T$ и, соответственно, относительно низкий поперечный градиент температуры.

Напротив, вблизи стенки турбулентное перемешивание прекращается из-за влияния сил вязкости (условие прилипания). Поэтому турбулентная составляющая теплопроводности исчезает, эффективная теплопроводность становится равной ее молекулярному, относительно низкому значению, а градиент температуры у стенки достигает весьма больших значений.

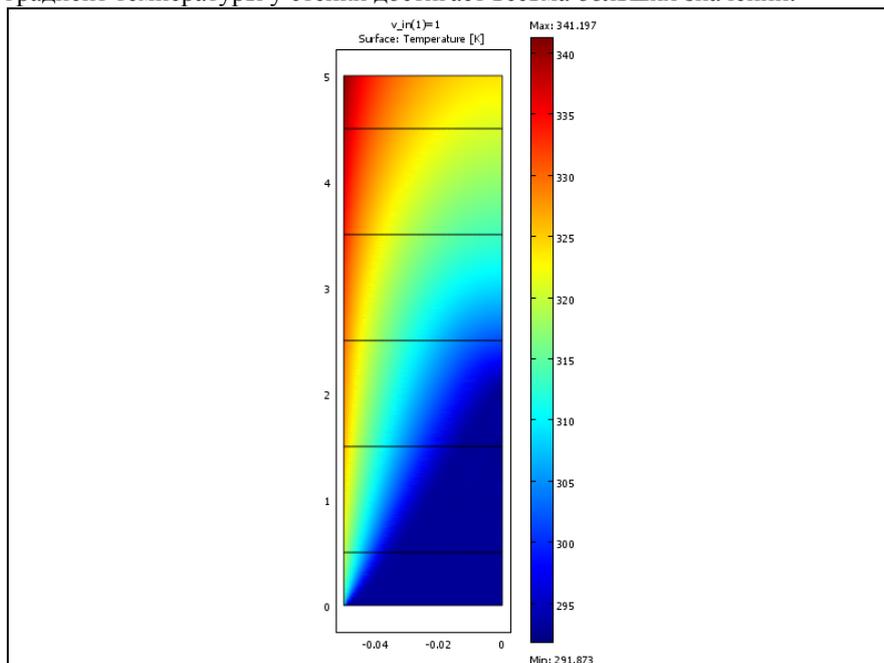


Рис. 11.29. Теплоотдача на начальном участке круглой трубы при турбулентном режиме (цвет – распределение температуры, правая вертикальная линия $r = 0$ – ось симметрии, или ось трубы; диаметр трубы – 0.1 м, длина – 5 м)

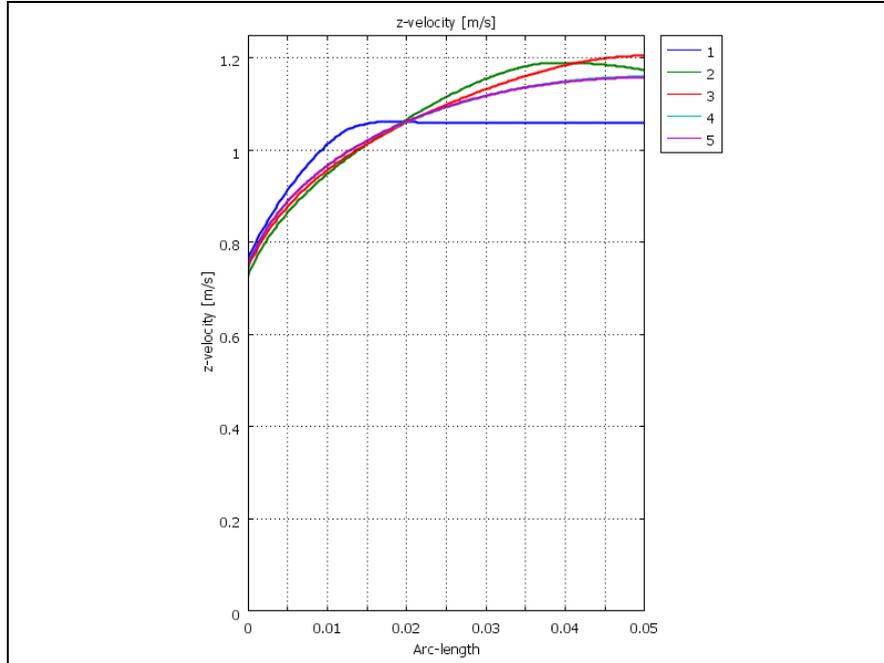


Рис. 11.30. Распределение скорости в различных сечениях по длине турбулентного потока (1-5 – номера сечения, см. Рис. 11.29; линии 1,2,3 относятся еще к начальному участку; линии 4 и 5 сливаются, что означает стабилизацию потока; быстрое изменение скорости до нуля в тонком пристенном слое не показано)

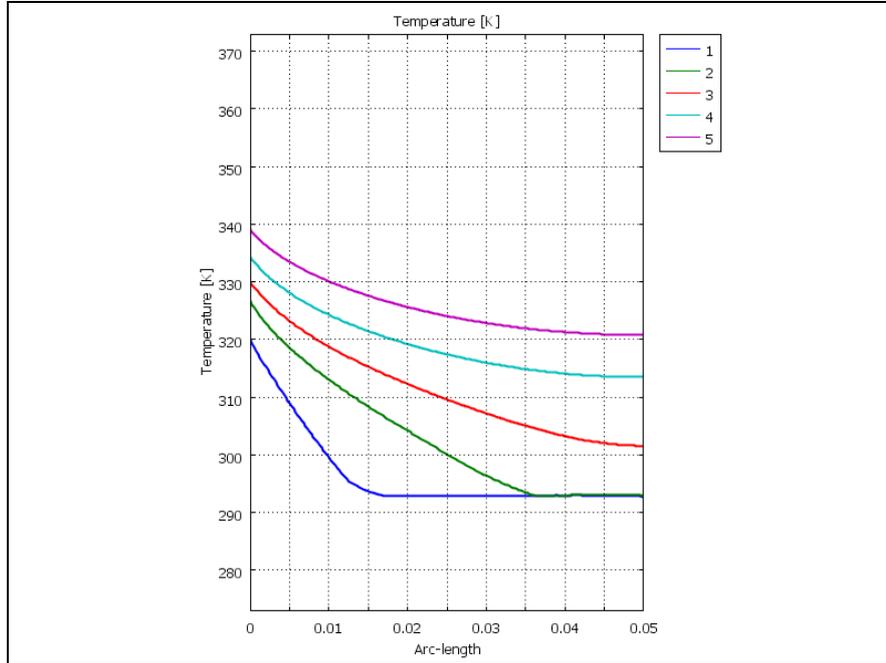


Рис. 11.31. Распределения температуры в различных сечениях по длине турбулентного потока (1-5 – номера сечения, в которых построены распределения, см. Рис. 11.29; быстрое изменение температуры в тонком пристенном слое не показано)

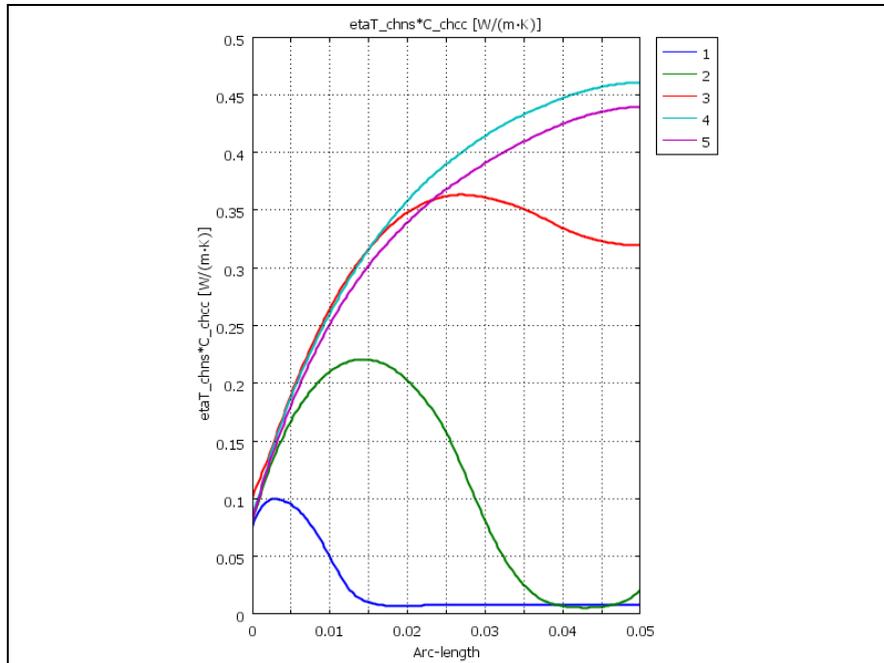


Рис. 11.32. Турбулентная теплопроводность λ_T в газовом потоке как функция расстояния от стенки трубы (1-5 – номера сечения, в которых построены распределения, см. Рис. 11.29)

Описанная в общих чертах картина теплоотдачи в турбулентном потоке показывает, с какими трудностями встречаются инженеры при расчетах и проектировании теплообменных устройств. Сложная геометрия элементов конструкций и потоков, разнообразие режимов, стремление к более глубокому пониманию механизмов переноса влечет разработку все более сложных моделей турбулентности. Вычислительные процедуры при реализации этих моделей также усложняются и требуют применения суперкомпьютеров (достаточно принять во внимание необходимость высокого пространственного разрешения вблизи твердых стенок, где все изменения происходят очень быстро). Поэтому на практике применяют разумное сочетание детального компьютерного моделирования теплообменных устройств с более простыми расчетными моделями, к рассмотрению которых мы далее переходим.

Теплоотдача на начальном участке может быть приближенно описана соотношениями параграфа 11.7 для пластины, по крайней мере вблизи входа, где толщина пограничного слоя еще мала по сравнению с радиусом трубы. Эти соотношения принимаются в дальнейшем в качестве асимптотики начального участка.

Стабилизированная теплоотдача при ламинарном течении оценивается очевидным соотношением:

$$\alpha \approx \frac{\lambda_f}{\delta_{x \rightarrow \infty}} \approx \frac{\lambda_f}{d/2} \Rightarrow \text{Nu}_d \equiv \frac{\alpha d}{\lambda_f} = C$$

Константа C порядка единицы принимает несколько отличающиеся числовые значения в зависимости от граничных условий. *Средняя* теплоотдача с удовлетворительной точностью рассчитывается по формуле:

$$\overline{\text{Nu}}_d \equiv \frac{\overline{\alpha d}}{\lambda_f} = 4 \cdot \varepsilon_t \quad (11.78)$$

Элементарную оценку теплоотдачи при *турбулентном режиме* можно получить, предполагая что *все* сопротивление переносу теплоты сосредоточивается в т.н. *вязком подслое* δ_{vis} – тонком слое жидкости у стенки, в котором турбулентное перемешивание полностью подавлено силами вязкости (см. аналогичные вычисления в п. «Расчет локальной теплоотдачи при вынужденном обтекании пластины», «Турбулентный режим»):

$$\alpha \approx \frac{\lambda_f}{\delta_{\text{vis}}}$$

Толщина вязкого подслоя оценивается через сопротивление вязкого трения следующим образом:

$$\tau \approx \mu \frac{U}{\delta_{\text{vis}}} = C_f \frac{\rho U^2}{2} \Rightarrow \delta_{\text{vis}} \approx \frac{2\nu}{C_f U};$$

$$C_f = \frac{0.046}{\text{Re}_d^{0.2}},$$

где коэффициент сопротивления C_f определен надежной *эмпирической* формулой для течений в трубах.

Последующие простые подстановки приводят к окончательному *оценочному* результату:

$$\alpha \approx \frac{\lambda_f}{\delta_{\text{vis}}} \Rightarrow \frac{\alpha d}{\lambda_f} \approx \frac{d}{\delta_{\text{vis}}} \Rightarrow \frac{\alpha d}{\lambda_f} \approx \frac{Ud}{\nu} \frac{C_f}{2} = \left(\frac{Ud}{\nu} \right) \left(\frac{0.023}{\text{Re}_d^{0.2}} \right) \Rightarrow$$

$$\text{Nu}_d \approx 0.023 \text{Re}_d^{0.8}$$

Более строгая теория дает для *стабилизированной теплоотдачи при турбулентном режиме* следующее соотношение, являющееся общепринятым стандартом при инженерных расчетах (формула Б.С. Петухова):

$$\overline{Nu}_d = \frac{\frac{\xi}{8} Re_d Pr}{1.07 + 12.7 \sqrt{\frac{\xi}{8}} \cdot (Pr^{2/3} - 1)}; \quad \xi = \frac{1}{(1.82 \cdot \lg(Re_d) - 1.64)^2}; \quad (11.79)$$

$$10^4 < Re_d < 5 \cdot 10^5; \quad 0.5 < Pr < 2000$$

где ξ – коэффициент гидравлического сопротивления.

Возможно также применение более простой по структуре (факторизованной) эмпирической формулы М.А. Михеева:

$$\overline{Nu}_d = 0.021 \cdot Re_d^{0.8} Pr^{0.43} \quad (11.80)$$

Различие между этими формулами относительно невелико (Рис. 11.33).

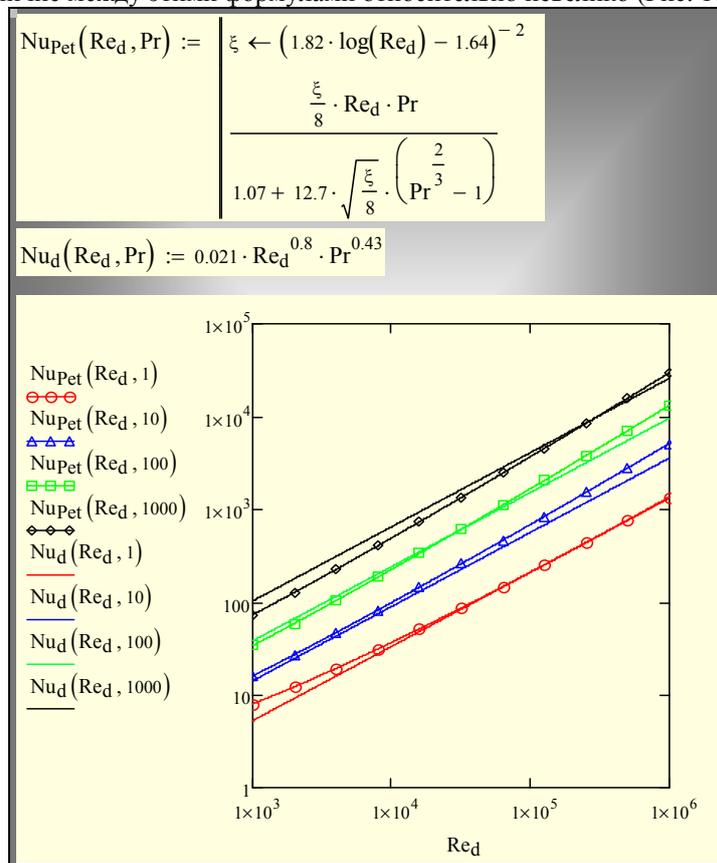


Рис. 11.33. Сопоставление формул Б.С.Петухова и М.А.Михеева для турбулентного течения в трубах

Для построения глобальной аппроксимации наиболее подходящей оказывается формула вида (11.79), модифицированная с целью лучшего описания теплоотдачи в переходной области чисел Рейнольдса 2300÷10000 (Gnielinsky):

$$\overline{\text{Nu}}_d = \frac{\frac{\xi}{8}(\text{Re}_d - 1000)\text{Pr}}{1 + 12.7\sqrt{\frac{\xi}{8}} \cdot (\text{Pr}^{2/3} - 1)}; \quad \xi = \frac{1}{(1.82 \cdot \lg(\text{Re}_d) - 1.64)^2}; \quad (11.81)$$

Формула (11.81) используется далее как предельное соотношение для *стабилизированной теплоотдачи при турбулентном режиме* в случае неметаллических жидкостей.

Стабилизированную теплоотдачу при турбулентном течении *жидкометаллических теплоносителей* мы получим как продолжение зависимости (11.80) в область малых чисел Прандтля, аналогично тому, как это было сделано в случае турбулентного обтекания пластины (см. формулы (11.25), (11.51) и комментарии к ним):

$$\begin{aligned} \overline{\text{Nu}}_d &= 0.021 \cdot (\text{Re}_d \text{Pr})^{0.8}; \\ \overline{\text{Nu}}_d &= 0.021 \cdot \text{Pe}_d^{0.8} \end{aligned} \quad (11.82)$$

Теплоотдача к жидким металлам при ламинарном стабилизированном режиме рассчитывается по формуле (11.78), а на начальном участке – по рекомендациям параграфа 11.7.

Глобальную аппроксимацию строят методом интерполяции между асимптотами (Рис. 11.34, Рис. 11.35).

Теплоотдачу на начальном участке (Рис. 11.34) описывают формулами для пластины (Рис. 11.11), преобразованными к другому характерному размеру – диаметру трубы вместо длины по ходу потока; в результате появляется отношение длины канала к диаметру: $L_d = L/d$.

$$\begin{aligned}
 \text{Nu}_{L_force_Lam}(\text{Re}_L, \text{Pr}) &:= \sqrt{2} \cdot \left[\left(0.798 \text{Pr}^{\frac{1}{2}} \right)^{-4} + \left(0.479 \text{Pr}^{\frac{1}{3}} \right)^{-4} \right]^{-0.25} \cdot \text{Re}_L^{0.5} \\
 \text{Nu}_{L_force_Turb}(\text{Re}_L, \text{Pr}) &:= \begin{cases} 0.037 \text{Re}_L^{0.8} \cdot \text{Pr}^{0.4} & \text{if } \text{Pr} \geq 0.5 \\ \text{"liquid metal"} \\ 0.037 (\text{Re}_L \cdot \text{Pr})^{0.8} \end{cases} \\
 \text{Nu}_{L_force}(\text{Re}_L, \text{Pr}) &:= \left(\text{Nu}_{L_force_Lam}(\text{Re}_L, \text{Pr})^4 + \text{Nu}_{L_force_Turb}(\text{Re}_L, \text{Pr})^4 \right)^{\frac{1}{4}} \\
 \text{Nu}_{d_beg}(\text{Re}_d, \text{Pr}, L_d) &:= \begin{cases} \text{Re}_L \leftarrow \text{Re}_d \cdot L_d \\ \frac{\text{Nu}_{L_force}(\text{Re}_L, \text{Pr})}{L_d} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Рис. 11.34. Средняя теплоотдача на начальном участке трубы Nu_{d_beg}

Базовыми соотношениями для *стабилизированной* теплоотдачи являются (11.78) – асимптотика малых чисел Рейнольдса (ламинарный режим) и (11.81), (11.82) – асимптотика больших чисел Рейнольдса (турбулентный режим). Интерполяция между этими пределами (Рис. 11.35) позволяет рассчитывать *стабилизированную* теплоотдачу (в *длинных* трубах) для ламинарного, переходного и турбулентного режимов (т.е. при любых числах Рейнольдса) и для любых теплоносителей (жидких металлов, газов, вязких жидкостей).

$$\text{Nu}_{d_Turb_inf}(Re_d, Pr) := \begin{cases} \text{if } Pr > 0.6 \\ \quad \begin{cases} 0 & \text{if } Re_d < 1000 \\ \text{otherwise} \\ \quad \begin{cases} \xi \leftarrow (1.82 \cdot \log(Re_d) - 1.64)^{-2} \\ \frac{\xi}{8} \cdot (Re_d - 1000) \cdot \frac{Pr}{1 + 12.7 \cdot \sqrt{\frac{\xi}{8}} \cdot \left(\frac{2}{Pr^3} - 1\right)} \end{cases} \\ \text{otherwise} \\ \quad \begin{cases} \text{"liquid-metal"} \\ 0.021 \cdot (Re_d \cdot Pr)^{0.8} \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

Interpolation for long tubes:

$$\text{Nu}_{d_inf}(Re_d, Pr) := \begin{cases} \text{Nu}_{d_Lam_inf} \leftarrow 4 \\ \text{Nu}_{d_inf} \leftarrow \left(\text{Nu}_{d_Lam_inf}^4 + \text{Nu}_{d_Turb_inf}(Re_d, Pr)^4 \right)^{0.25} \end{cases}$$

Рис. 11.35. Стабилизированная теплоотдача в длинных трубах

Глобальная интерполяция для теплоотдачи при вынужденной конвекции в трубах:

$$\begin{aligned}
 \overline{\text{Nu}}_d(Re_d, Pr, L_d) &= \\
 &= \left[\overline{\text{Nu}}_{d_beg}(Re_d, Pr, L_d)^4 + \overline{\text{Nu}}_{d_inf}(Re_d, Pr)^4 \right]^{1/4}; \quad (11.83) \\
 Re_d &< 10^6; \quad Pr < 2000; \quad 0 < L_d < \infty
 \end{aligned}$$

иллюстрируется диаграммами на Рис. 11.36, Рис. 11.37, Рис. 11.38, соответственно для трех групп теплоносителей: газов, жидких металлов, вязких жидкостей. В комплектной Mathcad-программе формуле (11.83) предшествуют блоки, представленные на Рис. 11.34, Рис. 11.35.

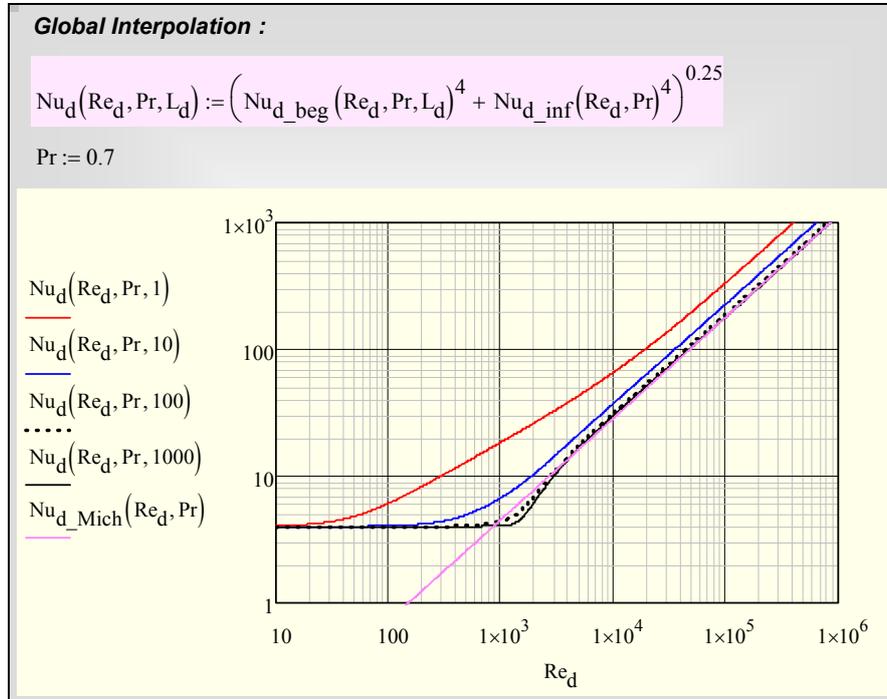


Рис. 11.36. Глобальная аппроксимация: теплоотдача в трубах в зависимости от числа Re ; теплоноситель – воздух ($Pr = 0.7$); варьируемый параметр – длина трубы

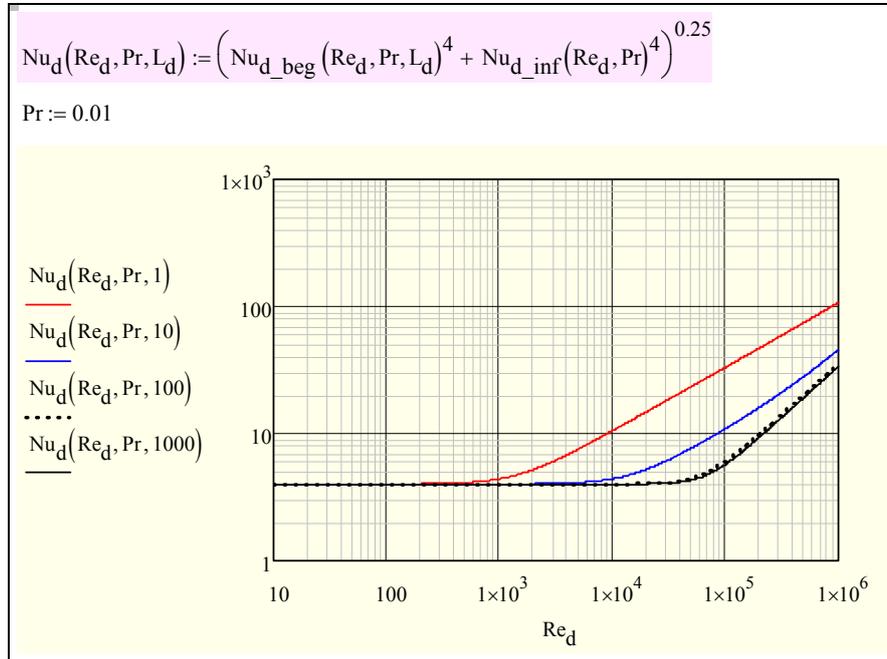


Рис. 11.37. Глобальная аппроксимация: теплоотдача в трубах в зависимости от числа Re; теплоноситель – жидкий металл ($Pr = 0.01$); варьируемый параметр – длина трубы

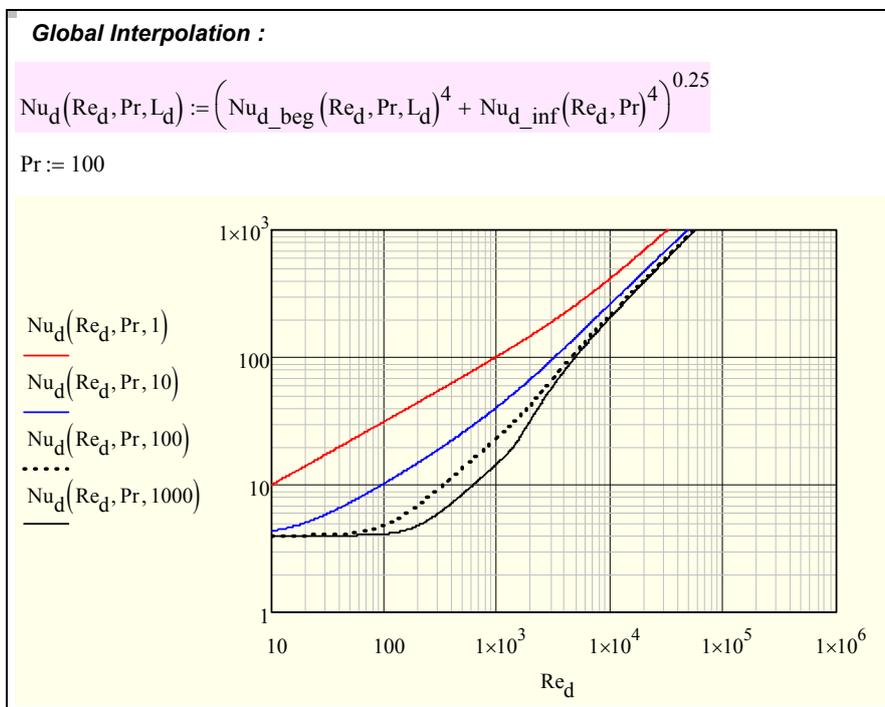


Рис. 11.38. Глобальная аппроксимация: теплоотдача в трубах в зависимости от числа Re; теплоноситель – вязкая жидкость ($Pr = 100$); варьируемый параметр – длина трубы

Диаграммы показывают, как функционирует глобальная аппроксимация в широком интервале чисел Рейнольдса. В левой части рисунков, при малых значениях числа Re фиксируется предел ламинарной стабилизированной теплоотдачи $Nu \approx 4$. При больших значениях числа Re проявляется характерная для турбулентного режима зависимость $Nu \sim Re^{0.8}$ (см. формулу Михеева (11.80)). Переход происходит в области чисел Рейнольдса $10^3 \div 10^4$.

Для теплоотдачи жидких металлов (см. Рис. 11.37) проявляется относительно слабое влияние турбулентности потока, ввиду большой собственной (молекулярной) теплопроводности этого типа теплоносителей.

Для вязких теплоносителей ($Pr \gg 1$) (Рис. 11.38) характерно наличие длинного начального участка, что особенно отчетливо видно на Рис. 11.39, где число Nu представлено как функция длины канала. Для вязких теплоносителей при ламинарном режиме начальный участок становится очень протяженным и достигает тысяч калибров (две нижние кривые на Рис. 11.39). Верхняя кривая соответствует уже турбулентному режиму с коротким начальным участком в несколько десятков калибров.

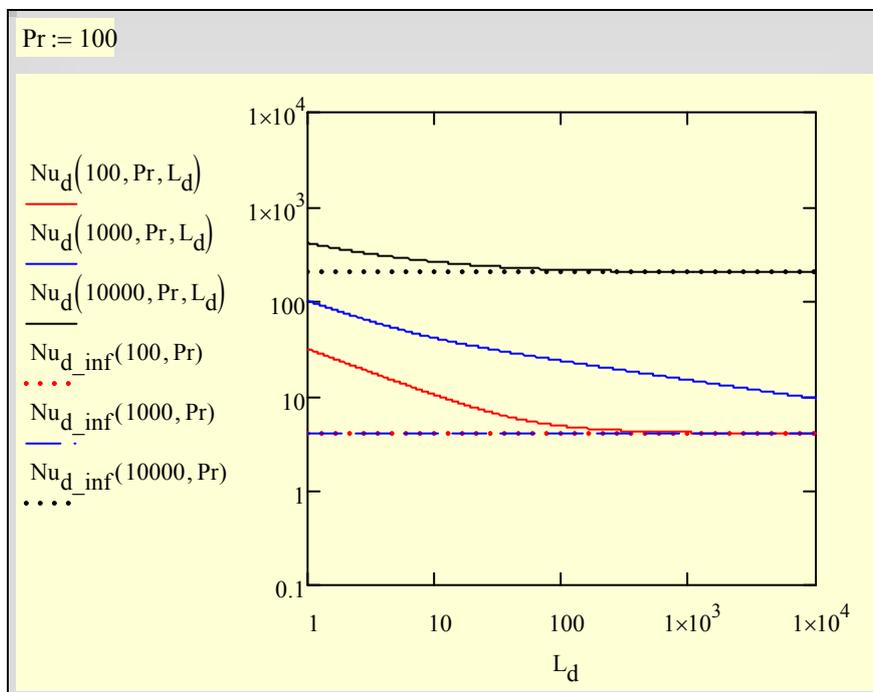


Рис. 11.39. Средняя теплоотдача вязких теплоносителей ($Pr = 1000$) в трубах различной длины

К Mathcad-программе для инженерного расчета теплоотдачи при течении в трубах можно обратиться по ссылке:

[..\Mathcad_HMT\11_Ingenueering\ForcedConv_Tube\!!!Tube_program_mc14_Gniel.xmcdz](#)

Специальные задачи

В инженерной практике приходится рассчитывать теплоотдачу для более сложных геометрических объектов, чем пластины или круглые трубы. В атомных энергетических установках часто применяются кольцевые каналы и продольно обтекаемые пучки труб. Плоские щелевые каналы, прямоугольные каналы с различным соотношением сторон, сплюснутые (эллиптического сечения) трубы и т.п. – таков широкий перечень возможных конфигураций поверхностей теплоотдачи.

При *развитом турбулентном течении* в некруглых каналах удовлетворительно работает простая методика, основанная на применении эквивалентного (гидравлического) диаметра:

$$\begin{aligned} \overline{\text{Nu}}_d &\equiv \frac{\overline{\alpha} d_{eq}}{\lambda_f}; & \text{Re}_d &\equiv \frac{w d_{eq}}{v_f}; \\ d_{eq} &\equiv \frac{4f}{u} \equiv 4 \frac{\text{площадь сечения}}{\text{смоченный периметр}} \end{aligned} \quad (11.84)$$

Для треугольных или многоугольных сечений необходимо вводить дополнительную поправку на вторичную циркуляцию, развивающуюся в углах.

При *ламинарном* течении в каналах сложной формы необходимо численное моделирование, чтобы надежно учесть особенности течения и теплообмена. Целый ряд конфигураций описан в справочной литературе. Ламинарному течению в *микротеплообменниках* посвящена [гл. 25](#) Электронного курса.

Специальной проблемой является *смешанная* конвекция в трубах, когда из-за больших температурных напоров в трубах возникает заметная естественная циркуляция, накладывающаяся на относительно медленное вынужденное основное течение. Приближенную методику расчета методом интерполяции между асимптотами можно построить аналогично тому, как это сделано в вычислительном блоке на Рис. 11.8.

В целом методика интерполяции между асимптотами является эффективным инструментом приближенного моделирования сложных задач теплообмена. Глобальные аппроксимации, пригодные во всей области изменения актуальных параметров, гарантируют от грубых ошибок при моделировании реальных устройств, работающих не только в штатных оптимизированных условиях, но и на переходных и «нерасчетных» – ухудшенных, аварийных или даже грозящих катастрофой режимах.

В настоящее время, в связи с прогрессом вычислительной техники и достижениями численного анализа, расширяются *промышленные* применения прямого численного моделирования сложных реальных процессов и установок. Примеры моделирования термогидродинамических полей при вынужденном ламинарном и турбулентном течении в трубах и каналах представлены на Рис. 11.28—Рис. 11.32.

11.11 Аналогия процессов теплообмена и массообмена

Важным приложением теории массообмена является расчет конденсации пара из парогазовой смеси. Даже небольшие примеси неконденсирующихся газов (воздуха в водяном паре) приводят к заметному снижению скорости конденсации («отравлению» конденсатора).

Рассмотрим потоки массы через границу раздела фаз, на которой происходит конденсация пара из парогазовой смеси. Условие сохранения массы диктует равенство потоков j , кг/м²с, по обе стороны поверхности раздела $y = 0$:

$$j|_{y=0} = j|_{y=+0} \equiv j \quad (11.85)$$

Плотность потока смеси j представляется как сумма потоков компонентов:

$$j = j_v + j_g,$$

где индекс v обозначает пар, а индекс g – газовую (инертную, неконденсирующуюся компоненту).

Для двухфазной системы «вода – парогазовая смесь» граница является *полупроницаемой*: она *проницаема* для пара (при конденсации или испарении) и *непроницаема* для слабо растворимого в воде газа. Следовательно, поток газа равен нулю, а суммарный поток j парогазовой смеси на поверхности раздела есть поток пара:

$$j_g = 0 \Rightarrow j|_{y=+0} \equiv j_v \neq 0, \quad (11.86)$$

Существование макроскопического (гидродинамического) течения в *поперечном* направлении на границе раздела ($j \neq 0$) является важной особенностью массообмена (Рис. 11.40). При конденсации (правый рисунок) поперечная скорость V на стенке – ненулевая: $V = j/\rho$, хотя продольная составляющая U по-прежнему подчиняется условию прилипания и поэтому равна нулю на неподвижной границе. Сопоставление наглядно показывает, как деформируется поле течения под действием массообмена на стенке.

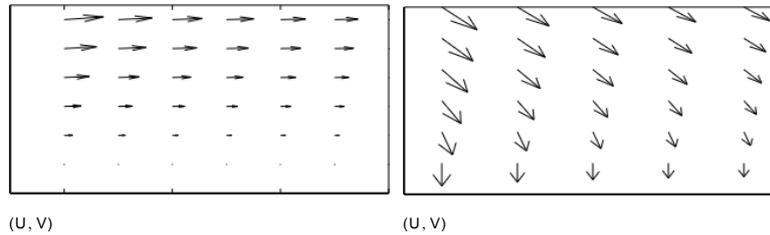


Рис. 11.40. Течение вблизи непроницаемой (слева) и проницаемой (справа) горизонтальной поверхности раздела, совпадающей с нижней кромкой рисунка (по результатам численного решения уравнения Фолкнера–Скэн для течения в пограничном слое).

Плотность потока паровой компоненты на границе j_v записывается как сумма диффузионной и конвективной составляющих:

$$j_v = j_{v,\text{conduct}} + j c_v, \quad (11.87)$$

С учетом (11.86)

$$j = j_v \neq 0,$$

получают важное соотношение между кондуктивным (диффузионным) потоком пара и полным потоком массы через границу раздела:

$$j_{v,conduct} = j \cdot (1 - c_v); \quad j = j_v$$

или

$$j = j_{v,conduct} \frac{1}{(1 - c_v)}; \quad j = j_v. \quad (11.88)$$

Видно, что, вообще говоря, нельзя отождествлять скорость конденсации / испарения $j = j_v$ с диффузионным (кондуктивным) потоком пара $j_{v,conduct}$. Если концентрация пара c_v у поверхности раздела велика (близка к единице), то различие этих потоков может быть очень большим.

Для кондуктивного (диффузионного) потока массы активного компонента (пара) можно записать уравнение массоотдачи (по аналогии с уравнением теплоотдачи):

$$j_{v,conduct} = -\rho D_{eff,vg} \left. \frac{\partial c_v}{\partial y} \right|_{y=0} = \rho \beta (c_{v,s} - c_{v,\infty}), \quad (11.89)$$

где β , м/с – коэффициент массоотдачи, величина, инженерные методы расчета которой рассматриваются в данном разделе; D – коэффициент диффузии парогазовой смеси.

Из (11.88), (11.89) следует выражение для полного потока массы через границу, т.е. для скорости конденсации / испарения:

$$j = \rho \beta \left(\frac{c_{v,s} - c_{v,\infty}}{1 - c_{v,s}} \right) \quad (11.90)$$

или, в безразмерном виде:

$$\frac{j}{\rho u_\infty} = \left(\frac{\rho \beta}{\rho u_\infty} \right) \left(\frac{c_{v,0} - c_{v,\infty}}{1 - c_{v,0}} \right) = St_D b_1; \quad (11.91)$$

$$b_1 \equiv \frac{c_{v,0} - c_{v,\infty}}{1 - c_{v,0}}; \quad St_D \equiv \frac{\beta}{u_\infty} \equiv \frac{Nu_D}{Re Pr_D}$$

где b_1 – параметр проницаемости, St_D – число Стантона диффузионное, безразмерный коэффициент массоотдачи, Nu_D – число Нуссельта диффузионное.

Поскольку предметом анализа сейчас является *массообмен* в парогазовой среде, можно принять заданной концентрацию пара $c_{v,0}$. В реальной постановке эта величина заранее неизвестна, связана с температурой на поверхности раздела и определяется посредством специальной численной процедуры (подробное обсуждение этого вопроса см. в гл. 20 Электронного курса).

Коэффициент массоотдачи β рассчитывается на основе аналогии между процессами теплообмена и массообмена. Иллюстрацией аналогии может служить одинаковость структуры законов переноса массы и энергии:

$$j_{v,\text{conduct}} = -\rho D \frac{\partial c_v}{\partial y} \Leftrightarrow q = -\lambda \frac{\partial t}{\partial y}.$$

Из аналогии математического описания (т.е. дифференциальных уравнений переноса и граничных условий) следует аналогия решений, т.е. расчетных уравнений для коэффициента теплоотдачи и коэффициента массоотдачи. Например, если необходимо рассчитать коэффициент *массоотдачи* при обтекании шахматного пучка труб, то следует воспользоваться соответствующей «тепловой» формулой (см. Рис. 11.27, эмпирическая формула для шахматного пучка), заменив в ней тепловые величины их массообменными аналогами:

$$\begin{aligned} \text{теплоотдача: } \text{Nu} &\equiv \frac{\alpha_{vg} d}{\lambda_{vg}} = 0.4 \text{Re}_d^{0.6} \text{Pr}^{0.36}; \quad \text{Pr} = \frac{\nu}{a} \Rightarrow \\ \text{массоотдача: } \text{Nu}_D &\equiv \frac{\beta d}{D} = 0.4 \text{Re}_d^{0.6} \text{Pr}_D^{0.36}; \quad \text{Pr}_D = \frac{\nu}{D} \end{aligned} \quad (11.92)$$

где Re_d – число Рейнольдса по диаметру обтекаемой трубы как характерному размеру, индекс vg означает парогазовую смесь.

Изложенная элементарная методика расчета массообмена обеспечивает приемлемую точность, если поперечный поток массы на поверхности раздела относительно невелик и еще не вносит заметных искажений в поле течения (Рис. 11.40). В общем случае в формулы вида (11.92) вводят корректирующий фактор как функцию параметра проницаемости b_1 (см. гл. 20 Электронного курса «Тепломассообмен в парогазовом потоке при конденсации и испарении»).

11.12 Методы подбора и размерностей

Подобие

Как видно из предыдущих разделов, в курсе тепломассообмена систематически применяется безразмерная (обобщенная, нормализованная) форма представления определяющих уравнений и расчетных рекомендаций.

Подробный пример нормализации исходного математического описания приведен в гл. 8 Электронного курса («Нестационарная теплопроводность – Пластина – Математическое описание в безразмерной форме»). Напомним, что, применяя заданные в условиях однозначности *масштабы* длины и избыточной температуры, мы привели к безразмерному виду *дифференциальное уравнение теплопроводности и краевые условия* для задачи об охлаждении пластины. В результате было получено следующее

обобщенное (безразмерное) представление для одномерного нестационарного температурного поля пластины:

$$\begin{aligned} \Theta &= \Theta(X, Fo; Bi); \\ 1 \geq \Theta > 0; \quad 0 \leq X \leq 1; \quad Fo \geq 0; \\ 0 < Bi < \infty; \\ \Theta &\equiv \frac{\vartheta(x, \tau)}{\vartheta_0} \equiv \frac{t(x, \tau) - t_f}{t_0 - t_f}; \\ X &\equiv \frac{x}{\delta}; \quad Fo \equiv \frac{a\tau}{\delta^2} \equiv \frac{\tau}{\left(\frac{\delta^2}{a}\right)}; \quad Bi \equiv \frac{\alpha\delta}{\lambda} \equiv \frac{\frac{\delta}{\lambda}}{\frac{1}{\alpha}} \end{aligned} \quad (11.93)$$

Конкретный вид функциональной зависимости $\Theta(X, Fo; Bi)$ может быть найден различными способами. В гл. 8 задача решена классическим *аналитическим* методом Фурье. В гл. 5, 9, 11 рассмотрены применения *численных* методов.

Возможно, мы захотим также провести *прямые измерения* температуры. На практике, однако, эксперименты с *натурным объектом* бывают затруднительны или даже невозможны: достаточно представить себе в качестве объекта исследования массивный раскаленный слиток в металлургическом производстве. Поэтому опыты приходится проводить на *лабораторных моделях*, и в этом случае безразмерное представление (11.93) помогает правильно спланировать эксперимент – поставить его в условиях, *подобных* тем, что имеют место в натуре.

В частности, *условие подобия* для теплоотдачи на поверхности тела задается одинаковостью безразмерного параметра – числа Био – для модели и природы:

$$Bi_{\text{model}} = Bi_{\text{nature}} \Rightarrow \alpha_{\text{model}} = \alpha_{\text{nature}} \frac{\left(\frac{\lambda}{\delta}\right)_{\text{model}}}{\left(\frac{\lambda}{\delta}\right)_{\text{nature}}}.$$

Как видно, это условие диктует соотношение между коэффициентами теплоотдачи для природы и модели.

Непосредственным результатом эксперимента будут размерные значения температуры (в градусах Цельсия °С, Кельвина К, или в другой температурной шкале) в точках с различными значениями координаты (измеренными в м, мм, см, футах и т.д.), в различные моменты времени (сек, мин и т.п.).

Далее необходимо привести опытные данные к *безразмерному виду* (см. (11.93)). Время следует отнести к «внутреннему» масштабу времени (δ^2/a),

координату – к линейному масштабу (полутолщине пластины δ), избыточную по отношению к окружающей среде температуру – к начальной избыточной температуре θ_0 .

После такой обработки первичных данных получится массив безразмерных величин $\Theta_i, X_i, Fo_i, Bi_i$, где i - номер экспериментальной точки. Итоговая таблица уже *не зависит* от того, какой системой единиц пользовался экспериментатор.

На завершающем этапе табличные данные аппроксимируют подходящими формулами и обязательно указывают исследованную область определения функции. Например, результат может выглядеть следующим образом:

$$\begin{aligned}\Theta(X, Fo; Bi) &\cong 1.27 \cdot \cos(1.57X) \cdot \exp(-2.46 \cdot Fo); \\ 0 &\leq X \leq 1; \\ Fo &> 0.3; \\ Bi &> 10\end{aligned}$$

Нетрудно увидеть в этой «эмпирической» формуле полученное ранее аналитическим методом решение для асимптотики больших чисел Фурье и Био (см. (8.48) в гл. 5 Электронного курса).

Итак, исследование включает следующие этапы:

- Составление математического описания объекта, обычно в форме дифференциальных уравнений с краевыми условиями.
- Приведение математического описания к безразмерному виду.
- Нахождение решения аналитическим, численным или экспериментальным методом (в последнем случае осуществляется также планирование эксперимента и приведение опытных данных к безразмерному виду).
- Указание – в безразмерной форме – границ исследованной области переменных и параметров.

Если речь идет об эксперименте, последние два этапа называют *обобщением* опытных данных, имея в виду, что результаты частного эксперимента распространяются на целый круг *подобных* (подчиняющихся условиям подобия) явлений.

Обсуждавшиеся выше методические вопросы исследования теплообмена относятся к специальной дисциплине – *теории подобия и размерностей*. Понятие «подобие» применительно к физическим процессам является обобщением интуитивно ясного *геометрического* подобия. Аналогично измерениям (расстояний, размеров объектов) на карте местности (т.е. на уменьшенной копии Земной поверхности), можно провести измерения полей физических величин (например, температуры) на уменьшенной, лабораторной копии реального процесса или устройства. В обоих случаях потребуется пересчет в соответствии с масштабом. Причем пересчитывать необходимо не только размеры и координаты, но и время, а также

физические поля температуры, скорости, концентрации, плотности теплового потока, и т.д.

Общие правила и масштабы для такого пересчета содержатся в обобщенной (безразмерной) записи искомой функциональной зависимости, такой как $\Theta = \Theta(X, Fo; Bi)$ в нашем примере (11.93). Очевидно, безразмерная температура Θ будет одинаковой (для модели и природы) в *сходственных* точках ($X = idem$), в *сходственные* моменты времени ($Fo = idem$) и при одинаковых значениях безразмерного параметра Bi ($Bi = idem$):

$$\begin{aligned}
 X = idem &\Rightarrow x_{model} = x_{nature} \frac{\delta_{model}}{\delta_{nature}}; \\
 Fo = idem &\Rightarrow \tau_{model} = \tau_{nature} \frac{\left(\frac{\delta^2}{a}\right)_{model}}{\left(\frac{\delta^2}{a}\right)_{nature}}; \\
 Bi = idem &\Rightarrow \alpha_{model} = \alpha_{nature} \frac{\left(\frac{\lambda}{\delta}\right)_{model}}{\left(\frac{\lambda}{\delta}\right)_{nature}}; \\
 &\Downarrow \\
 \Theta = idem &\Rightarrow \vartheta_{model} = \vartheta_{nature} \frac{\vartheta_{0\ model}}{\vartheta_{0\ nature}}
 \end{aligned}
 \tag{11.94}$$

В целом, избежать возможных ошибок или нечетких толкований подобия можно, приняв следующее условие: подобными являются процессы, для которых *идентична безразмерная формулировка*, включающая

- определяющие дифференциальные уравнения в безразмерном виде,
- краевые условия в безразмерной форме и
- значения безразмерных независимых переменных и безразмерных параметров.

Анализ размерностей

Оперативный способ получения безразмерных (обобщенных) формулировок предоставляет *анализ размерностей*. Продемонстрируем соответствующую технику на примере теплоотдачи при вынужденной конвекции.

Пусть при предварительном анализе для среднего коэффициента теплоотдачи α сформулирован следующий список определяющих величин:

$$\alpha = \alpha(w, l, \rho, c_p, \lambda, \mu), \quad (11.95)$$

включающий скорость набегающего потока w , протяженность тела по ходу потока l , плотность ρ , теплоемкость c_p , теплопроводность λ и динамическую вязкость теплоносителя μ . Лучший способ составить такой список – это выписать систему дифференциальных уравнений конвективного теплообмена с соответствующими краевыми условиями, однако указанный перечень можно получить и из общих формулировок физических законов (например, коэффициент теплопроводности λ фигурирует в законе теплопроводности Фурье) или даже на основе физической интуиции.

Список (11.95) содержит всего $n+1 = 7$ размерных величин: $n = 6$ определяющих параметров и одну определяемую величину (α).

Анализ размерностей позволяет представить это соотношение в обобщенном, безразмерном виде, существенно сократив при этом число параметров (до $n+1 = 3$):

$$\begin{aligned} St &= St(Re, Pr); \\ St &\equiv \frac{\alpha}{\rho c_p w} \equiv \frac{Nu}{Re Pr}; \quad Re \equiv \frac{wl}{\nu}; \quad Pr \equiv \frac{\nu}{a} \equiv \frac{\mu c_p}{\lambda}; \quad \nu = \frac{\mu}{\rho} \end{aligned} \quad (11.96)$$

Покажем, как приходят к сокращенной формулировке (11.96), применяя основные положения теории размерностей.

Первичными (основными) называют единицы измерения, представляющие собой некоторые хранимые эталоны. В СИ это килограмм (кг), метр (м), секунда (с), градус (К). Масса, длина, время, температура измеряются непосредственным сравнением этих величин с эталонами или их дубликатами. Число основных единиц измерения обозначим через k_0 .

Вторичными (производными) называют единицы измерения, получаемые из первичных на основе физических законов. Например, $1 \text{ Н} = (1 \text{ кг}) \cdot (1 \text{ м/с}^2)$, т.к. «сила = масса · ускорение».

Формулой размерности называют степенной одночлен, выражающий производные единицы через основные. Например, размерность силы:

$$[F] = k \varepsilon^{N_m} M^{N_l} c^{N_t}; \quad N_m = 1, \quad N_l = 1, \quad N_t = -2$$

В списке (11.95) из n определяющих параметров могут быть выделены k величин с *независимыми размерностями*. По определению, система таких k величин обладает следующими свойствами:

- Ни одна из k величин не может быть получена в виде степенного одночлена из размерностей других ($k - 1$) величин этой группы.
- Напротив, размерности всех остальных ($n + 1 - k$) величин выражаются через k независимых размерностей.
- Всегда $k \leq k_0$, где k_0 – число основных единиц измерения.

Выбранные таким образом k величин принимают в качестве основных единиц измерения некоторой новой, специальной системы единиц, удобной

для данной конкретной задачи. В этой новой системе k величин примут численные значения, равные единице, поскольку они сами являются эталонами. Остальные $(n + 1 - k)$ величин образуют безразмерные комплексы, в соответствии с формулами размерности. Следовательно, функциональная связь между $(n + 1)$ размерными величинами будет представлена соотношением между $(n + 1 - k)$ безразмерными комплексами (π - теорема).

Запишем алгоритм практической работы методом анализа размерностей:

1. составить физически обоснованный список определяющих параметров, такой как (11.95)
2. Выбрать систему из k_0 основных единиц измерения (например, СИ, $k_0 = 4$)
3. Выбрать любой из n определяющих параметров как первую из величин с независимыми размерностями
4. Повторять, пока не будут просмотрены все n определяющих параметров и не выделены k величин с независимыми размерностями, следующие действия:
попытаться выразить размерность следующего определяющего параметра через уже отобранные величины с независимыми размерностями;
если это удастся сделать, запомнить полученное выражение;
иначе отнести параметр к списку величин с независимыми размерностями.
5. Выразить размерность искомой величины (α в нашем примере) через k независимых размерностей
6. Перейти к новой системе измерения, основными единицами которой служат k величин с независимыми размерностями
7. Проверить число полученных комплексов. Оно должно быть равно $(n + 1 - k)$.

Проделаем эти операции с (11.95):

1.

$$\alpha = \alpha(w, l, \rho, c_p, \lambda, \mu); \quad n = 6$$

2.

$$\text{СИ: кг, м, с, К; } k_0 = 4$$

3.

$$l, m - \text{ первая величина с независимой размерностью; } \quad k = 1$$

4.

$$\rho, \text{ кг/м}^3; [\rho] \text{ не может быть выражена через } [l], \quad k = 2$$

т.е. (l, ρ) – величины с независимыми размерностями;

$w, \text{ м/с}; [w]$ не может быть выражена через $[l], [\rho]$,
т.е. (l, ρ, w) – величины с независимыми размерностями; $k = 3$

$c_p, \text{ Дж/(кг К)} \equiv (\text{м}^2/\text{с}^2)/\text{К}; [c_p]$ не может быть выражена через
размерности $[l], [\rho], [w]$, т.е. (l, ρ, w, c_p) – величины с
независимыми размерностями; $k = 4$

$\lambda, \text{ Дж/(с м К)};$ $k = 4$

Формула размерности: $[\lambda] = [c_p][\rho][w][l];$

$\mu, (\text{кг/м}^3)(\text{м}^2/\text{с});$ $k = 4$

Формула размерности: $[\mu] = [\rho][w][l];$

5.

$\alpha, \text{ Дж/(с м}^2 \text{ К)};$

Формула размерности: $[\alpha] = [c_p][\rho][w]$

6.

$$\frac{\alpha}{\rho c_p w} = f\left(1, 1, 1, 1, \frac{\lambda}{\rho c_p w l}, \frac{\mu}{\rho w l}\right);$$

$$\text{St} \equiv \frac{\alpha}{\rho c_p w} \equiv \frac{\text{Nu}}{\text{Re Pr}}; \quad \text{Re} \equiv \frac{w l}{\nu}; \quad \text{Pr} \equiv \frac{\nu}{a} \equiv \frac{\mu c_p}{\lambda}; \quad \nu = \frac{\mu}{\rho}; \quad (11.97)$$

$$\Downarrow$$

$$\text{St} = \text{St}(\text{Re}, \text{Pr});$$

$$\text{Nu} = \text{Nu}(\text{Re}, \text{Pr})$$

7. $(n + 1 - k) = 6 + 1 - 4 = 3$

Работа методом анализа размерностей завершена. Действительно, удалось сократить список определяющих параметров с исходного значения $n = 6$ до 2, т.е. на число $k = 4$ величин с независимыми размерностями. В нашем примере $k = k_0$, где $k_0 = 4$ – число основных единиц измерения (вообще говоря, $k \leq k_0$).

Это замечательный результат, позволяющий существенно упростить поиск конкретного вида функциональной зависимости. Метод размерностей, как и метод оценки порядка величин (см. п. 11.2), эффективно применяется при предварительном анализе сложных проблем тепломассообмена.