

Глава 17. Элементы термогидродинамики двухфазных сред

17.1. Фазовые равновесия

Испарение и конденсация, плавление твердых тел и отвердевание расплавов — процессы теплообмена, отличительной чертой которых является выделение (или поглощение) скрытой теплоты фазового перехода на поверхности раздела. Теплота отводится от поверхности или подводится к ней через контактирующие фазы. Расчет интенсивности этих процессов и составляет предмет тепломассообмена при фазовых превращениях.

Поверхность раздела фаз — это поверхность разрыва, на которой скачком меняются свойства вещества, такие как плотность, теплопроводность, вязкость. Два свойства непосредственно связаны с фазовой границей, это теплота фазового превращения r (разность энтальпий на линии насыщения, Дж/кг) и коэффициент поверхностного натяжения σ (избыточная поверхностная энергия, Дж/м²).

Приведем краткие сведения из термодинамического анализа равновесия фаз. Начнем с демонстрации того, как основные соотношения термодинамики приспособляются к специальному случаю — системам с *переменной массой*, когда жидкость и пар *обмениваются массой* при испарении и конденсации. Выражение *первого закона* термодинамики для *единичной массы* записывается как обычно,

$$du = dQ - p \cdot dv, \quad (17.1)$$

и означает, что изменение энергии фиксированной массы происходит вследствие подвода теплоты и совершения внешней работы. Сделаем подстановку согласно второму закону термодинамики $dQ = T \cdot ds$, где s — удельная энтропия, и умножим уравнение (17.1) для единичной массы на произвольное значение массы m :

$$m du = T \cdot m ds - p \cdot m dv. \quad (17.2)$$

Дальнейшие преобразования имеют целью учесть *переменность* массы. Выпишем тождества, следующие из правила дифференцирования произведения и очевидных равенств $mu = U$, $ms = S$, $mv = V$:

$$\begin{aligned} m du &= d(mu) - u dm = dU - u dm \\ m ds &= d(ms) - s dm = dS - s dm \\ m dv &= d(mv) - v dm = dV - v dm \end{aligned} \quad (17.3)$$

После подстановки (17.3) в (17.2) и перегруппировки получим:

$$dU = T \cdot dS - p \cdot dV + (u - Ts + pv) dm, \quad (17.4)$$

где

$$u - Ts + pv = \mu(p, T) \quad (17.5)$$

– химический потенциал, или потенциал Гиббса в расчете на единицу массы:

$$G = U + pV - TS;$$

$$\frac{G(p, T, m)}{m} = \mu(p, T) = \left(\frac{U}{m}\right) + p\left(\frac{V}{m}\right) - T\left(\frac{S}{m}\right) = u + pv - Ts \quad (17.6)$$

Термодинамический потенциал Гиббса, как мы увидим далее, играет главную роль при анализе фазовых равновесий.

Уравнение (17.4), переписанное в виде

$$TdS = dU + p dV - \mu \cdot dm, \quad (17.7)$$

называется уравнением Гиббса для систем с переменной массой.

Для полного дифференциала потенциала Гиббса dG , как следует из (17.6) и (17.7), имеем:

$$dG = dU + pdV + Vdp - TdS - SdT =$$

$$= dU + pdV + Vdp - dU - pdV + \mu dm - SdT = Vdp - SdT + \mu dm; , \quad (17.8)$$

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial p}\right)_{T,m} dp + \left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_{p,m} dT + \left(\frac{\partial G}{\partial m}\right)_{p,T} dm$$

откуда :

$$\left(\frac{\partial G}{\partial p}\right)_{T,m} = V; \quad \left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_{p,m} = -S; \quad \left(\frac{\partial G}{\partial m}\right)_{p,T} = \mu. \quad (17.9)$$

Учитывая, что $G = \mu m$, получим из (17.9)

$$\left(\frac{\partial \mu}{\partial p}\right)_T = v; \quad \left(\frac{\partial \mu}{\partial T}\right)_p = -s;$$

$$d\mu(p, T) = \left(\frac{\partial \mu}{\partial p}\right)_T dp + \left(\frac{\partial \mu}{\partial T}\right)_p dT = v dp + (-s) dT \quad (17.10)$$

Соотношения (17.10) важны для последующих вычислений: они позволяют выразить изменения химического потенциала через непосредственно измеряемые величины, такие как давление, температура, удельный объем.

Условия равновесия, строго выводимые в термодинамике, кроме почти очевидных требований одинаковости давления и температуры в фазах,

например, в жидкости (l) и паре (v), включают также равенство химических потенциалов:

$$p_l = p_v; \quad T_l = T_v; \quad \mu_l = \mu_v \quad (17.11)$$

17.2. Уравнение кривой насыщения

Из условия равновесия фаз выводится уравнение для кривой насыщения «жидкость – пар» (уравнение Клапейрона – Клаузиуса). Действительно, равенство химических потенциалов выражает в неявной форме связь давления и температуры, которую и называют кривой насыщения:

$$\mu_l(p, T) = \mu_v(p, T) \Rightarrow p = p(T) \quad (17.12)$$

Равенство химических потенциалов на кривой насыщения означает, что и их дифференциалы (приращения вдоль кривой насыщения) должны быть равны. С учетом (17.10) получим:

$$d\mu_l = d\mu_v \Rightarrow v_l dp + (-s_l) dT = v_v dp + (-s_v) dT, \quad (17.13)$$

или

$$(s_v - s_l) dT = (v_v - v_l) dp \Rightarrow \frac{dp}{dT} = \frac{s_v - s_l}{v_v - v_l}. \quad (17.14)$$

Изменение энтропии при фазовом переходе связано с подводом теплоты фазового перехода r :

$$\Delta s = \frac{r}{T}. \quad (17.15)$$

Следовательно:

$$\frac{dp}{dT} = \frac{r}{T(v_v - v_l)}. \quad (17.16)$$

Это точное термодинамическое соотношение для кривой насыщения. В нашем курсе мы записываем его в следующем эквивалентном виде:

$$\frac{dP_s}{dT_s} = \frac{r}{T_s} \frac{\rho_l \rho_v}{\rho_l - \rho_v}. \quad (17.17)$$

Для давлений, далеких от критического, справедливо $\rho_l \gg \rho_v$, поэтому

$$\frac{dP_s}{dT_s} \approx \frac{r \rho_v}{T_s}. \quad (17.18)$$

Чтобы перейти к явному выражению $p_s(T_s)$, интегрируют дифференциальное уравнение (17.17) или (17.18). При этом необходимо знать, как изменяются вдоль кривой насыщения теплота парообразования и плотности фаз. Для невысоких давлений можно записать

$$r \approx const; \quad \rho_V = \frac{p_s}{RT_s} \Rightarrow \frac{dp_s}{dT_s} \approx \left(\frac{r}{R}\right) \frac{p_s}{T_s^2}. \quad (17.19)$$

Интегрируя (17.19) с начальным условием $p_{s0}(T_{s0})$, получают

$$\ln \frac{p_s}{p_{s0}} \approx \frac{r}{R} \left(\frac{1}{T_{s0}} - \frac{1}{T_s} \right), \quad (17.20)$$

или

$$p_s \approx c \cdot e^{-\frac{r}{RT_s}}; \quad c = p_{s0} \cdot e^{\frac{r}{RT_{s0}}}. \quad (17.21)$$

В расчетной практике уравнение вида (17.20) применяется для кусочной аппроксимации кривой насыщения, обычно заданной в табличной форме (например, в таблицах водяного пара).

17.3. Поверхностное натяжение и фазовое равновесие

Рассмотрим теперь равновесие фаз, разделенных *искривленной* поверхностью. Примерами служат сферическая капля жидкости в объеме пара или сферический пузырек пара в объеме жидкости. В качестве исходного положения запишем уравнение Лапласа как условие механического равновесия:

$$\Delta p_\sigma = p_2 - p_1 = \frac{2\sigma}{R}. \quad (17.22)$$

Будем считать, что центр кривизны находится в фазе 2, и поэтому давление в фазе 2 больше давления в фазе 1 на величину *лапласовского* давления $\Delta p_\sigma > 0$. Температура T в системе постоянна; соответствующее давление на кривой насыщения (для *плоской* поверхности раздела) обозначим как p_0 .

Из качественного анализа проблемы ясно, что давление насыщенного пара над *искривленной* поверхностью жидкости должно измениться по сравнению с p_0 – увеличиться для выпуклой и уменьшиться для вогнутой поверхности. Это изменение обозначим через Δp_s .

Измененное по сравнению с плоской поверхностью раздела состояние будет характеризоваться новыми давлениями в фазах:

$$\begin{aligned} p_1 &= p_0 + \Delta p_1; & p_2 &= p_0 + \Delta p_2; \\ p_2 - p_1 &= \Delta p_\sigma = \Delta p_2 - \Delta p_1 \end{aligned} \quad (17.23)$$

Условие равенства химических потенциалов (17.11) теперь запишется следующим образом:

$$\mu_1(p_0 + \Delta p_1, T) = \mu_2(p_0 + \Delta p_2, T) \quad (17.24)$$

Полагая температуру фиксированной, а изменения давления небольшими по сравнению с исходным значением p_0 , получим связь между этими изменениями, используя (17.10) как разложение:

$$\begin{aligned} \mu_1(p_0, T) + v_1 \cdot \Delta p_1 &\approx \mu_2(p_0, T) + v_2 \cdot \Delta p_2 \Rightarrow \\ v_1 \cdot \Delta p_1 &\approx v_2 \cdot \Delta p_2 \end{aligned} \quad (17.25)$$

Химические потенциалы в левой и правой части сокращаются: они равны в силу условия равновесия над плоской поверхностью раздела фаз. Знак приближенного равенства применяется потому, что мы считаем удельные объемы примерно постоянными при малых, но конечных изменениях давления. Для несжимаемой жидкости это очень хорошее приближение. Для газовой фазы (пара) ошибка может быть заметной, если изменения давления велики; в случае идеального газа вычисления можно уточнить, применяя уравнение состояния идеального газа и интегрируя приращения потенциала вдоль изотермы T .

Напомним, что нашей целью является расчет изменения давления в насыщенном паре Δp_s . Если фаза 2 – жидкость, т.е. это капля жидкости в объеме пара, то

$$\begin{aligned} p_1 &= p_0 + \Delta p_s; & p_2 &= p_0 + \Delta p_s + \Delta p_\sigma; \\ \Delta p_1 &= \Delta p_s; & \Delta p_2 &= \Delta p_s + \Delta p_\sigma \end{aligned}, \quad (17.26)$$

см. Рис. 17.1 .

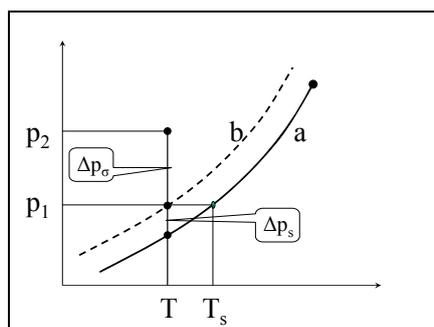


Рис. 17.1. Равновесие «капля – пар». А – кривая насыщения над плоской поверхностью раздела, b – кривая насыщения над выпуклой поверхностью раздела

После подстановки (17.26) в (17.25) и замены числовых индексов на мнемонические получим:

$$\Delta p_s = \frac{v_l}{v_v - v_l} \cdot \Delta p_\sigma \Rightarrow \Delta p_s = \frac{\frac{1}{\rho_l}}{\frac{1}{\rho_v} - \frac{1}{\rho_l}} \cdot \Delta p_\sigma \Rightarrow$$

$$\Delta p_s = \frac{\rho_v}{\rho_l - \rho_v} \cdot \Delta p_\sigma \quad (17.27)$$

Итак, для каплей жидкости $\Delta p_s > 0$ (Δp_σ положительно по соглашению). Следовательно, давление пара над каплями больше чем над плоской поверхностью раздела. Именно поэтому становится постепенно видимым туман: мельчайшие капли испаряются, а крупные растут за их счет. На Рис. 17.1 показано, что состояние пара (p_1, T) является переохлажденным на величину $T_s - T$.

Если фаза 2 – пар, т.е. это пузырек пара в объеме жидкости, то

$$p_2 = p_0 + \Delta p_s; \quad p_1 = p_2 - \Delta p_\sigma = p_0 + \Delta p_s - \Delta p_\sigma;$$

$$\Delta p_2 = \Delta p_s; \quad \Delta p_1 = \Delta p_s - \Delta p_\sigma \quad (17.28)$$

см. Рис. 17.2.

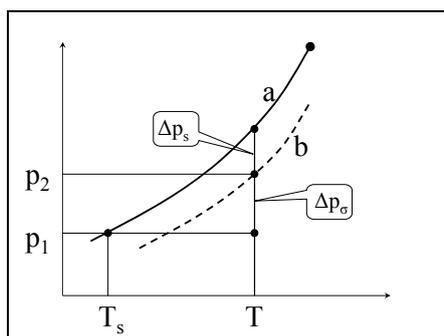


Рис. 17.2. Равновесие «пузырек пара – жидкость»; а – кривая насыщения над плоской поверхностью раздела, б – кривая насыщения над выпуклой поверхностью раздела

После подстановки (17.28) в (17.25) и замены числовых индексов на мнемонические получим:

$$v_l \cdot (\Delta p_s - \Delta p_\sigma) = v_v \cdot \Delta p_s \Rightarrow$$

$$\Delta p_s = -\frac{\rho_v}{\rho_l - \rho_v} \Delta p_\sigma \quad (17.29)$$

Итак, для вогнутой поверхности пузырьков пара $\Delta p_s < 0$, т.е. давление пара над вогнутой поверхностью жидкости меньше чем над плоской

поверхностью раздела. На Рис. 17.2 показано, что состояние жидкости (p_1, T) является перегретым на величину $T - T_s$.

Формулы (17.27), (17.29) показывают, что изменение давления насыщенных паров над искривленной поверхностью мало по сравнению с лапласовским давлением, пока плотность пара мала по сравнению с плотностью жидкости, т.е. при не слишком высоких давлениях.

17.4. Поверхностное натяжение и образование зародышей новой фазы

Энергетический барьер. Критический радиус зародыша новой фазы

Вычислим изменение потенциала Гиббса при образовании в большом объеме исходной фазы (1) сферического зародыша (ядра) новой фазы (2) радиусом R :

$$\begin{aligned} G &= \mu_1 m_1 + \mu_2 m_2 + 4\pi R^2 \sigma; & G_0 &= \mu_1 (m_1 + m_2) \\ \Delta G &= G - G_0 = -(\mu_1 - \mu_2) m_2 + 4\pi R^2 \sigma \end{aligned}, \quad (17.30)$$

где m_1 и m_2 – массы исходной (1) и новой (2) фаз; $\mu_1(p_1, T)$, $\mu_2(p_1, T)$ – химические потенциалы объемных фаз, т.е. без учета поверхностных эффектов; $4\pi R^2 \sigma$ – избыточная поверхностная энергия, связанная с образованием поверхности раздела фаз при возникновении зародыша новой фазы. Подчеркнем, что поверхностное натяжение σ , Дж/м², интерпретируется как избыточная (по сравнению с объемной фазой) поверхностная энергия, отнесенная к единице поверхности раздела.

Равновесие в системе при

$$m_1 + m_2 = \text{const}, \quad p = \text{const}, \quad T = \text{const}$$

реализуется посредством обмена веществом между фазами $m_1 \leftrightarrow m_2$, таким, что вариация G (или ΔG) будет нулевой в окрестности равновесной точки.

Учитывая

$$m_2 = \frac{4}{3} \pi R^3 \frac{1}{v_2}, \quad (17.31)$$

получим ΔG как функцию радиуса ядра:

$$\Delta G = G - G_0 = -\frac{(\mu_1 - \mu_2)}{v_2} \frac{4}{3} \pi R^3 + 4\pi R^2 \sigma. \quad (17.32)$$

Условие равновесия можно представить теперь как

$$\left. \frac{\partial(\Delta G)}{\partial R} \right|_{p,T=const} = 0, \quad (17.33)$$

что дает выражение для критического (равновесного) радиуса:

$$-\frac{(\mu_1 - \mu_2)}{v_2} 4\pi R_{cr}^2 + 8\pi R_{cr} \sigma = 0 \Rightarrow R_{cr} = \frac{2\sigma v_2}{\mu_1 - \mu_2}. \quad (17.34)$$

Ясно, что должно выполняться условие $\mu_1(p,T) > \mu_2(p,T)$. Это неравенство определяет явление *пересыщения* исходной фазы.

Уравнение (17.32) для потенциала переписывается с учетом (17.34) следующим образом:

$$\Delta G = -\frac{2\sigma}{R_{cr}} \frac{4}{3} \pi R^3 + 4\pi R^2 \sigma = 4\pi \sigma R_{cr}^2 \left(-\frac{2}{3} \frac{R^3}{R_{cr}^3} + \frac{R^2}{R_{cr}^2} \right) \quad (17.35)$$

Зависимость $\Delta G(R)$ имеет максимум при $R = R_{cr}$; при малых $R < R_{cr}$ преобладает второе (положительное) слагаемое в скобках, а при больших $R > R_{cr}$ – первое, отрицательное слагаемое (Рис. 17.3).

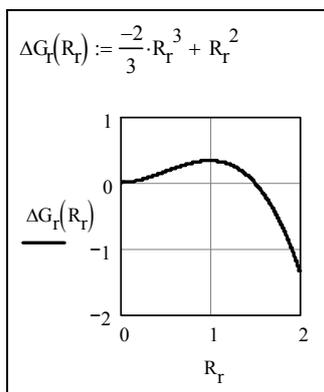


Рис. 17.3. Энергетический барьер при образовании новой фазы (безразмерное представление)

Максимальное значение ΔG ,

$$\Delta G_{\max} = \frac{4}{3} \pi \sigma R_{cr}^2, \quad (17.36)$$

представляет собой работу, которая должна быть затрачена на образование равновесного зародыша R_{cr} , или потенциальный барьер, который должен

быть преодолен при флуктуационном процессе возникновения зародышей новой фазы.

Состояние системы «исходная фаза + зародыш R_{cr} » является *неустойчивым* равновесием (*метастабильным* состоянием). Устойчивым было бы состояние с минимумом ΔG , а не с максимумом, как на Рис. 17.3. Поскольку существует вероятность преодолеть потенциальный барьер, то с некоторой частотой будут возникать образования (ядра) новой фазы с размерами $R > R_{cr}$. Их дальнейший рост будет уже связан с энергетически выгодным *уменьшением* потенциала Гиббса (кривая справа от максимума на Рис. 17.3). По такому сценарию начинается фазовый переход в объеме исходной метастабильной фазы.

Частота нуклеации

Вероятность преодоления энергетического барьера оценивается Больцмановским экспоненциальным множителем:

$$\exp\left(-\frac{\Delta G_{\max}}{kT}\right) = \exp\left(-\frac{4\pi\sigma R_{cr}^2}{3kT}\right), \quad (17.37)$$

где kT – энергия теплового движения, k – постоянная Больцмана. Частота нуклеации J , $(\text{м}^3\text{с})^{-1}$, т.е. частота (1/с) образования зародышей новой фазы в единице объема (м^3), определяется уравнением Фольмера (M. Volmer):

$$J = N_1 \sqrt{\frac{2\sigma}{\pi t}} \exp\left(-\frac{4\pi\sigma R_{cr}^2}{3kT}\right), \quad (17.38)$$

где N_1 – число молекул исходной фазы в единице объема, t – масса одной молекулы.

Применение этой формулы к кипению воды при атмосферном давлении дало парадоксальный результат. Оказалось, что для тех умеренных перегревов, которые имеют место на практике (примерно 10°C) и при которых мы наблюдаем развитое кипение, формула дает ничтожно малые значения скорости нуклеации, такие, что никакого образования пузырьков пара мы не должны были бы наблюдать. Другими словами, теория нуклеации Фольмера находится в противоречии с опытом.

Разрешение этого парадокса было найдено в том, что в действительности образование новой фазы происходит на различных включениях, загрязнениях, пылинках, коллоидных частицах, микронеровностях поверхности и т.п. – на готовых центрах конденсации или парообразования. Например, при кипении на «приработанных» поверхностях центрами служат микроуглубления с размерами, не меньшими критического радиуса R_{cr} (17.34).

Значительные перегревы наблюдаются только для тщательно очищенных сред, и в таких условиях получается удовлетворительное согласование с

теорией гомогенной нуклеации Фольмера (17.38). Для воды при атмосферном давлении и при температуре перегретой жидкости 302°C получается частота нуклеации $10^6 (\text{м}^3\text{с})^{-1}$, а при температуре 304°C – $10^{12} (\text{м}^3\text{с})^{-1}$. Таким образом, в очень узком интервале температур частота достигает значений, соответствующих практически мгновенному вскипанию. Эти значения, $302^{\circ}\text{C} \div 304^{\circ}\text{C}$, принимают за предельную возможную температуру перегрева жидкости.

Формулы для критического радиуса

Ранее была получена следующая формула (см. (17.34)) для критического радиуса:

$$R_{cr} = \frac{2\sigma v_2}{\mu_1(p_1, T) - \mu_2(p_1, T)} \quad (17.39)$$

Разность химических потенциалов в знаменателе должна быть положительной, $\mu_1(p, T) - \mu_2(p, T) > 0$, что означает условие пересыщения исходной фазы.

Мы намереваемся записать эту формулу через непосредственно задаваемые величины, например, переохлаждение (или перегрев). Положительная разность химических потенциалов обеспечивается, если система находится в пересыщенном состоянии и точка (p_1, T) расположена слева (или справа) от кривой насыщения (Рис. 17.4).

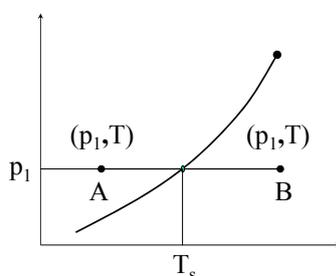


Рис. 17.4. Капля жидкости в переохлажденном паре (А) и пузырек пара в перегретой жидкости (В)

Смещаясь от кривой насыщения по изобаре $p_1 = \text{const}$ на величину $\Delta T = T - T_s$ и используя (17.10) как разложение (с некоторой допустимой погрешностью), получим:

$$\begin{aligned}
 & \mu_1(p_1, T) - \mu_2(p_2, T) = \\
 & = \mu_1(p_1, T_s + \Delta T) - \mu_2(p_1, T_s + \Delta T) \approx \\
 & \left[\mu_1(p_1, T_s) - \mu_2(p_1, T_s) \right] - s_1(\Delta T) + s_2(\Delta T) = \\
 & = (s_2 - s_1)\Delta T
 \end{aligned}
 \tag{17.40}$$

Разность химических потенциалов в квадратных скобках равна нулю – в силу условия фазового равновесия для плоской поверхности раздела. Величины s_1 и s_2 – это значения удельной энтропии исходной и новой фаз на линии насыщения. Изменение энтропии при фазовом переходе связано с подводом теплоты фазового перехода r при постоянном давлении:

$$\begin{aligned}
 Tds &= dh - v dp \xrightarrow{p, T = \text{const}} T\Delta s = \Delta h \\
 \Delta s &= \frac{\Delta h}{T} = \frac{r}{T}
 \end{aligned}
 \tag{17.41}$$

Следует иметь в виду согласование по знаку величин ΔT и Δs . Если считать r всегда положительной величиной, то и под ΔT нужно понимать $\Delta T = |T - T_s|$

Таким образом, разность химических потенциалов в (17.40) выражается через переохлаждение $\Delta T = T_s - T$ или перегрев $\Delta T = T - T_s$ исходной фазы:

$$\mu_1(p_1, T) - \mu_2(p_1, T) \approx \frac{r \cdot \Delta T}{T_s}
 \tag{17.42}$$

Подстановка (17.42) в (17.39) приводит к окончательному результату для критического размера зародыша новой фазы:

$$R_{cr} = \frac{2\sigma T_s}{r\rho_2\Delta T}
 \tag{17.43}$$

Запишем эту формулу для двух важных случаев – конденсации и кипения.

Если 1 – переохлажденный пар, 2 – жидкость, то получаем критический размер зародышевой капли при переохлаждении $\Delta T = T_s - T$:

$$R_{cr} = \frac{2\sigma T_s}{r\rho_l\Delta T}
 \tag{17.44}$$

Если 1 – перегретая жидкость, 2 – пар, то получаем критический радиус зародышевого пузырька при перегреве $\Delta T = T - T_s$:

$$R_{cr} = \frac{2\sigma T_s}{r\rho_v \Delta T} \quad (17.45)$$

Формулы (17.44), (17.45) отличаются значениями плотности новой фазы в делителе: для капли это плотность жидкости, а для пузырька – плотность пара. Поэтому критический радиус пузырька будет много большим, чем критический радиус капли при одинаковых пересыщениях (Рис. 17.5).

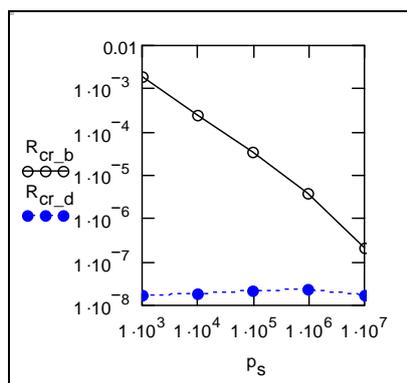


Рис. 17.5. Критический радиус пузырька пара (R_{cr_b} , м) и капли жидкости (R_{cr_d} , м) в зависимости от давления p_s , Па (вода, $\Delta T = 1$ К)

При сопоставлении критического радиуса с молекулярными размерами (ангстремы, 10^{-10} м), видно, что ядро новой фазы может быть скоплением относительно небольшого числа молекул. Для столь малых объектов рассмотренная теория является весьма приближенной.

17.5. Газокинетическое (фазовое) сопротивление

Равенство температур в контактирующих фазах является одним из условий термодинамического равновесия. Это равновесие имеет динамический характер. Основываясь на газокинетических представлениях, мы полагаем, что количество испаряющихся молекул жидкости равно количеству конденсирующихся молекул пара, и поэтому никакого результирующего испарения или никакой результирующей конденсации на поверхности раздела не происходит.

Необходимо нарушить это динамическое равновесие, чтобы осуществить, например, конденсацию отработавшего пара, поступающего из турбины в конденсатор энергетической установки. Почти очевидным решением является понижение каким-либо способом температуры жидкости до $T_l < T_s$. Тогда скорость испарения снизится и возникнет результирующий конденсирующийся поток вещества. Эта идея реализуется в теории конденсации Герца–Кнудсена (Н. Hertz, М. Knudsen).

Вычислим отдельно потоки конденсирующегося j_c , кг/(м²с) и испаряющегося j_v , кг/(м²с) вещества. Пусть w_T – скорость теплового движения молекул, определяемая температурой газа. Вероятность движения молекул в заданном направлении – к поверхности раздела – составляет 1/6 (всех возможностей шесть: три координатных направления и в каждом из них два противоположных возможных направления). Тогда поток поступающих молекул

$$j_{cond} = \beta \frac{1}{6} \rho_v \cdot w_T(T_s) = \beta \frac{1}{6} \frac{p_s(T_s)}{RT_s} \cdot w_T(T_s) \quad (17.46)$$

где β – коэффициент конденсации, доля действительно конденсирующихся молекул (остальные молекулы отражаются).

Явную формулу для скорости теплового движения получают из выражения для энергии молекул – шариков массой m :

$$\frac{m w_T^2}{2} = \frac{3}{2} kT \Rightarrow w = \sqrt{3RT} \quad (17.47)$$

где R – газовая постоянная. Подставляя (17.48) в (17.47), получаем:

$$j_{cond} = \beta \frac{p_s(T_s)}{\sqrt{12RT_s}} \quad (17.48)$$

Более полные вычисления, с учетом максвелловского распределения, приводят к такому же по структуре результату с измененной константой:

$$j_{cond} = \beta \frac{p_s(T_s)}{\sqrt{2\pi RT_s}} \quad (17.49)$$

Зависимость плотности молекулярного потока массы j_{cond} от давления пара показана на Рис. 17.6.

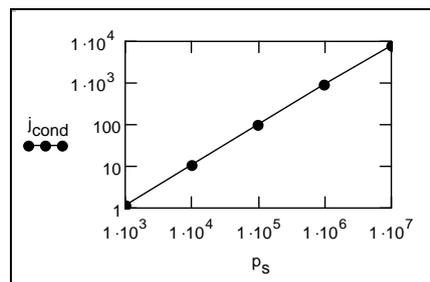


Рис. 17.6. Плотность молекулярного потока массы, j_{cond} , кг/(м²с), в зависимости от давления p_s , Па

Для подсчета скорости испарения применяется следующий остроумный прием. Рассмотрим *равновесие* при пониженной температуре T_l . Поток поступающих молекул определится той же формулой (17.49), но записанной при температуре $T_l < T_s$. В точности такой же поток покидает переохлажденную до T_l поверхность в силу равновесия. Поэтому:

$$j_{evap} = \beta \frac{p_s(T_l)}{\sqrt{2\pi RT_l}} \quad (17.50)$$

Результирующий поток есть разность (17.46) и (17.50):

$$j = j_{cond} - j_{evap} = \beta \left(\frac{p_s(T_s)}{\sqrt{2\pi RT_s}} - \frac{p_s(T_l)}{\sqrt{2\pi RT_l}} \right) \quad (17.51)$$

Упростим результат, полагая разность температур $\Delta T = (T_s - T_l)$ малой величиной. Изменение давления насыщения найдем с помощью (17.18). Соответствующие разложения дадут:

$$j = j_{cond} - j_{evap} = \beta \left(\frac{p_s(T_s)}{\sqrt{2\pi RT_s}} - \frac{p_s(T_s - \Delta T)}{\sqrt{2\pi R[T_s - \Delta T]}} \right) \Rightarrow$$

$$j \approx \beta \frac{p_s(T_s)}{\sqrt{2\pi RT_s}} \left(\frac{r\rho_V}{p_s(T_s)} - \frac{1}{2} \right) \frac{\Delta T}{T_s} \quad (17.52)$$

Для практических приложений полезно записать результаты в форме так называемого *фазового*, или *газокинетического* термического сопротивления R_ϕ :

$$q = jr \approx \beta r \frac{p_s(T_s)}{\sqrt{2\pi RT_s}} \left(\frac{r\rho_V}{p_s(T_s)} - \frac{1}{2} \right) \frac{\Delta T}{T_s}$$

$$R_\phi = \frac{\Delta T}{q} = \frac{1}{\beta} \frac{T_s \sqrt{2\pi RT_s}}{r \cdot p_s(T_s)} \frac{1}{\frac{r\rho_V}{p_s(T_s)} - \frac{1}{2}} \quad (17.53)$$

Представление о числовых значениях фазового сопротивления для водяного пара при разных давлениях дает график на Рис. 17.7 (при $\beta = 1$).

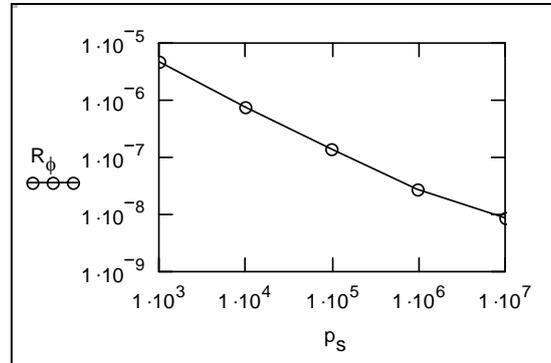


Рис. 17.7. Газокинетическое (фазовое) сопротивление R_ϕ , $\text{м}^2\text{К}/\text{Вт}$ в зависимости от давления p_s , Па

Например, при атмосферном давлении для водяного пара $R_\phi = 1.35 \cdot 10^{-7}$ ($\text{Вт}/\text{м}^2\text{К}$) $^{-1}$. Это значение следует сопоставить с другими актуальными термическими сопротивлениями. Если при конденсации водяного пара образуется пленка воды толщиной $\delta = 0.01$ мм, то ее термическое сопротивление составит $\delta/\lambda_f = 0.01 \cdot 10^{-3}/0.7 = 1.43 \cdot 10^{-5}$ ($\text{Вт}/\text{м}^2\text{К}$) $^{-1}$, что на два порядка выше, чем фазовое сопротивление. При таких условиях эффектом фазового сопротивления можно пренебречь, как в примере: $R_\phi \ll \delta/\lambda_f$. Другими словами, можно считать выполняющимся с хорошей точностью условие термодинамического равновесия, согласно которому температуры в фазах по обе стороны раздела одинаковы и равны температуре насыщения при заданном давлении.

Однако при низких давлениях (см. Рис. 17.7) рассматриваемый эффект может стать заметным. Существенным будет влияние R_ϕ при конденсации и испарении жидких металлов, так как вследствие высокой теплопроводности жидкости λ_f возрастает относительное значение фазового сопротивления. Имеются также специальные задачи с очень высокими скоростями испарения и конденсации, где неравновесные эффекты на границе раздела фаз принципиально важны и где необходимо применение уточненных моделей по сравнению с приведенной здесь.

17.6. Условия динамического и теплового взаимодействия на поверхности раздела фаз

Поверхность раздела фаз как математический объект может быть представлена уравнением вида $z = f(x, y, \tau)$, или, в неявной форме записи:

$$F(x, y, z, \tau) \equiv z - f(x, y, \tau) = 0. \tag{17.54}$$

Полезно провести аналогию с изотермической поверхностью, хорошо знакомой читателю из курса теплопроводности. Можно представить себе некоторую скалярную величину F , такую как температура, для которой

записывается уравнение поверхности нулевого уровня (нулевой «изотермы»): $F = F(x, y, z, \tau) = 0$. Тогда становится ясным, что градиент от скалярной функции $F(x, y, z, \tau)$ определит нормаль к поверхности уровня (т.е. границе раздела) и, после нормирования, *единичную нормаль* \mathbf{n} :

$$\mathbf{n} = \frac{\text{grad } F}{|\text{grad } F|}. \quad (17.55)$$

Поскольку единичный вектор \mathbf{n} указывает направление возрастания $F(x, y, z, \tau)$, можно идентифицировать фазовые состояния по сторонам поверхности раздела, например, как на рисунке (Рис. 17.8).

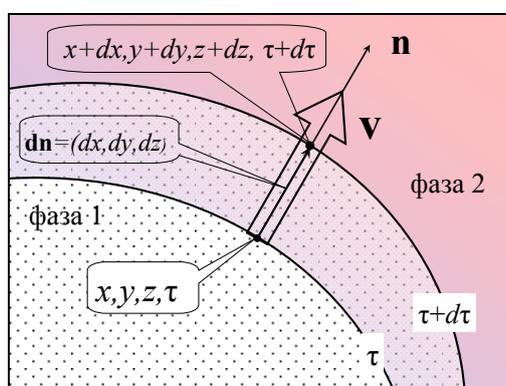


Рис. 17.8. Поверхность раздела

Для нестационарной границы раздела вводят локальную скорость \mathbf{v} смещения точек поверхности в направлении нормали (Рис. 17.8). Мы наблюдаем за изменением положения поверхности $F(x, y, z, \tau) = 0$ в течение $d\tau$. Обозначая малое смещение по нормали за время $d\tau$ как ($d\mathbf{n} = \mathbf{n} dn$), где величина и знак dn подлежат вычислению, определим скорость границы как

$$\mathbf{v} \equiv \mathbf{n} \frac{dn}{d\tau}.$$

Поскольку на границе раздела $F = 0$, т.е. постоянная величина, ее полный дифференциал равен нулю. Выписывая выражение полного дифференциала $dF(x, y, z, \tau) = 0$, получим последовательно:

$$\begin{aligned}
 & \begin{cases} F(x, y, z, \tau) = 0 \\ F(x + dx, y + dy, z + dz, \tau + d\tau) = 0 \end{cases} \Rightarrow dF = 0 \\
 & dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial z} dz + \frac{\partial F}{\partial \tau} d\tau = 0 \\
 & \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z} \right) = \text{grad } F; \quad (dx, dy, dz) = d\mathbf{n} \\
 & dF = (\text{grad } F \cdot d\mathbf{n}) + \frac{\partial F}{\partial \tau} d\tau = 0 \\
 & \quad d\mathbf{n} = \mathbf{n} dn \\
 & (\text{grad } F \cdot \mathbf{n}) dn + \frac{\partial F}{\partial \tau} d\tau = 0; \quad \mathbf{n} = \frac{\text{grad } F}{|\text{grad } F|} \\
 & \frac{dn}{d\tau} = - \frac{\partial F}{\partial \tau} \frac{1}{|\text{grad } F|} \\
 & \quad \mathbf{v} \equiv \mathbf{n} \frac{dn}{d\tau} \\
 & \quad \mathbf{v} = - \frac{\partial F}{\partial \tau} \frac{1}{|\text{grad } F|} \mathbf{n}
 \end{aligned} \tag{17.56}$$

Таким образом, если уравнение границы раздела известно, то нетрудно вычислить и скорость смещения границы. Следует иметь в виду, что скорость границы – это некоторое геометрическое понятие. Вообще говоря, эта скорость *не равна* скорости материальных частиц жидкости у границы. Связь между этими величинами устанавливается кинематическим условием на границе раздела фаз (см. далее).

Поверхность раздела может быть очень сложным геометрическим объектом. Достаточно представить себе различные волны на воде, от капиллярной ряби до гигантских цунами. Сложность двухфазных задач обусловлена в значительной мере тем, что уравнение поверхности раздела заранее не известно, а напротив, должно быть получено при решении.

При формулировке условий на границе раздела мы будем полагать, что поверхность задана в некоторой общей форме (17.54), а скорость движения границы определяется уравнением (17.56).

Основная идея вывода условий взаимодействия фаз на границах (см. гл. I Краевые условия) состоит в применении специального контрольного объема, стягивающегося к поверхности раздела. Благодаря этому в общем уравнении сохранения исчезают *объемные* члены, а также потоки через *боковые* грани. В результате получается равенство плотностей потоков через границу, взятых по обе стороны поверхности раздела.

Здесь необходимо добавить следующее уточнение. Существуют физические эффекты, непосредственно связанные с границей раздела. Например, лапласовское давление Δp_σ (17.22) действует на поверхность

раздела, остающуюся всегда *внутри* применяемого нами специального контрольного объема, стягивающегося в пределе к границе. Поэтому Δp_σ подлежит учету в балансе сил (или потоков импульса).

Кинематическое условие

Кинематическое условие отражает непрерывность поперечного потока массы по обе стороны поверхности раздела (Рис. 17.9):

$$\rho_1(\mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{n} - \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) = \rho_2(\mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{n} - \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) = j. \quad (17.57)$$

где j — плотность потока массы через поверхность раздела; \mathbf{n} — нормаль к поверхности раздела; \mathbf{v} — скорость смещения поверхности раздела, вектор, направленный по нормали к поверхности; \mathbf{w} — скорости в фазах по обе стороны поверхности раздела; ρ — плотности фаз.

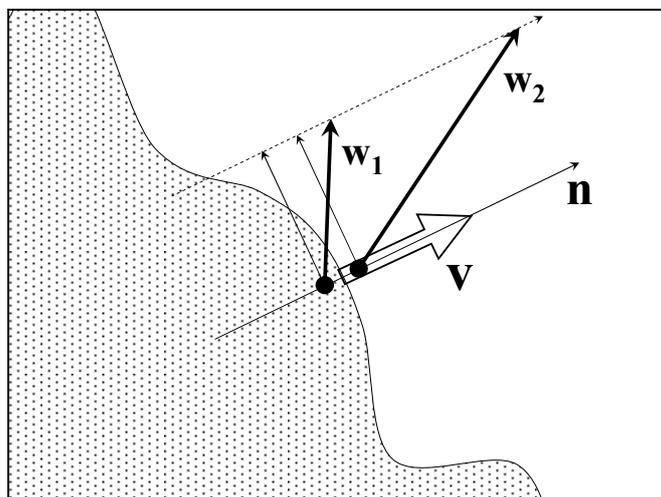


Рис. 17.9. Кинематическое условие на поверхности раздела

Это условие дает соотношение между нормальными составляющими скорости по обе стороны поверхности раздела:

$$w_{1n} - v_{surf} = \frac{j}{\rho_1}; \quad w_{2n} - v_{surf} = \frac{j}{\rho_2}, \quad (17.58)$$

$$w_{2n} - w_{1n} = j \left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_1} \right), \quad (17.59)$$

где v_{surf} – скорость смещения границы раздела.

Из уравнений (17.58), (17.59) следуют два важных вывода:

- Скорость границы раздела и нормальная скорость движения жидкости на границе неодинаковы, если имеет место фазовое превращение, т.е. если плотность потока массы j через поверхность раздела ненулевая,
- нормальная составляющая скорости претерпевает скачок на границе раздела при $j \neq 0$.

Если скорость смещения поверхности раздела нулевая ($v = 0$, стационарная граница раздела фаз), то из (17.58) следует:

$$\rho_1 w_{1n} = \rho_2 w_{2n} = j. \quad (17.60)$$

На неподвижной границе с нулевым поперечным потоком массы нормальные составляющие скорости нулевые:

$$w_{1n} = 0; \quad w_{2n} = 0. \quad (17.61)$$

Соотношения (17.61) называют *условиями непроницаемости* поверхности.

На границе раздела предполагают отсутствие скольжения фаз:

$$w_{1\tau} = w_{2\tau}. \quad (17.62)$$

т.е. одинаковость касательных составляющих скорости по обе стороны поверхности раздела. Аналогичное *условие прилипания* устанавливает нулевую касательную скорость жидкости на поверхности неподвижной твердой стенки. Отсутствие скольжения, или условие прилипания, следует из предположения о сплошности рассматриваемых сред.

В разреженных газах, когда длина свободного пробега молекул составляет десятую или большую часть от характерного размера объекта, в инженерных расчетах применяют граничные условия со скольжением. Особой областью являются также процессы и устройства микро- и нанотехнологий.

Динамическое условие

Динамическое условие получают, записывая равенство потоков импульса через контрольные поверхности 1 и 2 в направлении \mathbf{n} (Рис. 17.10). *Тензор* плотности потока импульса (см. гл. 1. Законы переноса теплоты, вещества, импульса),

$$\mathbf{\Pi} = p\mathbf{I} - \boldsymbol{\sigma}' + \rho\mathbf{w}\mathbf{w},$$

определяется действием сил давления $p\mathbf{I}$ (\mathbf{I} – единичный тензор) и вязких напряжений $\boldsymbol{\sigma}'$, а также конвективным переносом $\rho\mathbf{w}\mathbf{w}$.

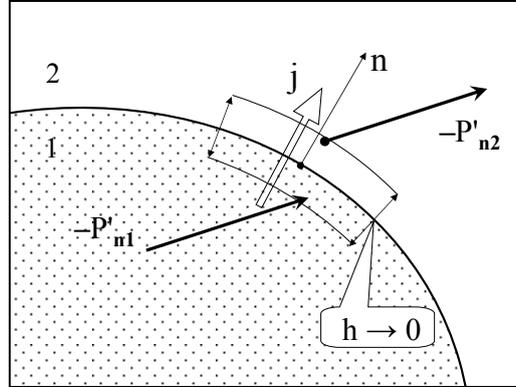


Рис. 17.10. Динамическое условие на поверхности раздела фаз

Вектор потока импульса через единичную площадку, заданную единичным вектором нормали \mathbf{n} (Рис. 17.10), вычисляется как проекция, или скалярное произведение $(\mathbf{\Pi} \cdot \mathbf{n})$:

$$\mathbf{\Pi} \cdot \mathbf{n} = p(\mathbf{I} \cdot \mathbf{n}) - \boldsymbol{\sigma}' \cdot \mathbf{n} + \rho \mathbf{w} \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} = p \mathbf{n} - \mathbf{P}'_n + j \mathbf{w},$$

Поясним выполненные операции.

Ясно, что умножение вектора \mathbf{n} на тензорную единицу не изменяет \mathbf{n} , $(\mathbf{I} \cdot \mathbf{n}) = \mathbf{n}$.

Величина $(\boldsymbol{\sigma}' \cdot \mathbf{n}) = \mathbf{P}'_n$ – вязкое напряжение, сила, действующая на единичную площадку с нормалью \mathbf{n} . Например, нормальная составляющая этой силы есть нормальное вязкое напряжение $\mu \partial w / \partial n$. Напомним общий вид разложения на нормальную и касательные составляющие в декартовых координатах:

$$\mathbf{P}'_z = i \sigma'_{zx} + j \sigma'_{zy} + k \sigma'_{zz},$$

где

$$\sigma'_{zx} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right); \quad \sigma'_{zy} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right); \quad \sigma'_{zz} = \mu \left(2 \frac{\partial w}{\partial z} \right)$$

Мы не стали менять обозначения ортов, так что \mathbf{k} следует отождествить с \mathbf{n} ; координата z нормальна к поверхности раздела фаз, соответственно x и y находятся в касательной плоскости. Скорость $\mathbf{w} = (u, v, w)$.

После этих необходимых справок запишем искомое динамическое условие как векторное равенство потоков импульса через контрольные поверхности 1 и 2 в выбранном направлении \mathbf{n} (Рис. 17.10):

$$p_1 \mathbf{n} - \mathbf{P}'_{n1} + j \mathbf{w}_1 = p_2 \mathbf{n} - \mathbf{P}'_{n2} + j \mathbf{w}_2 \quad (17.63)$$

Рассмотрим простейший случай, когда фазовые превращения и движение в обеих фазах отсутствуют. Тогда поперечный поток j , скорости $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$ и их производные в уравнении (17.63) обращаются в ноль и остаются только давления: $p_1 = p_2$. Это хорошо знакомое условие термодинамического равновесия для двухфазных систем с *плоской поверхностью раздела*.

Для *искривленной* поверхности раздела динамическое условие должно включать капиллярное (лапласовское) давление Δp_σ (17.22), обусловленное молекулярными силами и геометрией поверхности раздела, но не зависящее от макроскопического движения жидкости:

$$\Delta p_\sigma = 2\sigma H; \quad H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right), \quad (17.64)$$

где H – средняя кривизна поверхности раздела, k_1, k_2 – главные кривизны, R_1, R_2 – главные радиусы кривизны. Если поверхность задана в виде $Z = Z(x, y)$, то среднюю кривизну можно определить, взяв полусумму кривизн в двух *перпендикулярных координатных* сечениях $x = \text{const}, y = \text{const}$:

$$H = \frac{1}{2}\left(\frac{Z_{yy}}{(1 + Z_y^2)^{3/2}} + \frac{Z_{xx}}{(1 + Z_x^2)^{3/2}}\right). \quad (17.65)$$

Дополнительные сведения о вычислении кривизны поверхностей можно найти в курсе дифференциальной геометрии.

Интерпретируем капиллярное давление как силу, отнесенную к единице поверхности и ориентированную в положительном направлении – по нормали \mathbf{n} . Добавим поэтому $(\Delta p_\sigma \cdot \mathbf{n})$ в левую часть уравнения (17.63) как дополнительный поступающий поток импульса:

$$p_1 \mathbf{n} - \mathbf{P}'_{n1} + j \mathbf{w}_1 + \Delta p_\sigma \cdot \mathbf{n} = p_2 \mathbf{n} - \mathbf{P}'_{n2} + j \mathbf{w}_2 \quad (17.66)$$

Теперь в рассмотренном выше предельном случае неподвижных фаз получится:

$$p_1 \cdot \mathbf{n} + \Delta p_\sigma \cdot \mathbf{n} = p_2 \cdot \mathbf{n} \Rightarrow \Delta p_\sigma = p_2 - p_1. \quad (17.67)$$

На рисунке кривизна поверхности раздела отрицательна ($H < 0$), поэтому $\Delta p_\sigma < 0, p_1 > p_2$, как и должно быть при такой конфигурации.

Динамическое условие можно переписать в форме:

$$j(\mathbf{w}_2 - \mathbf{w}_1) = \Delta p_\sigma \cdot \mathbf{n} + (p_1 - p_2) \mathbf{n} + (\mathbf{P}'_{n2} - \mathbf{P}'_{n1}), \quad (17.68)$$

допускающей следующую интерпретацию: изменение импульса при пересечении границы происходит благодаря действию разности давлений и вязких напряжений по обе стороны границы, а также капиллярному давлению.

Динамическое условие (17.68) как векторное уравнение содержит два условия: для нормальных и касательных напряжений.

Предельный случай статического равновесия (17.67) является примером нормальной проекции динамического условия. Рассмотрим еще один пример нормальной проекции (17.68), пренебрегая вязкими силами и капиллярным давлением, но учитывая фазовый переход. После скалярного умножения обеих частей (17.68) на \mathbf{n} ,

$$\begin{aligned} j(\mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{n} - \mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{n}) &= (p_1 - p_2)(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}) \Rightarrow \\ j(w_2 - w_1) &= p_1 - p_2 \end{aligned} \quad (17.69)$$

и подстановки (17.59) получим:

$$j^2 \left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_1} \right) = p_1 - p_2.$$

Повышение давления в плотной фазе происходит благодаря *реактивному* эффекту, обычно незначительному, но играющему главную роль в проблеме лазерного термоядерного синтеза. Сила реакции быстро испаряющегося вещества – под действием сверхмощного лазерного излучения – приводит к сжатию и разогреву мишени.

Рассмотрим тангенциальную проекцию динамического условия (17.68) ($\boldsymbol{\tau}$ – единичный касательный вектор к поверхности раздела):

$$\begin{aligned} j(\mathbf{w}_2 \cdot \boldsymbol{\tau} - \mathbf{w}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}) &= \Delta p_\sigma \cdot (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau}) + \\ &+ (p_1 - p_2)(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau}) + \mathbf{P}'_{n2} \cdot \boldsymbol{\tau} - \mathbf{P}'_{n1} \cdot \boldsymbol{\tau} \Rightarrow \\ j(u_2 - u_1) &= \sigma'_{n\tau 2} - \sigma'_{n\tau 1} \Rightarrow \\ \sigma'_{n\tau 2} &= \sigma'_{n\tau 1} \end{aligned} \quad (17.70)$$

(обозначение z дублирует нормальное направление n , x есть касательное направление к поверхности раздела). Вследствие условия прилипания, касательные составляющие скорости u_1 , u_2 по обе стороны границы одинаковы, поэтому тангенциальное условие сводится к равенству касательных напряжений. Индекс « $n\tau$ » означает, что напряжение действует на площадку с нормалью \mathbf{n} в касательном направлении $\boldsymbol{\tau}$.

В соответствии с законом Стокса вязкого трения, условие (17.70) запишется как:

$$\mu_2 \left(\frac{\partial u_2}{\partial z} + \frac{\partial w_2}{\partial x} \right) = \mu_1 \left(\frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial w_1}{\partial x} \right), \quad (17.71)$$

или, для течения типа пограничного слоя,

$$\mu_2 \frac{\partial u_2}{\partial z} \approx \mu_1 \frac{\partial u_1}{\partial z}. \quad (17.72)$$

Как мы видели выше, поверхностное натяжение σ создает силу, *нормальную* к искривленной поверхности раздела (см. (17.73)). Если σ неоднородно по поверхности раздела, то возникает также *тангенциальная* сила (эффект Марангони), равная в расчете на единицу поверхности:

$$(\text{grad} \sigma)_{\rightarrow}, \quad (17.73)$$

где индекс \rightarrow означает, что градиент вычисляется вдоль поверхности. Если переменность σ связана с температурной зависимостью $\sigma(T)$, то говорят о *термокапиллярном* эффекте. Возможны сильные изменения σ при наличии примесей поверхностно активных веществ.

Сила (17.73) должна быть добавлена в левую часть уравнения (17.63) как дополнительный поступающий поток импульса:

$$p_1 \mathbf{n} - \mathbf{P}'_{n1} + j \mathbf{w}_1 + \Delta p_{\sigma} \cdot \mathbf{n} + (\text{grad} \sigma)_{\rightarrow} = p_2 \mathbf{n} - \mathbf{P}'_{n2} + j \mathbf{w}_2. \quad (17.74)$$

Тепловые условия

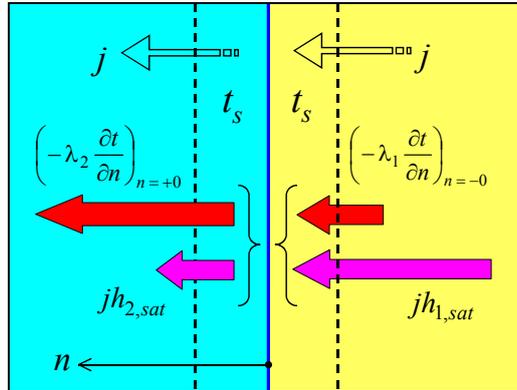


Рис. 17.11. Тепловые условия на поверхности раздела фаз

Тепловые условия на поверхности раздела записывается двумя соотношениями. Если газокинетическое (фазовое) термическое сопротивление (17.53) пренебрежимо мало, то температуры по обе стороны поверхности раздела фаз одинаковы и равны температуре насыщения:

$$t_1|_{n=-0} = t_2|_{n=+0} = t_s$$

Баланс потоков тепловой энергии на межфазной границе записывается в виде

$$\left(-\lambda_2 \frac{\partial t}{\partial n}\right)_{n=+0} + j h_{2,sat} = \left(-\lambda_1 \frac{\partial t}{\partial n}\right)_{n=-0} + j h_{1,sat}$$

$$j(h_{1,sat} - h_{2,sat}) \equiv j \cdot r = \left(-\lambda_2 \frac{\partial t}{\partial n}\right)_{n=+0} - \left(-\lambda_1 \frac{\partial t}{\partial n}\right)_{n=-0} \quad (17.75)$$

где r – разность энтальпий на линии насыщения, скрытая теплота фазового превращения. При конденсации чистого насыщенного пара теплота парообразования отводится через жидкую фазу (пленку конденсата), поэтому в правой части последнего соотношения следует оставить только первое слагаемое. При пленочном кипении, напротив, теплота к поверхности раздела фаз подводится через паровую пленку, и необходимо, сохранить второе слагаемое (при высоких температурах стенки добавляется перенос теплоты излучением).

Соотношение (17.75) остается справедливым, если паровая фаза содержит примеси инертного (неконденсирующегося) газа. Поперечный поток массы j в этом случае – это поток «активного» компонента смеси (пара), соответственно удельная энтальпия в газовой фазе – это энтальпия активного компонента.

17.7. Феномен гидродинамической неустойчивости границы раздела

Стационарная, гладкая поверхность раздела редко наблюдается на практике. Общим правилом скорее является возмущенная, волновая поверхность, или даже разрушающаяся граница раздела с отрывом капель и насыщением жидкости газовыми пузырьками. Неустойчивость поверхности раздела бывает двух типов (Рис. 17.12):

- Неустойчивость Гельмгольца: динамическая неустойчивость поверхности раздела, по обе стороны которой скорости потоков неодинаковы (как при различной, так и при одинаковой плотности жидкостей)
- Неустойчивость Тейлора: неустойчивость поверхности раздела в поле сил тяжести, если более тяжелая (с большей плотностью ρ) жидкость находится сверху. Гравитация может быть заменена движением с ускорением, направленным в сторону более тяжелой жидкости (как в лифте, ускоренно движущемся вверх)

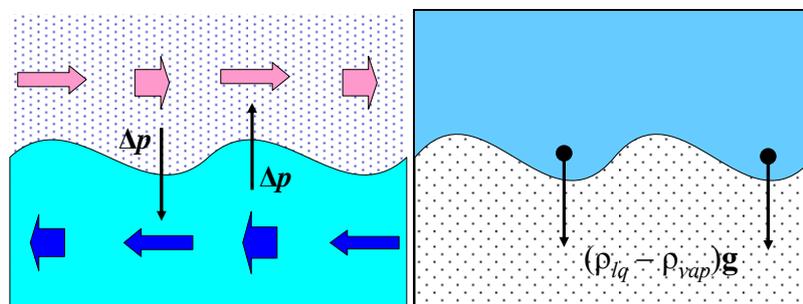


Рис. 17.12. Неустойчивость Гельмгольца (слева) и Тейлора (справа)

В случае Гельмгольцевой неустойчивости продольное движение над выступами волнового профиля ускоряется из-за сужения трубок тока, а над впадинами – замедляется, благодаря их расширению. По закону Бернулли, давление над выступами уменьшается, а во впадинах – возрастает, что и приводит к дальнейшему увеличению отклонений от исходного состояния: выступы будут расти, а впадины углубляться.

В случае Тейлоровской неустойчивости случайное смещение тяжелой жидкости вниз с одновременным компенсирующим поднятием легкой жидкости вверх будет энергетически выгодным – потенциальная энергия всей системы уменьшится. Поэтому отклонение будет самопроизвольно увеличиваться.

Приведем несколько актуальных примеров проявления гидродинамической неустойчивости в задачах двухфазного теплообмена.

Гидродинамическая теория кризиса кипения (перехода от пузырькового к пленочному кипению, см. гл. 18 Электронного курса) основывается на неустойчивости Гельмгольца: уходящий от горячей стенки поток пара препятствует притоку жидкости из-за сильных возмущений поверхности раздела между этими встречными течениями. Обратный переход (второй кризис кипения, переход от пленочного кипения к пузырьковому) связан с потерей устойчивости паровой пленки, над которой находится тяжелая жидкость (вода), т.е. с неустойчивостью Тейлора.

Гельмгольцева неустойчивость обуславливает диспергирование струй жидкости в конденсаторах и испарителях контактного типа. При сильном торможении (отрицательном ускорении) скоростных капель в паровой среде распад может быть вызвана Тейлоровской неустойчивостью («эффект лифта»).

Хотя приведенные выше качественные объяснения феномена неустойчивости представляются простыми и понятными, количественная теория оказывается весьма сложной, поскольку необходимо учесть влияние вязкости, поверхностного натяжения, поперечного потока массы при испарении и конденсации, а также нелинейные эффекты.

Мы ограничимся здесь ссылкой на следующие материалы: приложение «Уравнение Рэля: гидродинамическая неустойчивость» и соответствующую Mathcad программу:

[Appx_17_RayleighEq.doc](#)

[..\Mathcad_HMT\Appx_17_Rayleigh_Eq\Rayleigh_Instab.xmcdz](#),

по которым на примере сдвигового потока можно изучить технику математического и компьютерного моделирования в случае малых, линейных возмущений. Обнаруживаемые прогрессирующие возмущения в потоке являются предшественниками турбулентности (Рис. 17.13).

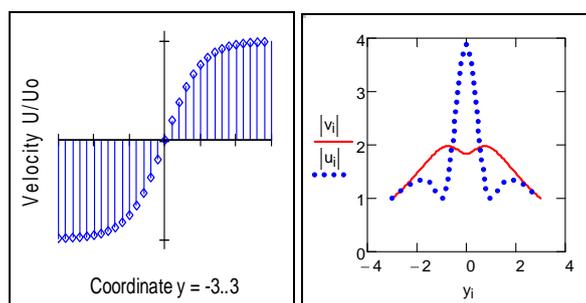


Рис. 17.13. Основное течение (слева) и пульсации поперечной и продольной скорости (справа)

В методическом отношении указанные материалы могут служить элементарным введением в общую теорию устойчивости. Фундаментальная идея – разложение решения вблизи точки равновесия по степеням малых отклонений – реализуется с применением *символьного* процессора Mathcad, позволяющего автоматизировать аналитические преобразования. Рассматривается техника работы с дифференциальными уравнениями в комплексной области. Показано, как интегрировать уравнения с комплексными коэффициентами численным методом и как интерпретировать получившиеся комплекснозначные решения.