

## 20 Тепломассообмен в парогазовом потоке при конденсации и испарении

### 20.1 ВВЕДЕНИЕ

Неконденсирующиеся («инертные» в аспекте фазового перехода) газы в той или иной концентрации всегда присутствуют в конденсационных и испарительных устройствах (особенно в вакуумных) и оказывают отрицательное влияние на интенсивность тепломассообмена.

При конденсации в каналах негативный эффект может быть значительным даже если начальное содержание невелико, поскольку по ходу парогазового потока концентрация инертных газов увеличивается, а скорость течения и, следовательно, интенсивность массообмена уменьшаются.

В конденсационных установках с воздушным охлаждением («воздушных» конденсаторах) при низких температурах окружающей среды возникает опасность замораживания труб.

В устройствах испарительного охлаждения, таких как градирни энергетических установок или промышленные кондиционеры, тепломассообмен в парогазовой среде является основным процессом, лимитирующим их производительность. То же относится к конденсационным установкам для улавливания влаги из уходящих газов (продуктов сгорания).

Наличие неконденсирующихся газов принципиально осложняет расчет конденсации и испарения в каналах. Практически непригодными оказываются методы средней теплоотдачи. Необходим расчет локальных характеристик тепломассообмена, должны быть определены концентрации и температуры в потоке и на поверхности раздела фаз, рассчитаны трение и поперечный поток массы на межфазной границе.

Для инженерных расчетов тепломассообмена при конденсации и испарении применяют *интегральный метод* пограничного слоя, что позволяет провести расчеты с достаточной точностью, оставаясь в рамках одномерных дифференциальных моделей, т.е. моделей на базе обыкновенных дифференциальных уравнений, для интегрирования которых имеется надежное и доступное математическое обеспечение.

Интегральный метод включает

- интегральные уравнения сохранения импульса, энергии, массы компонентов смеси
- законы трения, тепло- и массообмена как соотношения между локальной проводимостью пограничного слоя и локальным числом Рейнольдса, построенным по толщине потери импульса, энергии, концентрации

- корректирующие соотношения для учета проницаемости стенки и градиента скорости внешнего потока (основное внимание уделено влиянию поперечного потока массы на трение и тепломассообмен).

С основами интегрального метода и примерами применения можно ознакомиться в [гл. 14](#), [15](#) Электронного курса.

## 20.2 ТЕПЛОВЫЕ И МАССОВЫЕ ПОТОКИ НА ПОВЕРХНОСТИ РАЗДЕЛА ФАЗ

Схема процессов конденсации или испарения представлена на Рис. 20.1. Координата  $y$  направлена по нормали от поверхности раздела в парогазовую область. Поток массы и энергии рассматриваются как величины со знаками, поэтому тепловой поток на стенке  $q_w$  может означать, например, подвод теплоты извне с целью обеспечить испарение стекающей пленки ( $q_w > 0$ ) или, напротив, отвод теплоты к охлаждающей воде при пленочной конденсации ( $q_w < 0$ ).

В парогазовой смеси ( $vg$ ) различают состояния

- у поверхности раздела – индекс «0»; в некоторых случаях, в зависимости от контекста, индекс «s», т.е. “saturation” (насыщение) или “surface” (поверхность)
- и вдали от нее (индекс «∞»).

Соответственно массовую концентрацию инертного газа ( $g$ ) обозначают как  $c_{g,0}$  на поверхности раздела и  $c_{g,\infty}$  в ядре парогазового потока.

Характерными значениями температур в системе являются:

$t_w$  – температура стенки

$t_f$  – средняя по теплосодержанию температура конденсированной фазы

$t_s$  – температура межфазной поверхности

$t_{vg,\infty}$  – средняя по теплосодержанию температура парогазовой смеси (или температура на удалении от границы раздела).

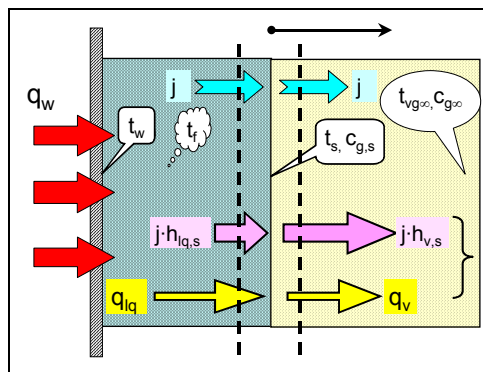


Рис. 20.1. Поток на поверхности раздела фаз

Предметом анализа в данном параграфе будут условия сохранения массы и энергии для поверхности раздела фаз. Они могут быть записаны как равенства потоков массы и энергии по обе стороны границы раздела, через обозначенные на рисунке пунктирные контрольные поверхности, расположенные бесконечно близко к межфазной границе.

Условие сохранения массы диктует равенство потоков массы  $j$ , кг/м<sup>2</sup>с, по обе стороны поверхности раздела:

$$j|_{y=0} = j|_{y=+0} \equiv j \quad (20.1)$$

Напомним, что плотность массового потока смеси  $j$  представляется как (векторная) сумма потоков компонентов:

$$j = j_v + j_g,$$

где индекс  $v$  указывает на пар как компонент смеси, а индекс  $g$  используется для обозначения газовой компоненты.

Для двухфазной системы «вода – парогазовая смесь» мы имеем дело с так называемой *полупроницаемой* границей раздела: межфазная поверхность *проницаема* для пара (при конденсации или испарении) и практически *непроницаема* для слабо растворимого в воде газа. Следовательно, поток газа (инертного компонента) равен нулю, а суммарный поток  $j$  парогазовой смеси на поверхности раздела есть поток пара:

$$j_g = 0 \Rightarrow j|_{y=+0} \equiv j_v \neq 0, \quad (20.2)$$

Существование макроскопического (гидродинамического) течения в поперечном направлении на проницаемой границе раздела является важной особенностью массообмена. Сказанное иллюстрируется сопоставлением поля течения при продольном обтекании:

- непроницаемой стенки (Рис. 20.2, слева)
- водной поверхности при конденсации (Рис. 20.2, справа).

Во втором случае поперечная скорость  $V$  на границе раздела – ненулевая:

$$V = \frac{j_v}{\rho}, \quad (20.3)$$

хотя продольная составляющая  $U$  по-прежнему подчиняется условию прилипания и поэтому равна нулю. Сопоставление наглядно показывает, как деформируется поле течения под действием массообмена на стенке:

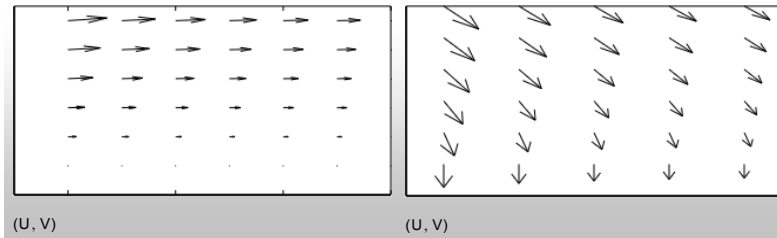


Рис. 20.2. Течение вблизи непроницаемой (слева) и проницаемой (справа) горизонтальной поверхности раздела, совпадающей с нижней кромкой рисунка (по результатам численного решения уравнения Фолкнера–Скэн для течения в пограничном слое:

[..\Mathcad HMT\20 Mass Transfer Cond Evap\FalknerSkan odesolve field of velocities.xmcdz](#) )

Поскольку нормальная скорость  $V$  на границе отлична от нуля, поперечные потоки компонентов смеси вблизи поверхности раздела обусловлены обоими известными механизмами переноса: кондуктивным и конвективным.

Например, плотность потока паровой компоненты  $j_v$  должна быть записана как сумма диффузионной и конвективной составляющих:

$$j_v = j_{v,conduct} + j c_v, \quad (20.4)$$

С учетом (20.2)

$$j = j_v \neq 0,$$

получим важное соотношение между кондуктивным (диффузионным) потоком пара и полным потоком массы через границу раздела:

$$j_{v,conduct} = j \cdot (1 - c_v); \quad j = j_v,$$

или

$$j = j_{v,conduct} \frac{1}{(1 - c_v)}; \quad j = j_v. \quad (20.5)$$

Таким образом, нельзя отождествлять скорость испарения  $j = j_v$  с диффузионным (кондуктивным) потоком пара  $j_{v,conduct}$  от поверхности раздела. Если концентрация пара  $c_v$  у поверхности раздела велика (близка к единице), то различие этих потоков может быть очень большим.

Для потоков энергии по обе стороны границы имеем:

$$q_{lq} + j_{lq} h_{lq,s} = q_v + (j_v h_{v,s} + j_g h_{g,s}) \quad (20.6)$$

где  $q_{lq}$ ,  $q_v$  – тепловые (кондуктивные) потоки в конденсированной и газовой фазах. Поток энтальпии смеси в правой части уравнения (20.6) записан через

потоки массы и *парциальные* энтальпии компонентов. Для идеальной газовой смеси парциальные значения совпадают с энтальпиями чистых компонентов. С учетом (20.2) баланс потоков энергии запишется следующим образом:

$$q_{lq} = q_v + j(h_{v,s} - h_{lq,s}) \Rightarrow q_{lq} = q_v + jr, \quad (20.7)$$

где  $r$  – теплота парообразования,  $j = j_v$  – плотность поперечного потока массы, скорость конденсации или испарения.

Тепловые (кондуктивные) потоки  $q_{lq}$ ,  $q_v$  в конденсированной и газовой фазах вблизи межфазной границы определяются соотношениями:

$$\begin{aligned} q_{lq} &= -\lambda_{eff,lq} \left. \frac{\partial t}{\partial y} \right|_{y=\delta-0} = \alpha_{lq} (t_f - t_s); \\ q_v &= -\lambda_{eff,vg} \left. \frac{\partial t}{\partial y} \right|_{y=\delta+0} = \alpha_{vg} (t_s - t_{vg,\infty}), \end{aligned} \quad (20.8)$$

Индекс «eff» при коэффициентах переноса указывает, что возможен вклад турбулентного перемешивания на «жидкой», подвижной поверхности раздела фаз.

В правых частях уравнений (20.8) записаны выражения кондуктивных потоков через термические проводимости (коэффициенты теплоотдачи)  $\alpha_l$  и  $\alpha_{vg}$  в жидкой и газовой фазах, как это обычно делается в инженерных расчетах.

Кондуктивный (диффузионный) поток массы активного компонента записывается аналогично (20.8):

$$j_{v,conduct} = -\rho D_{eff,vg} \left. \frac{\partial c_v}{\partial y} \right|_{y=+0} = \rho\beta (c_{v,0} - c_{v,\infty}), \quad (20.9)$$

где  $\beta$ , м/с – коэффициент массоотдачи.

Из (20.5), (20.9) следует выражение для полного потока массы через границу, т.е. для скорости конденсации или испарения:

$$j = \rho\beta \left( \frac{c_{v,0} - c_{v,\infty}}{1 - c_{v,0}} \right), \quad (20.10)$$

или, в безразмерном виде:

$$\begin{aligned} \frac{j}{\rho u_\infty} &= \left( \frac{\rho\beta}{\rho u_\infty} \right) \left( \frac{c_{v,0} - c_{v,\infty}}{1 - c_{v,0}} \right) = St_D b_1; \\ b_1 &\equiv \frac{c_{v,0} - c_{v,\infty}}{1 - c_{v,0}}; \quad St_D \equiv \frac{\beta}{u_\infty} \end{aligned} \quad (20.11)$$

где  $b_1$  – так называемый параметр проницаемости (см. далее §20.6),  $St_D$  – число Стантона диффузионное, безразмерный коэффициент массоотдачи.

Соотношения (20.8), (20.9) для потоков на границе содержат температуру  $t_s$  и концентрацию пара  $c_{v,0}$  на межфазной поверхности. Если исключить из рассмотрения сверхинтенсивные процессы испарения или конденсации и ограничиться невысокими давлениями, то можно связать эти величины следующими простыми соотношениями: парциальное давление пара у поверхности раздела определить уравнением кривой насыщения  $p_s(t_s)$ , а концентрацию пара вычислить по уравнению состояния идеального газа:

$$p_{v,0} = p_s(t_{s,0}); \quad c_{v,0} = \frac{1}{1 + \frac{R_v}{R_g} \left( \frac{p_{mix}}{p_{v,0}} - 1 \right)} \quad (20.12)$$

где  $R_v$ ,  $R_g$  – газовые постоянные компонентов смеси.

Соотношения (20.7)–(20.12) составляют основу инженерной методики расчета тепломассообмена при испарении и конденсации. При типичной постановке задачи бывают заданы параметры парогазового потока вдали от поверхности, т.е. его скорость, давление, температура и концентрация инертного газа. Проблема состоит в нахождении коэффициентов тепло- и массоотдачи, а также концентрации и температуры на поверхности раздела.

### 20.3 ЭЛЕМЕНТАРНАЯ МЕТОДИКА РАСЧЕТА ТЕПЛОМАССООБМЕНА

Как следует из соотношений (20.7), (20.8), (20.9), для расчета потоков теплоты и массы на границе раздела фаз необходимо располагать значениями коэффициентов теплоотдачи и массоотдачи.

Способ определения  $\alpha_{lq}$  зависит от вида тепломассообменного устройства. Например, для поверхностных пленочных конденсаторов или испарителей  $\alpha_{lq}$  есть термическая проводимость жидкой пленки, зависящая от расхода, трения на поверхности раздела, физических свойств жидкости. При анализе испарительного охлаждения в градирнях оправданным может быть предположение о предельно большой проводимости, такой, что поперечным перепадом температуры в пленке можно пренебречь и считать  $t_w = t_f = t_s$ , где  $t_f$  – средняя по теплосодержанию температура стекающей пленки жидкости.

В общем случае величина  $\alpha_{lq}$  не тождественна термической проводимости пленки для транзитного потока тепла от поверхности раздела фаз к охлаждаемой стенке (как при пленочной конденсации пара). Например, указанное отличие существенно для термического начального участка пленки, натекающей на твердую поверхность, или для адиабатической стенки, когда тепловой поток максимален на поверхности раздела фаз и равен нулю на твердой поверхности, или для струйных аппаратов.

В случае турбулентных пленок оценка  $\alpha_{lq}$  должна учитывать особенности турбулентного переноса на межфазной границе (см. [гл. 19](#) Электронного курса).

Коэффициент теплоотдачи  $\alpha_{vg}$  со стороны парогазового потока в первом приближении может быть рассчитан как при обтекании твердой непроницаемой поверхности (в действительности требуется учитывать и специальную «шероховатость» поверхности раздела фаз, и влияние поперечного потока массы).

Коэффициент массоотдачи  $\beta$  рассчитывается на основе аналогии между процессами теплообмена и массообмена. Иллюстрацией аналогии может служить одинаковость структуры законов переноса массы и энергии

$$j_{v, \text{conduct}} = -\rho D \frac{\partial c_v}{\partial y} \Leftrightarrow q = -\lambda \frac{\partial t}{\partial y} \quad (20.13)$$

Полагают, что одинаковость структуры математического описания (т.е. дифференциальных уравнений переноса и граничных условий) имеет следствием одинаковость решений, т.е. расчетных уравнений для коэффициентов теплоотдачи и массоотдачи. Например, если необходимо рассчитать коэффициент *массоотдачи* при обтекании шахматного пучка труб, то следует воспользоваться соответствующей «тепловой» формулой, заменив в ней тепловые величины их массообменными аналогами:

$$\text{Nu} \equiv \frac{\alpha_{vg} d}{\lambda_{vg}} = 0.4 \text{Re}_d^{0.6} \text{Pr}^{0.36}; \quad \text{Pr} = \frac{\nu}{a} \Rightarrow$$

$$\text{Nu}_D \equiv \frac{\beta d}{D} = 0.4 \text{Re}_d^{0.6} \text{Pr}_D^{0.36}; \quad \text{Pr}_D = \frac{\nu}{D}$$

где  $\text{Re}_d$  – число Рейнольдса по диаметру обтекаемой трубы как характерному размеру.

При расчете теплопередачи главную роль играет соотношение (20.7) для потоков на границе раздела,

$$q_{lq} = q_v + jr,$$

которое мы перепишем, сделав подстановки из (20.8) и (20.10):

$$\alpha_{lq} (t_f - t_s) = \alpha_{vg} (t_s - t_{vg, \infty}) + \rho \beta \left( \frac{c_{v,0} - c_{v, \infty}}{1 - c_{v,0}} \right) r.$$

Вообще говоря, здесь неизвестны ни температура  $t_s$ , ни концентрация  $c_{v,0}$  на поверхности раздела, и необходимо решать это уравнение, привлекая дополнительно соотношения (20.12), связывающие температуру и концентрацию.

Изложенная выше элементарная методика расчета тепломассообмена обеспечивает приемлемую точность, если поперечный поток массы на

поверхности раздела относительно невелик и еще не вносит заметных искажений в поле течения.

Дальнейшее изложение преследует две цели. Во-первых, мы опишем интегральный метод решения задач пограничного слоя как эффективный и относительно простой способ решения сложных задач тепломассообмена. Во-вторых, мы обоснуем с помощью интегрального метода намеченную в данном параграфе инженерную методику расчета тепломассообмена в конденсационных и испарительных устройствах. При этом будут введены корректирующие факторы, учитывающие влияние поперечного потока массы в случае интенсивных процессов конденсации или испарения, когда поле течения вблизи стенки сильно деформируется (см. Рис. 20.2).

#### 20.4 ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

Интегральные уравнения динамического, диффузионного и теплового пограничных слоев, формирующихся на поверхности раздела фаз  $I$  в парогазовом потоке записываются следующим образом:

$$\frac{d}{dx} \underbrace{(\rho u_{\infty} \delta_{**} u_{\infty})}_{\text{Потеря импульса}} = \tau + j u_{\infty} + \frac{dP_{\infty}}{dx} \delta_{**}; \quad (20.14)$$

$$\frac{d}{dx} \underbrace{(\rho u_{\infty} \delta_{D**} (c_{v,\infty} - c_{v,0}))}_{\text{Потеря концентрации}} = -j_{v,\text{conduct}} + j (c_{v,\infty} - c_{v,0}). \quad (20.15)$$

$$\frac{d}{dx} \underbrace{[\rho u_{\infty} \delta_{T**} c_p (t_{\infty} - t_s)]}_{\text{Потеря энтальпии}} = -q + j c_p (t_{\infty} - t_s) \quad (20.16)$$

Плотности потоков массы  $j$ , теплоты  $q$ , импульса  $\tau$  записаны на границе раздела со стороны парогазового потока.

Согласно уравнению сохранения импульса (20.14), *потеря импульса* в заторможенном на стенке слое  $\delta_{**}$ , называемом толщиной потери импульса, *увеличивается* (символ  $d/dx$ ) при движении вдоль неподвижной стенки вследствие

- трения на стенке (границе раздела)

$$\tau_I = \mu \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=+0} \quad (20.17)$$

- затрат импульса на ускорение поперечного массового потока  $j$ , поступающего через поверхность раздела, от нулевой продольной скорости на границе до скорости внешнего потока парогазовой смеси



- действия продольного градиента давления в пределах слоя с толщиной вытеснения  $\delta_*$ .

Индекс “s” (или “0”) указывает, что величины относятся к межфазной границе, на которой происходят фазовые превращения. *Проницаемость* поверхности раздела для потоков массы является принципиальной особенностью задач о фазовых превращениях по сравнению с обычными задачами конвективного теплообмена на твердых стенках.

Согласно уравнению сохранения компонента смеси (20.15), *потеря концентрации* компонента  $V$  (пара) в слое  $\delta_{D^{**}}$ , называемом толщиной потери концентрации, *увеличивается* вдоль проницаемой поверхности вследствие

- отвода рассматриваемого компонента смеси к стенке посредством диффузии

$$j_{v,\text{conduct}} = -\rho D \left. \frac{\partial c_v}{\partial y} \right|_{y=0} \quad (20.18)$$

- затрат на обогащение этим компонентом вдуваемого потока  $j$ .

Для относительно медленных (несжимаемых) течений, согласно уравнению сохранения энергии (20.16), потеря энтальпии в охлажденном до температуры стенки слое  $\delta_{T^{**}}$ , называемом толщиной потери энтальпии, *увеличивается* при движении жидкости вдоль холодной стенки вследствие

- теплоотвода к стенке посредством теплопроводности

$$q = -\lambda \left. \frac{\partial t}{\partial y} \right|_{y=+0} \quad (20.19)$$

- затрат на подогрев вдуваемого теплоносителя  $j$  от  $t_s$  до  $t_\infty$ .

Принимается, что нормальная к поверхности раздела координата направлена из конденсированной в парогазовую фазу. Поэтому при конденсации поток массы  $j$  через границу раздела имеет отрицательный знак (отсос из парогазового пограничного слоя), а при испарении – положительный (вдув в парогазовый поток).

Значения скорости, концентрации и температуры на поверхности и вдали от нее считаются заданными в условиях однозначности.

Уравнения пограничного слоя (20.14), (20.15), (20.16) записаны в форме обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Они являются редуцированными представлениями более сложных дифференциальных уравнений пограничного слоя *в частных производных*.

Термин «интегральные уравнения» для (20.14), (20.15), (20.16) используется потому, что *искомые* величины  $\delta^{**}$ ,  $\delta_{D^{**}}$ ,  $\delta_{T^{**}}$  под знаком производной  $d/dx$  являются средневзвешенными (по скорости, концентрации, температуре) *интегральными* (по поперечной координате  $y$ )

оценками толщины пограничного слоя. Например, толщина потери энтальпии вводится следующим образом:

$$\underbrace{\int_0^{\infty} \rho u(y) c_p (t_{\infty} - t(y)) dy}_{\text{Потеря энтальпии}} \xrightarrow{\text{Модельное представление}} \rho u_{\infty} \delta_{T^{**}} c_p (t_{\infty} - t_0) \quad (20.20)$$

откуда следует определение  $\delta_{T^{**}}$ :

$$\delta_{T^{**}} = \frac{\int_0^{\infty} \rho u(y) c_p (t_{\infty} - t(y)) dy}{\rho u_{\infty} c_p (t_{\infty} - t_0)} \quad (20.21)$$

Неизвестные распределения скорости  $u(y)$  и температуры  $t(y)$  входят под знаком интеграла, что и является признаком «интегрального» уравнения.

Толщины пограничных слоев  $\delta^{**}$ ,  $\delta_{D^{**}}$ ,  $\delta_{T^{**}}$  рассматриваются как новые неизвестные (зависимые переменные). Кроме  $\delta^{**}$ ,  $\delta_{D^{**}}$ ,  $\delta_{T^{**}}$ , в уравнениях (20.14), (20.15), (20.16) содержатся также неизвестные величины потоков импульса  $\tau$ , массы  $j_{v, \text{conduct}}$  и теплоты  $q$  на поверхности. Необходимые дополнительные функциональные связи между ( $\delta^{**}$ ,  $\delta_{D^{**}}$ ,  $\delta_{T^{**}}$ ) и ( $\tau$ ,  $j_{v, \text{conduct}}$ ,  $q$ ) устанавливаются ниже в §§ 20.5, 20.6. Располагая этими замыкающими соотношениями, уравнения пограничного слоя (20.14), (20.15), (20.16) можно проинтегрировать по продольной координате  $x$  как *обыкновенные* дифференциальные уравнения.

Если заданы концентрация и температура на поверхности раздела, как мы приняли выше, то в результате интегрирования получатся искомые значения толщин пограничных слоев и потоков на поверхности. Если же будут заданы потоки, то при решении определяются значения концентрации и температуры на поверхности.

## 20.5 СТАНДАРТНЫЕ ЗАКОНЫ

Под стандартными законами трения, тепло- и массообмена в контексте интегрального метода понимают соотношения

$$\begin{aligned} c_{f0} &= c_{f0}(\text{Re}^{**}); \quad \text{St}_0 = \text{St}_0(\text{Re}_{T^{**}}, \text{Pr}); \\ \text{St}_{D0} &= \text{St}_{D0}(\text{Re}_{D^{**}}, \text{Pr}_D) \end{aligned} \quad (20.22)$$

между локальными числами Рейнольдса, построенными по толщине пограничного слоя:

$$\text{Re}^{**} = \frac{u_{\infty} \delta^{**}}{\nu}; \quad \text{Re}_{D^{**}} = \frac{u_{\infty} \delta_{D^{**}}}{\nu}; \quad \text{Re}_{T^{**}} = \frac{u_{\infty} \delta_{T^{**}}}{\nu} \quad (20.23)$$

и локальными значениями безразмерных комплексов (чисел), характеризующих интенсивность переноса на поверхности раздела:

$$\frac{c_f}{2} \equiv \frac{(\tau_l / u_\infty)}{\rho u_\infty}; \quad St_D \equiv \frac{(j_{v,conduct,l} / (c_{v,l} - c_{v,\infty}))}{\rho u_\infty};$$

$$St \equiv \frac{(q_l / (t_l - t_\infty))}{\rho u_\infty c_p} \quad (20.24)$$

Индекс «0» (например, в  $c_{f0}$ ) означает, что соотношения (20.22) установлены (теоретически и/или экспериментально) для простейшей классической задачи конвективного теплообмена: обтекания *безградиентным* внешним потоком *непроницаемой* пластины с заданными *постоянными* значениями температуры и концентрации на ее поверхности. Указанные граничные условия можно назвать стандартными условиями.

Определения коэффициента трения и чисел Стантона в (20.24) имеют одинаковую структуру и интерпретируются следующим образом. В числителе записано отношение потока переносимой величины к движущей силе переноса, т.е. *проводимость* (например, коэффициент теплоотдачи  $\alpha \equiv q/\Delta t$ ). В знаменателе – масштаб для этой величины, равный (или пропорциональный) массовой скорости  $\rho u_\infty$ .

Статус соотношений (20.22) (конкретные аппроксимации (20.25), (20.26) см. ниже) как *законов* определяется тем, что они связывают *локальную* интенсивность переноса ( $c_f$ ,  $St$ ) с *локальным* значением числа Рейнольдса, построенного по *локальной* толщине пограничного слоя. Благодаря этому, соотношения (20.22) приобретают свойство универсальности (или *консервативности*), в отличие от обычных критериальных расчетных формул, специализированных для различных частных задач.

*Стандартные* законы аппроксимируются следующими степенными формулами:

для ламинарного режима  $Re_{**} < Re_{**cr} \approx 400$ :

$$\frac{c_{f0}}{2} = \left( \frac{0.22}{Re_{**}} \right);$$

$$St_{D0} = \left( \frac{0.22}{Re_{D**}} \right) \left[ \frac{1}{Pr_D^{4/3}} \right]; \quad (20.25)$$

$$St_0 = \left( \frac{0.22}{Re_{T**}} \right) \left[ \frac{1}{Pr^{4/3}} \right];$$

для турбулентного режима  $Re_{**} > Re_{**cr} \approx 400$  :

$$\begin{aligned}\frac{c_{f0}}{2} &= \left( \frac{0.0128}{\text{Re}_{**}^{0.25}} \right); \\ \text{St}_{D0} &= \left( \frac{0.0128}{\text{Re}_{D**}^{0.25}} \right) \left[ \frac{1}{\text{Pr}_D^{0.75}} \right]; \\ \text{St}_0 &= \left( \frac{0.0128}{\text{Re}_{T**}^{0.25}} \right) \left[ \frac{1}{\text{Pr}^{0.75}} \right];\end{aligned}\quad (20.26)$$

Если значения коэффициентов температуропроводности, диффузии и кинематической вязкости теплоносителя одинаковы, т.е.

$$\text{Pr} \equiv \frac{\nu}{a} = 1; \quad \text{Pr}_D \equiv \frac{\nu}{D} = 1, \quad (20.27)$$

то динамический, диффузионный и тепловой пограничные слои развиваются одинаково, их толщины и локальные числа Рейнольдса одинаковы. В результате из формулировок стандартных законов (20.25), (20.26) следует:

$$\frac{c_{f0}}{2} = \text{St}_{D0} = \text{St}_0. \quad (20.28)$$

Эти равенства являются выражением так называемой *тройной аналогии* между процессами переноса импульса, массы компонента смеси и энергии.

В основе аналогии лежит единообразие формулировок уравнений сохранения (уравнений (20.14)–(20.16) при  $j = 0$ ,  $dP/dx=0$ ) и законов переноса (20.17)–(20.19). Условием аналогии является также *однотипность граничных условий* на поверхности раздела: задается постоянная температура, постоянная концентрация и постоянная скорость среды.

Границы аналогии ставятся различиями в структуре математического описания динамической задачи (20.14), с одной стороны, и тепловой (20.15) или массообменной (20.16) задач, с другой. Уравнение импульсов (20.14) содержит в правой части *оператор сил давления*, не имеющий аналога в двух других уравнениях (20.15) и (20.16). Поэтому для течений с отличным от нуля продольным градиентом давления,  $dP/dx \neq 0$ , аналогия между сопротивлением и теплоотдачей (массоотдачей) нарушается. В особенности это относится к отрывным течениям.

С другой стороны, благодаря сходству структуры уравнений теплового и диффузионного пограничных слоев (20.15) и (20.16), *аналогия между тепло- и массообменом* имеет более широкую область применения. Практическая полезность такой "двойной" аналогии определяется тем, что обширная база данных по теплообмену может быть использована для решения гораздо менее исследованных задач массообмена.

Предметом анализа в дальнейшем является *влияние поперечного потока массы  $j$  на трение и теплообмен*. Для многих практически важных задач двухфазного теплообмена при течениях с небольшими

градиентами давления именно эта проблема является существенной. Воздействие продольного градиента давления  $dP/dx$  является специальным вопросом, не рассматриваемым здесь. Отметим только, что законы теплообмена и массообмена *консервативны* по отношению к фактору градиента давления, в то время как трение существенно зависит от него.

При описании эффекта проницаемости стенки применим прием *факторизации*, т.е. представим расчетные соотношения в виде *произведения* множителей, каждый из которых зависит от единственного влияющего параметра (или выделенной группы параметров).

Стандартные законы (20.25), (20.26), уже даны в факторизованной форме, что подчеркивается применением скобок:

- тройная аналогия (см. (20.27), (20.28)) выражается множителями в круглых скобках
- влияние физических свойств теплоносителей отражается множителями (факторами) в квадратных скобках, зависящими от числа Прандтля.

В следующем параграфе в законы трения, массообмена и теплообмена вводится *фактор проницаемости* стенки, определяемый поперечным потоком массы при вдувании (blowing) или отсасывании (suction) через поверхность раздела, или, соответственно, при испарении или конденсации.

## 20.6 ВЛИЯНИЕ ПОПЕРЕЧНОГО ПОТОКА МАССЫ

Изменение трения, тепло- и массообмена под влиянием поперечного потока массы через проницаемую поверхность раздела учитывается *корректирующими факторами*  $\Psi$ :

$$\Psi \equiv \left( \frac{c_f}{c_{f0}} \right)_{Re^{**}} ; \quad \Psi_D \equiv \left( \frac{St_D}{St_{D0}} \right)_{Re_{D^{**}}} ; \quad \Psi_T \equiv \left( \frac{St}{St_0} \right)_{Re_{T^{**}}} , \quad (20.29)$$

которые задают отношения истинных (при включенном вдуве/отсосе) и стандартных (при нулевом вдуве/отсосе) коэффициентов трения и чисел Стантона. Сопоставление производится при фиксированных значениях числа Рейнольдса  $Re^{**}$  (для трения), или  $Re_{D^{**}}$  (для массообмена), или  $Re_{T^{**}}$  (для теплообмена), т.е. при фиксированных значениях толщин пограничного слоя (см. формулы (20.23)).

Величина  $\Psi$  – фактора зависит от поперечного потока массы  $j$ , фигурирующего в правых частях уравнений пограничного слоя (20.14), (20.15), (20.16). Безразмерный *параметр проницаемости*  $b$ , пропорциональный поперечному потоку  $j$ , получают при нормировании правых частей уравнений пограничного слоя:

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dx}((\rho u_\infty^2) \delta_{**}) &= (\rho u_\infty^2) \left( \frac{\tau}{\rho u_\infty^2} + \frac{j u_\infty}{\rho u_\infty^2} \right) \equiv (\rho u_\infty^2) \left( \frac{c_f}{2} + \frac{j}{\rho u_\infty} \right) \equiv \\
 &\equiv (\rho u_\infty^2) \frac{c_f}{2} \underbrace{\left( 1 + \frac{j}{\rho u_\infty} \frac{1}{\frac{c_f}{2}} \right)}_{b_1} \equiv (\rho u_\infty^2) \frac{c_{f0}}{2} \underbrace{\left( \Psi + \frac{j}{\rho u_\infty} \frac{1}{\frac{c_{f0}}{2}} \right)}_b
 \end{aligned} \tag{20.30}$$

$$\begin{aligned}
 \Delta c_V &\equiv c_{V\infty} - c_{V0}; \\
 \frac{d}{dx}((\rho u_\infty \Delta c_V) \delta_{D**}) &= (\rho u_\infty \Delta c_V) \left( \frac{-j_{DV}}{\rho u_\infty \Delta c_V} + \frac{j \Delta c_V}{\rho u_\infty \Delta c_V} \right) \equiv \\
 &\equiv (\rho u_\infty \Delta c_V) St_D \underbrace{\left( 1 + \frac{j}{\rho u_\infty} \frac{1}{St_D} \right)}_{b_{D1}} \equiv \\
 &\equiv (\rho u_\infty \Delta c_V) St_{D0} \underbrace{\left( \Psi_D + \frac{j}{\rho u_\infty} \frac{1}{St_{D0}} \right)}_{b_D};
 \end{aligned} \tag{20.31}$$

$$\begin{aligned}
 \Delta t &\equiv t_\infty - t_s; \\
 \frac{d}{dx}((\rho u_\infty c_p \Delta t) \delta_{T**}) &= (\rho u_\infty c_p \Delta t) \left( \frac{-q}{\rho u_\infty c_p \Delta t} + \frac{j c_p \Delta t}{\rho u_\infty c_p \Delta t} \right) \equiv \\
 &\equiv (\rho u_\infty c_p \Delta t) St \underbrace{\left( 1 + \frac{j}{\rho u_\infty} \frac{1}{St} \right)}_{b_{T1}} \equiv \\
 &\equiv (\rho u_\infty c_p \Delta t) St_0 \underbrace{\left( \Psi_T + \frac{j}{\rho u_\infty} \frac{1}{St_0} \right)}_{b_T}
 \end{aligned} \tag{20.32}$$

Если граничные условия поставлены так, что значения  $u_\infty$ ,  $\Delta t$ ,  $\Delta c$  постоянны вдоль поверхности, то уравнения пограничного слоя представляются в компактной безразмерной форме:  
уравнение динамического пограничного слоя:

$$\frac{d}{dx}(\delta_{**}) = \frac{c_{f0}}{2} \left( \Psi + \frac{j}{\underbrace{\rho u_{\infty} c_{f0} / 2}_b} \right) \quad (20.33)$$

уравнение диффузионного пограничного слоя:

$$\frac{d}{dx}(\delta_{D**}) = St_{D0} \left( \Psi_D + \frac{j}{\underbrace{\rho u_{\infty} St_{D0}}_{b_D}} \right) \quad (20.34)$$

уравнение теплового пограничного слоя:

$$\frac{d}{dx}(\delta_{T**}) = St_0 \left( \Psi_T + \frac{j}{\underbrace{\rho u_{\infty} St_0}_{b_T}} \right). \quad (20.35)$$

Как видно, воздействие поперечного потока массы определяется безразмерными параметрами проницаемости  $b$  трех видов, соответственно для динамической, диффузионной и тепловой задачи:

$$b \equiv \frac{j_I}{\rho u_{\infty} c_{f0} / 2}; \quad b_D \equiv \frac{j_I}{\rho u_{\infty} St_{D0}}; \quad b_T \equiv \frac{j_I}{\rho u_{\infty} St_0}. \quad (20.36)$$

Принимают, что  $\Psi$ -факторы (20.29) являются функциями этих параметров:

$$\Psi = \Psi(b); \quad \Psi_D = \Psi_D(b_D); \quad \Psi_T = \Psi_T(b_T) \quad (20.37)$$

Следуя идее построения приближенных факторизованных соотношений, влияние фактора проницаемости рассматривают для базовой задачи, когда выполняются условия тройной аналогии, т.е для *безградиентного* течения при  $Pr = Pr_D = 1$ . Тогда математическое описание задач трения, теплообмена и массообмена выглядит одинаково с точностью до обозначения величин (см., например, (20.33),(20.34),(20.35)), и значения параметров проницаемости  $b$  будут одинаковы, так же как и значения корректирующих функций  $\Psi$ :

$$b = b_D = b_T; \quad \Psi = \Psi_D = \Psi_T \quad (20.38)$$

Введенная для такого базового решения функция

$$\Psi = \Psi(b) \quad (20.39)$$

рассматривается как дополнительный фактор (множитель), учитывающий влияние поперечного потока массы на трение, массообмен и теплообмен в стандартных формулировках (20.25), (20.26):

$$\begin{aligned}
 c_f(\text{Re}_{**}, b) &= c_{f0}(\text{Re}_{**}) \cdot \Psi(b); \\
 St(\text{Re}_{**}, \text{Pr}, b_T) &= St_0(\text{Re}_{**}, \text{Pr}) \cdot \Psi(b_T); \\
 St_D(\text{Re}_{D**}, \text{Pr}_D, b_D) &= St_{D0}(\text{Re}_{D**}, \text{Pr}_D) \cdot \Psi(b_D).
 \end{aligned}
 \tag{20.40}$$

Например, для тепловой задачи при ламинарном режиме:

$$\begin{aligned}
 St(\text{Re}_{**}, \text{Pr}, b_T) &= \\
 &= St_0(\text{Re}_{**}, \text{Pr}) \cdot \Psi(b_T) = \left( \frac{0.22}{\text{Re}_{**}} \right) \left[ \frac{1}{\text{Pr}^{4/3}} \right] \cdot \{\Psi(b_T)\}.
 \end{aligned}
 \tag{20.41}$$

Функцию  $\Psi(b)$  получают при решении *полных* уравнений пограничного слоя (в частных производных) или из экспериментальных данных. Аппроксимации для  $\Psi(b)$  задаются следующими формулами (см. также Рис. 20.3):

для ламинарного режима:

$$\Psi = \left( 1 - \frac{b}{5.51} \right)^{2.37}, \quad b_{as} < b \leq 0 \quad b_{as} = -2.268$$

$$\Psi = \left( 1 - \frac{b}{b_{cr}} \right)^{1.4825}, \quad 0 < b < b_{cr} \quad b_{cr} = 3.478.$$

для турбулентного режима (формула Кутателадзе-Леонтьева):

$$\Psi = \left( 1 - \frac{b}{4} \right)^2, \quad b_{as} = -4 \quad b_{cr} = 4.$$

Указанные рядом с формулами значения  $b$  с индексами  $as$  и  $cr$  являются пределами асимптотического отсоса и критического вдува.

При асимптотическом отсосе уравнение динамического пограничного слоя (20.14) имеет точку равновесия: правая часть дифференциального уравнения обращается в ноль. Поэтому поток импульса в пределах пограничного слоя (выражение в скобках под знаком дифференциала) перестает изменяться при течении вдоль поверхности, а напряжение трения на стенке оказывается равным поперечному потоку импульса:

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dx}(\rho u_\infty \delta_{**} u_\infty) &= 0; \quad \tau + j u_\infty = 0 \Rightarrow \\
 \rho u_\infty \delta_{**} u_\infty &= const; \quad \tau = (-j) u_\infty
 \end{aligned}
 \tag{20.44}$$

Из уравнений (20.30), (20.31), (20.32) следует, что в пределе асимптотического отсоса



$$\Psi(b_{as}) = -b_{as} \quad (20.45)$$

В случае критического вдува напряжение трения на стенке обращается в ноль, пограничный слой оттесняется от стенки. В результате на некотором удалении от стенки формируется свободный сдвиговый слой с характерным  $S$ -образным профилем, а непосредственно вблизи поверхности образуется область неподвижного (в продольном направлении) газа с постоянной температурой и концентрацией.

При испарении (вдуве в парогазовый пограничный слой на поверхности раздела) коэффициенты трения и тепломассообмена уменьшаются с ростом параметра проницаемости (т.е. с ростом скорости испарения). Напротив, при конденсации (отсосе из парогазового пограничного слоя) коэффициенты трения и тепломассообмена увеличиваются по мере увеличения скорости конденсации (Рис. 20.3).

Формулы (20.42) и (20.43) дают близкие значения (Рис. 20.3), если оставаться на удалении от предельных значений параметра проницаемости, поэтому в качестве универсальной зависимости  $\Psi(b)$  иногда принимают формулу Кутателадзе–Леонтьева (20.43).

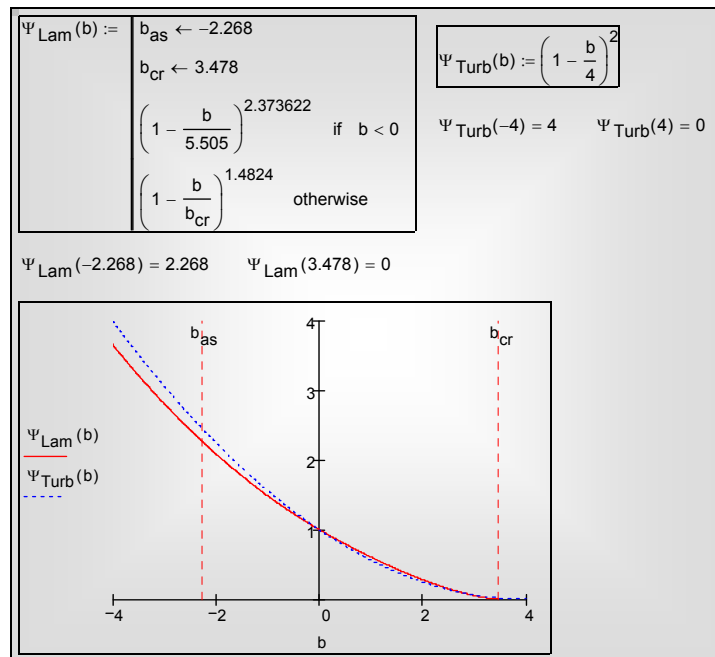


Рис. 20.3. Корректирующий фактор (на графике отмечены значения  $b_{as}$  и  $b_{cr}$  для ламинарного режима)

Блоки Mathcad-программ, реализующие вычисления и диаграммы на рисунках, доступны по ссылке:

[..\Mathcad\\_HMT\20\\_Mass\\_Transfer\\_Cond\\_Evap\Psi\\_bD1\\_Lam\\_vs\\_Turb\\_new\\_1\\_fig\\_3-8.xmcdz](#).

*Важное замечание.* Как уже отмечалось выше, законы теплообмена и массообмена *консервативны* по отношению к ускорению или замедлению внешнего потока. Однако это приближение несправедливо для гидродинамической задачи. Поэтому корректирующий фактор для коэффициента трения в формулах (20.40), вообще говоря, дополнительно зависит от параметра ускорения потока.

Располагая

- интегральными уравнениями пограничного слоя (20.14), (20.15), (20.16)
- стандартными законами (20.25), (20.26)
- аппроксимациями (20.42), (20.43) для корректирующего фактора  $\Psi$

можно решить широкий круг инженерных задач тепломассообмена при разнообразных граничных условиях на поверхностях раздела. Пример интегрирования системы (20.14), (20.15), (20.16) приводится далее в §20.8.

## 20.7 СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ ПОЛУПРОНИЦАЕМОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Как следует из (20.30), (20.31), (20.32), параметр проницаемости  $b$  применяется также в другой модификации, включающей истинное (не стандартное) число Стантона. Например, для диффузионной задачи:

$$b_{D1} \equiv \frac{j}{\rho u_\infty} \frac{1}{St_D}. \quad (20.46)$$

Связь между двумя модификациями параметра проницаемости устанавливается при почленном делении определяющих соотношений (20.36), (20.46):

$$b_D / b_{D1} = \frac{St_D}{St_{D0}} \equiv \Psi_D \quad \text{или} \quad b / b_1 = \Psi. \quad (20.47)$$

В задачах конденсации и испарения параметр проницаемости  $b_1$  может быть явно выражен через характерные концентрации компонентов парогазовой смеси. Для *полупроницаемой* границы раздела фаз (*проницаемой* для пара как компонента парогазовой смеси и практически *непроницаемой* для слабо растворимого в воде газа) ранее было получено соотношение (20.5):

$$j_{v,conduct} = j \cdot (1 - c_v); \quad j = j_v.$$

Из определения (20.46) и соотношения (20.5) следует выражение для параметра проницаемости  $b_{D1}$  через характерные значения концентрации:

$$b_{D1} \equiv \frac{j}{\rho u_\infty} \frac{1}{St_D} = \frac{\frac{j_{v,conduct}}{1-c_{vI}}}{\rho u_\infty} \frac{1}{\frac{j_{v,conduct}}{\rho u_\infty (c_{vI} - c_{v\infty})}} = \frac{c_{v,0} - c_{v,\infty}}{1 - c_{v,0}} \quad (20.48)$$

или, т.к.  $c_v = 1 - c_g$ :

$$b_1 = b_{D1} = \frac{c_{g,\infty}}{c_{g,0}} - 1 = M_{\infty,0} - 1; \quad M_{\infty,0} \equiv \frac{c_{g,\infty}}{c_{g,0}} \quad (20.49)$$

где  $M_{\infty,0}$  – характерное отношение концентраций инертного газа в ядре потока и на межфазной границе.

Формула Кутателадзе – Леонтьева (20.43) с учетом (20.47), (20.49) переписывается после несложных преобразований следующим образом в форме зависимости от параметра  $b_1$  (или от отношения концентраций):

$$\Psi = \frac{4}{2 + b_1 + 2\sqrt{1 + b_1}}; \quad \Psi = \frac{4}{(1 + \sqrt{M_{\infty,0}})^2} \quad (20.50)$$

Аппроксимация для ламинарного режима получается из соотношений (20.47), (20.42) и задается в форме несложного численного алгоритма. Графическое представление результатов дано на Рис. 20.4.

Специальное выражение (20.49) для параметра проницаемости  $b_1$  через характерные значения концентрации инертного газа и аппроксимации для корректирующего фактора  $\Psi(b_1)$  (см. формулы (20.50) и Рис. 20.4) эффективно применяются для решения задач тепломассообмена при конденсации и испарении.

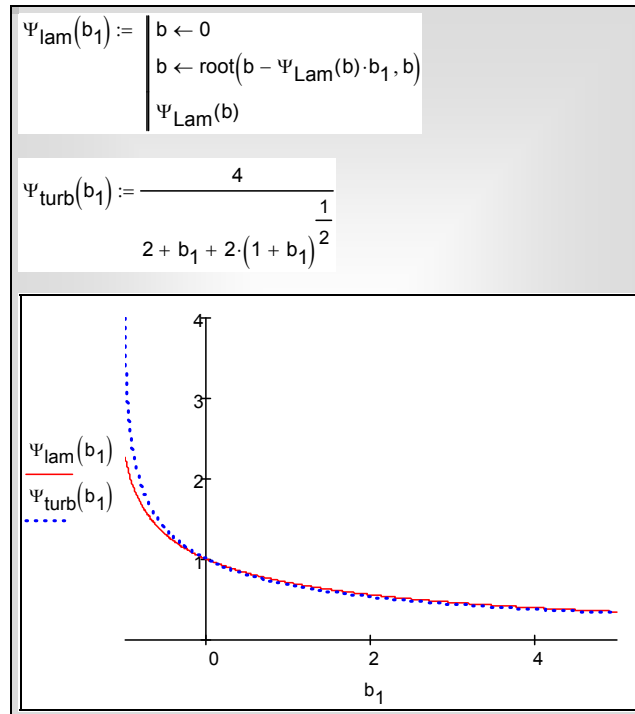


Рис. 20.4. Корректирующий фактор  $\Psi$  как функция от параметра проницаемости  $b_1$

### 20.8 ТЕПЛОМАССОБМЕН ПРИ ПРОДОЛЬНОМ ОБТЕКАНИИ ПЛОСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ: РЕШЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫМ МЕТОДОМ

С целью определить влияние примесей инертных газов на тепломассообмен при конденсации и испарении мы решим далее интегральным методом следующую модельную задачу для *развивающихся* течений: пограничных слоев при внешнем обтекании, начальных участков каналов и т.п. Парогазовая смесь движется вдоль изотермической поверхности со скоростью  $u_\infty$ . Заданы постоянные значения концентрации инертного газа на стенке и вдали от нее  $c_{g,0}$ ,  $c_{g,\infty}$ . Требуется найти локальные значения плотности потока массы паровой компоненты смеси через границу, то есть определить скорость конденсации/испарения, а также трение на поверхности.

Интегральные уравнения пограничного слоя (20.33), (20.34), (20.35) переписывается в безразмерном виде следующим образом:

$$\frac{d Re_{**}}{d Re_x} = \frac{c_{f0}}{2} (\Psi(b) + b); \quad (20.51)$$

$$\frac{d Re_{D**}}{d Re_x} = St_{D0} (\Psi(b) + b); \quad (20.52)$$

$$\frac{d Re_{T**}}{d Re_x} = St_0 (\Psi(b) + b), \quad (20.53)$$

где

$$Re_x \equiv \frac{u_\infty x}{\nu}. \quad (20.54)$$

После подстановки в (20.51), (20.52), (20.53) стандартных законов (20.25) для ламинарного режима и разделения переменных:

$$\begin{aligned} \frac{d Re_{**}}{d Re_x} &= \left( \frac{0.22}{Re_{**}} \right) (\Psi(b) + b); \\ Re_{**} d Re_{**} &= [0.22 (\Psi(b) + b)] \cdot d Re_x \end{aligned}$$

полученные уравнения просто интегрируются:

$$Re_{**} = \sqrt{0.44 Re_x} \sqrt{\Psi(b) + b} \quad (20.55)$$

$$Re_{D**} = \sqrt{\frac{0.44 Re_x}{Pr_D^{4/3}}} \sqrt{\Psi(b) + b} \quad (20.56)$$

$$Re_{T**} = \sqrt{\frac{0.44 Re_x}{Pr^{4/3}}} \sqrt{\Psi(b) + b} \quad (20.57)$$

Уравнения (20.55)–(20.57) показывают, как развиваются динамический, диффузионный и тепловой ламинарные пограничные слои вдоль поверхности, через которую проходят потоки вещества (на поверхности раздела фаз происходит конденсация или испарение). Из графиков на Рис. 20.5 видно, что отсос из парогазового слоя при конденсации ( $b < 0$ ) приводит к уменьшению, а вдув при испарении ( $b > 0$ ) – к увеличению толщины пограничного слоя.

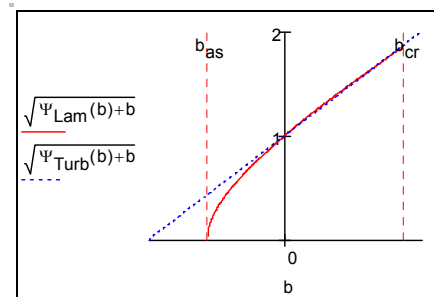


Рис. 20.5. Фактор  $(\Psi+b)^{1/2}$ , определяющий влияние параметра проницаемости на толщину пограничного слоя

Отметим, что интегрирование уравнений пограничного слоя (20.33), (20.34), (20.35) выполняется аналитически, благодаря простым условиям на поверхности. В других случаях может потребоваться численное интегрирование системы ОДУ. В инженерных математических пакетах (Mathcad, Matlab) имеются эффективные встроенные процедуры для выполнения таких вычислений.

Итак, располагая

- интегральными уравнениями пограничного слоя (20.14)–(20.16),
- стандартными законами трения, массоотдачи, теплоотдачи (20.25)–(20.26)
- и коррекциями на поперечный поток массы (20.42)–(20.43),

можно приближенно моделировать самые сложные задачи тепломассообмена в пограничных слоях (см. также главы [14](#) и [15](#) Электронного курса).

## 20.9 ФАКТОРИЗОВАННЫЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ ТРЕНИЯ, МАССОТДАЧИ, ТЕПЛОТДАЧИ

В предыдущем параграфе мы завершили рассмотрение собственно интегрального метода пограничного слоя, позволяющего свести задачу конвективного тепломассообмена, описываемую сложной системой уравнений в частных производных, к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

План дальнейшего изложения будет следующим. Мы выявим *факторизованную* структуру (см. далее формулы (20.61)–(20.63)) расчетных формул, к которым приводит интегральный метод для *простой классической задачи* массообмена при обтекании плоской поверхности. Мы обобщим далее метод факторизации на широкий круг практически важных задач, вводя *фактор проницаемости*  $\Psi_x$  в известные расчетные соотношения из богатого арсенала инженерных формул для теплоотдачи *непроницаемых* поверхностей.

Вычислим истинные, с учетом коррекции на поперечный поток массы, значения коэффициента трения и чисел Стантона для ламинарного пограничного слоя, посредством подстановки решений (20.55)–(20.57) для  $Re_{x**}$ ,  $Re_{D**}$ ,  $Re_{\Gamma**}$  в соотношения вида (20.41). Проведем эти подстановки подробно для теплоотдачи:

$$\begin{aligned} St &= St_0 \Psi = \\ &= \left( \frac{0.22}{Re_{x**}} \right) \left[ \frac{1}{Pr^{4/3}} \right] \Psi = \left( \frac{0.22}{\sqrt{\frac{0.44 Re_x}{Pr^{4/3}} \sqrt{\Psi(b)+b}}} \right) \left[ \frac{1}{Pr^{4/3}} \right] \Psi = \\ &= \left( \frac{0.33}{Re_x^{0.5}} \right) \cdot \left[ \frac{1}{Pr^{2/3}} \right] \cdot \left\{ \frac{\Psi}{\sqrt{\Psi+b}} \right\} = St_{j=0} \Psi_x \end{aligned} \quad (20.58)$$

Результирующее соотношение в последней строке (20.62) имеет факторизованную структуру:

- множитель  $St_{j=0}$  описывает теплоотдачу пластины в пределе нулевого поперечного потока ( $b, b_1 \rightarrow 0$ ), т.е. для непроницаемой поверхности:

$$St_{j=0} = \left( \frac{0.33}{Re_x^{0.5}} \right) \cdot \left[ \frac{1}{Pr^{2/3}} \right] \quad (20.59)$$

- множитель  $\Psi_x$  вводит коррекцию на конечные значения поперечного потока массы:

$$\Psi_x = \frac{\Psi}{\sqrt{\Psi+b}} \quad (20.60)$$

Отметим, что, как и следовало ожидать, полученное интегральным методом выражение для  $St_{j=0}$  совпадает с классическим решением задачи о теплоотдаче пластины в продольном потоке. Это выражение также факторизовано:

- множитель, содержащий число  $Re_x$ , отражает влияние гидродинамики потока,
- множитель, содержащий число  $Pr$ , учитывает свойства теплоносителей.

После аналогичных вычислений для трения и массоотдачи получают

$$\frac{c_f}{2} = \frac{c_{f,j=0}}{2} \Psi_x = \left( \frac{0.33}{Re_x^{0.5}} \right) \cdot \left\{ \frac{\Psi}{\sqrt{\Psi+b}} \right\} \quad (20.61)$$

$$St_D = St_{D,j=0} \Psi_x = \left( \frac{0.33}{Re_x^{0.5}} \right) \cdot \left[ \frac{1}{Pr_D^{2/3}} \right] \cdot \left\{ \frac{\Psi}{\sqrt{\Psi + b}} \right\} \quad (20.62)$$

$$St = St_{j=0} \Psi_x = \left( \frac{0.33}{Re_x^{0.5}} \right) \cdot \left[ \frac{1}{Pr^{2/3}} \right] \cdot \left\{ \frac{\Psi}{\sqrt{\Psi + b}} \right\}. \quad (20.63)$$

В соответствии с методом приближенной факторизации (см. комментарии к формуле (20.41)), используется единый параметр проницаемости, рассчитываемый по соотношениям (20.47), (20.49):

$$b = b_1 \Psi(b_1); \quad b_1 = M_{\infty 0} - 1; \quad M_{\infty 0} \equiv \frac{c_{g,\infty}}{c_{g,0}}. \quad (20.64)$$

Укажем на различия между корректирующими факторами  $\Psi$  и  $\Psi_x$ . Согласно определению (20.29), фактор  $\Psi$  учитывает воздействие вдува или отсоса на *структуру* пограничного слоя, при его неизменной толщине (точнее, при фиксированной толщине потери импульса  $\delta^{**}$ , или потери концентрации  $\delta_{D^{**}}$ , или потери энтальпии  $\delta_{T^{**}}$ ). Изменения структуры состоят:

- при вдуве – в характерной S-образной деформации распределений скорости, температуры, концентрации по толщине пограничного слоя, с уменьшением градиентов вблизи поверхности;
- при отсосе – напротив, в образовании более заполненных профилей с большими градиентами непосредственно на поверхности.

Корректирующий фактор  $\Psi_x$  (для ламинарного пограничного слоя),

$$\Psi_x = \frac{\Psi}{\sqrt{\Psi + b}} = \frac{\sqrt{\Psi}}{\sqrt{1 + \frac{b}{\Psi}}} = \frac{\sqrt{\Psi}}{\sqrt{1 + b_1}}, \quad (20.65)$$

учитывает *полный* эффект вдува или отсоса, как структурный, так и связанный с изменением толщины развивающихся пограничных слоев под влиянием вдува или отсоса. При вдуве (испарении в парогазовый пограничный слой) происходит увеличение толщины пограничного слоя. Напротив, при отсосе (конденсации) пограничный слой в парогазовом потоке становится значительно тоньше, чем для обтекания непроницаемой поверхности при той же скорости набегающего потока.

Решение модельной задачи для случая турбулентного режима производится аналогично, и мы приведем только окончательный результат для фактора  $\Psi_x$ :



$$\Psi_x = \frac{\Psi}{(\Psi + b)^{0.2}} \equiv \frac{\Psi^{0.8}}{(1 + b_1)^{0.2}} \quad (20.66)$$

Функциональная зависимость  $\Psi_x(b_1)$  представлена на Рис. 20.6. Полезно сопоставить ее с аналогичной зависимостью для фактора  $\Psi$  (см. Рис. 20.4).

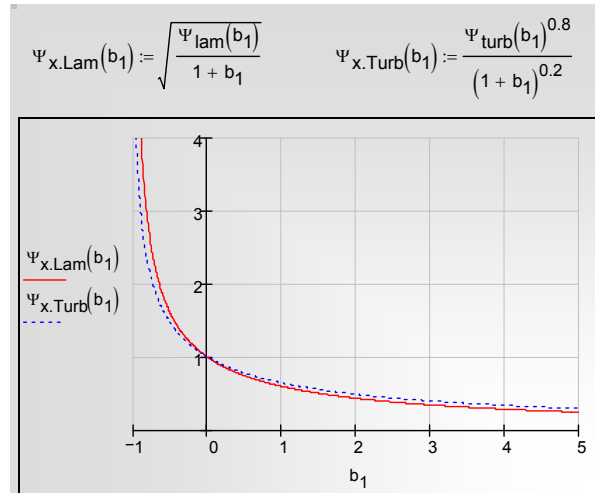


Рис. 20.6. Корректирующий фактор  $\Psi_x$  к инженерным расчетным формулам

Влияние поперечного потока массы (вдува/испарения или отсоса/конденсации) на теплоотдачу при обтекании пластины графически представлено на Рис. 20.7. При построении применен приближенный расчетный прием интерполяции между ламинарной и турбулентной асимптотами. Видно, что при сильном отсосе ( $b_1 = -0.99$ ) ламинарный режим сохраняется до больших значений числа Рейнольдса, чем при вдуве ( $b_1 = 3$ ). Это примерно отражает тенденцию, известную из исследований устойчивости течений.

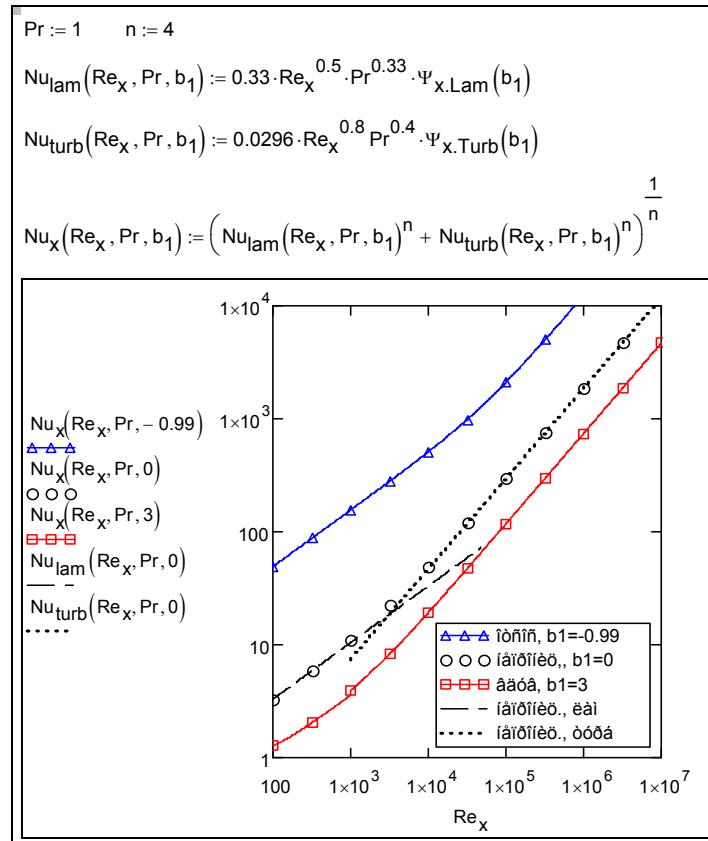


Рис. 20.7. Критериальные зависимости для теплоотдачи на проницаемой пластине

Некоторое упрощение, несущественное при компьютерных вычислениях, но полезное для компактного представления расчетных рекомендаций, возможно вследствие близости исходных аппроксимаций  $\Psi(b)$  для ламинарного (20.42) и турбулентного (20.43) режима, в области их применимости (см. Рис. 20.3). Сопоставление для фактора  $\Psi_x$  представлено на Рис. 20.8. Видно, что расчет  $\Psi_x(b_1)$  по «ламинарной» формуле (20.62) дает практически одинаковые результаты, если взять в качестве исходной аппроксимации  $\Psi(b)$  (20.42) или (20.43); в пределе сильного отсоса различие составит примерно 25%. Расчетные соотношения на основе (20.43) имеют более простую явную форму.

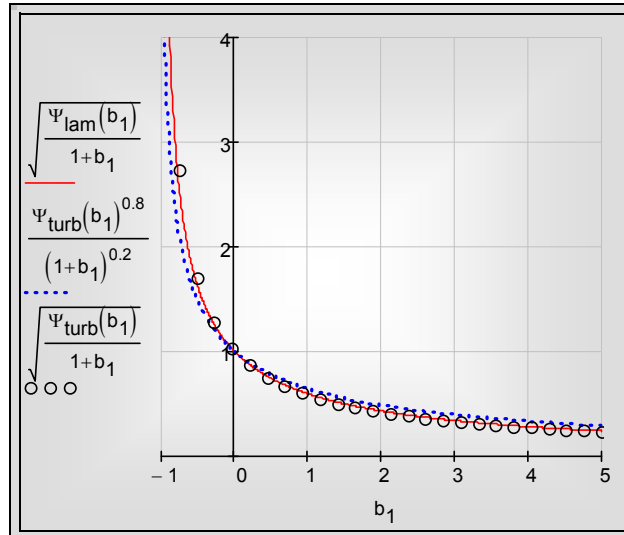


Рис. 20.8. Сопоставление аппроксимаций для  $\Psi_x$  на основе (20.42) или (20.43)

Компактные расчетные рекомендации для  $\Psi_x$  получают, принимая во внимание близость аппроксимаций в области вдува и слабого отсоса, а также большую актуальность ламинарного режима при сильном отсосе вследствие известного эффекта стабилизации течения. Поэтому, имея в виду приближенный характер методики факторизации, можно применить формулу Кутателадзе–Леонтьева (20.50) для  $\Psi$  и принять ламинарную формулу (20.65) для  $\Psi_x$  как универсальную:

$$\Psi_{KL} = \frac{4}{2 + b_1 + 2\sqrt{1 + b_1}};$$

$$\Psi_x = \frac{\sqrt{\Psi}}{\sqrt{1 + b_1}} = \frac{2}{(1 + \sqrt{M_{\infty 0}})} \frac{1}{\sqrt{M_{\infty 0}}}. \quad (20.67)$$

## 20.10 ОБОБЩЕНИЕ МЕТОДА ФАКТОРИЗАЦИИ

Метод факторизации позволяет придать формулам (20.61)–(20.63) более общий смысл, чем только как решению конкретной задачи о продольном обтекании пластины. Предполагают, что фактор  $\Psi_x$  поперечного потока массы может быть применен для широкого круга других задач, если заменить в формулах (20.61)–(20.63) выражения в круглых и квадратных скобках (это факторы скорости потока и свойств теплоносителя) другими

формулами из арсенала инженерных расчетных соотношений для *непроницаемых* поверхностей.

Например, в формуле (20.62) число  $St_{D,j=0}$  рассчитывается по формуле для вынужденного продольного обтекания *непроницаемой плоской поверхности*:

$$St_{D,j=0} = \left( \frac{0.33}{Re_x^{0.5}} \right) \cdot \left[ \frac{1}{Pr_D^{2/3}} \right].$$

Но если бы рассматривалась задача о *массоотдаче* при *обтекании шахматного пучка труб*, то следовало бы воспользоваться известной соответствующей «тепловой» формулой:

$$St_{j=0} = \left( \frac{0.4}{Re_d^{0.4}} \right) \cdot \left[ \frac{1}{Pr^{0.64}} \right] \rightarrow St_{D,j=0} = \left( \frac{0.4}{Re_d^{0.4}} \right) \cdot \left[ \frac{1}{Pr_D^{0.64}} \right],$$

где  $Re_d$  –число Рейнольдса по диаметру обтекаемой трубы как характерному размеру. В результате, для расчета массоотдачи в пучке труб получают:

$$St_D = St_{D,j=0} \Psi_x = \left( \frac{0.4}{Re_d^{0.4}} \right) \cdot \left[ \frac{1}{Pr_D^{0.64}} \right] \cdot \left\{ \frac{\Psi}{\sqrt{\Psi + b}} \right\}$$

Факторизация – это простой приближенный способ решения сложных задач теплообмена. Его достоинством является оперативность, возможность решить простыми методами сложные инженерные задачи. Эффективность метода определяется правильным воспроизведением асимптотического поведения решений при изменении параметра проницаемости в широких пределах – от асимптотического отсоса до критического вдува (см. графическое представление решений на Рис. 20.4, Рис. 20.6). Исходные соотношения метода, такие как стандартные законы (20.25), (20.26) или соотношения (20.42), (20.43) для фактора проницаемости, являются надежными аппроксимациями численных решений задач пограничного слоя в полной постановке (в большей степени это относится к ламинарным течениям), а также экспериментальных данных (для турбулентного режима).

Тем не менее, следует помнить, что расширение области применения формул (20.61)–(20.63) посредством метода факторизации является эвристическим приемом, требующим в ответственных ситуациях дополнительных расчетно-теоретических и экспериментальных обоснований.

### 20.11 СКОРОСТЬ ИСПАРЕНИЯ ИЛИ КОНДЕНСАЦИИ

Рассчитаем скорость испарения или конденсации для поставленной в §20.8 модельной задачи о ламинарном обтекании плоской поверхности парогазовой смесью. Исходя из выражения (20.46) для параметра проницаемости:

$$b_1 \equiv \frac{j}{\rho u_\infty} \frac{1}{St_D} \Rightarrow \frac{j}{\rho u_\infty} = St_D b_1 = (St_{D,j=0} \Psi_x) b_1,$$

и принимая во внимание соотношения (20.62) и (20.65) для  $St_D$  и  $\Psi_x$ , выпишем расчетную формулу для скорости конденсации или испарения:

$$\frac{j}{\rho u_\infty} = \left( \frac{0.33}{Pr_D^{2/3} Re_x^{0.5}} \right) \cdot \left\{ \frac{\sqrt{\Psi}}{\sqrt{1+b_1}} \right\} \cdot b_1 \quad (20.68)$$

$$b_1 = M_{\infty 0} - 1 \equiv \frac{c_{g,\infty}}{c_{g,0}} - 1$$

или, в явной форме относительно концентрационного параметра  $M$ :

$$\frac{j}{\rho u_\infty} = \left( \frac{0.33}{Pr_D^{2/3} Re_x^{0.5}} \right) \cdot \left\{ \frac{2}{(1+\sqrt{M_{\infty 0}})} \frac{1}{\sqrt{M_{\infty 0}}} \right\} \cdot (M_{\infty 0} - 1) \quad (20.69)$$

Напомним, что задача решалась при заданных, постоянных по длине концентрациях на поверхности  $c_{g,0}$  и в потоке  $c_{g,\infty}$ . При этих условиях, согласно решению (20.68),

$$j \approx \sqrt{\frac{u_\infty}{x}},$$

т.е. скорость конденсации (или испарения) растет вместе со скоростью парогазового потока и уменьшается по продольной координате.

Множитель в фигурной скобке в формулах (20.68), (20.69) есть корректирующий фактор  $\Psi_x$ , учитывающий влияние поперечного потока массы на интенсивность процессов переноса в пограничном слое (см. также §20.9). При испарении в парогазовую смесь  $c_{g,\infty} > c_{g,0}$ ,  $M_{\infty 0} > 1$ , поэтому  $\Psi_x < 1$ , т.е. интенсивность массоотдачи, как и теплоотдачи и трения, уменьшается. При конденсации из парогазовой смеси  $c_{g,\infty} < c_{g,0}$ ,  $M_{\infty 0} < 1$ , поэтому  $\Psi_x > 1$ , т.е. интенсивность массоотдачи, теплоотдачи и трения увеличивается.

Мы повторим теперь основные идеи §20.10 и обобщим формулы для скорости испарения и конденсации так, чтобы их можно было применить для широкого круга практических задач.

Начнем с уравнения массоотдачи (20.10), записанного для полного потока массы

$$j = \rho \beta \left( \frac{c_{v,0} - c_{v,\infty}}{1 - c_{v,0}} \right)$$

Простые тождественные преобразования приводят его к виду, допускающему обобщение

$$\frac{j}{\rho u_\infty} = \left( \frac{\rho \beta_{j=0}}{\rho u_\infty} \right) \left\{ \frac{\beta}{\beta_{j=0}} \right\} \left( \frac{c_{v,0} - c_{v,\infty}}{1 - c_{v,0}} \right) = St_{D,j=0} \cdot \Psi_x \cdot b_1 \quad (20.70)$$

Множитель  $St_{D,j=0}$  в правой части (20.69) определяет массоотдачу в рассматриваемой системе в пределе нулевого поперечного потока массы. Можно воспользоваться подходящей формулой для теплоотдачи, заменив тепловые величины их массообменными аналогами. Например, для испарения с продольно обтекаемой поверхности при турбулентном режиме:

$$\begin{aligned} Nu &\equiv \frac{\alpha_{j=0} x}{\lambda} = 0.0296 Re_x^{0.8} Pr^{0.4} \Rightarrow \\ &\Rightarrow Nu_D \equiv \frac{\beta_{j=0} x}{D} = 0.0296 Re_x^{0.8} Pr_D^{0.4} \end{aligned} \quad (20.71)$$

Корректирующий множитель  $\Psi_x$  определяется формулами (20.67). Как видно из графического представления (Рис. 20.9), скорость конденсации стремится к бесконечности при значении параметра проницаемости  $b_1$ , близком к отрицательной единице. Скорость испарения относительно медленно растет с увеличением параметра проницаемости.

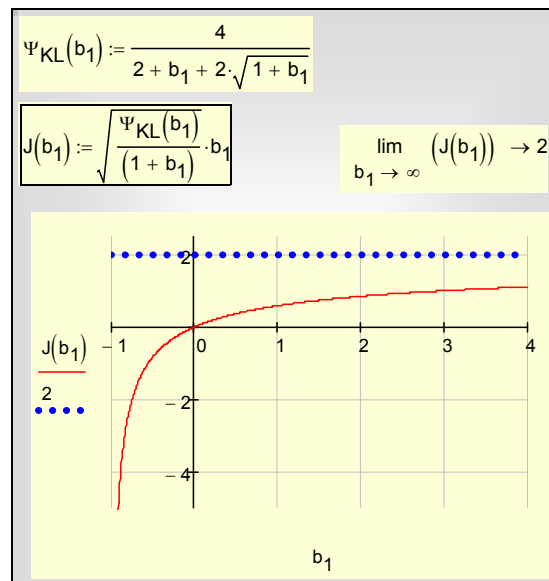


Рис. 20.9. Скорость испарения и конденсации

Область определения концентрационного параметра для задач конденсации:

$$M_{\infty 0} \equiv \frac{c_{g,\infty}}{c_{g,0}} = 0 \div 1; \quad b_1 \equiv M_{\infty 0} - 1 = -1 \div 0.$$

При стремлении параметра  $M_{\infty 0}$  к 1 наблюдается случай “слабой” конденсации:

$$c_{g,\infty} > 0; \quad M_{\infty 0} \equiv \frac{c_{g,\infty}}{c_{g,0}} \rightarrow 1; \quad b_1 \rightarrow 0; \quad \Rightarrow \quad \Psi_x \rightarrow 1; \quad j \sim b_1 \rightarrow 0.$$

При стремлении параметра  $M_{\infty 0}$  к нулю имеет место “сильная” конденсация:

$$c_{g,\infty} \rightarrow 0; \quad M_{\infty 0} \equiv \frac{c_{g,\infty}}{c_{g,0}} \rightarrow 0; \quad b_1 \rightarrow -1; \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Psi_x = \frac{2}{(1 + \sqrt{M_{\infty 0}})} \frac{1}{\sqrt{M_{\infty 0}}} \propto \frac{1}{\sqrt{M_{\infty 0}}}; \quad j \propto -\frac{1}{\sqrt{M_{\infty 0}}} = -\sqrt{\frac{c_{g,0}}{c_{g,\infty}}} \rightarrow -\infty$$

Последнее означает, что диффузионные процессы перестают ограничивать скорость конденсации и лимитирующим фактором становится термическое сопротивление пленки конденсата. Таким образом, реализуется необходимый переход к конденсации чистого (без примесей инертного газа) пара.

При испарении концентрационный параметр положителен:

$$M_{\infty 0} \equiv \frac{c_{g,\infty}}{c_{g,0}} > 1.$$

Предельному переходу к испарению в чистый паровой поток соответствуют бесконечно большие значения концентрационного параметра  $M$  и параметра проницаемости  $b_1$ . В этом случае диффузионные процессы не должны ограничивать величину скорости испарения, в противоречии с существованием предела, показанного на Рис. 20.9 и следующего из формальных предельных переходов соответственно для ламинарного и турбулентного режимов:

$$j \sim \Psi_x b_1 = \Psi_x \frac{b}{\Psi} = \frac{\Psi}{\sqrt{\Psi + b}} \frac{b}{\Psi} \xrightarrow[\Psi \rightarrow 0]{b \rightarrow b_{cr}} \sqrt{b_{cr}};$$

$$j \sim \Psi_x b_1 = \frac{\Psi}{(\Psi + b)^{0.2}} \frac{b}{\Psi} \xrightarrow[\Psi \rightarrow 0]{b \rightarrow b_{cr}} b_{cr}^{0.8} \quad (20.72)$$

Это обстоятельство свидетельствует об определенном недостатке исходных аппроксимаций (20.42), (20.43) для пограничного слоя со вдувом, по-видимому, связанном с нарушением пределов применимости модели пограничного слоя для течений с сильным вдувом, т.е. для течений с большими поперечными скоростями на стенке.

Приемлемые результаты в рассматриваемой предельной ситуации обеспечиваются так называемой *пленочной* моделью (см. следующий параграф, формула (20.82)):

$$\Psi_x = \frac{\ln(1+b_1)}{b_1}. \quad (20.73)$$

Графическое сопоставление зависимостей (20.73) и (20.67) корректирующего фактора от параметра проницаемости (Рис. 20.10) демонстрирует их одинаковый характер и весьма близкие численные значения.

Однако количественные результаты в *предельных* ситуациях различны. Логарифмическая зависимость (20.73) для корректирующего фактора лучше описывает ситуацию при больших вдувах (больших  $b_1$ ), поскольку обеспечивает неограниченный рост скорости испарения по закону  $\ln(1+b_1)$  при переходе к *чистому* пару, вместо стремления к некоторому ограниченному пределу (см. правый график на Рис. 20.10).

С другой стороны, расчеты конденсации пара с исчезающими примесями инертного газа показывают недостаточность логарифмической зависимости (20.73) в *другом асимптотическом пределе* – при сильной конденсации (сильном отсосе): скорость конденсации оказывается слишком малой при таких исчезающих концентрациях инертного газа, которые на основании опыта и точных расчетов считаются уже пренебрежимо малыми, неспособными заметно снизить интенсивность теплообмена.

В результате, можно рекомендовать соотношения (20.67) для расчета конденсации/отсоса ( $b_1 < 0$ ), а соотношения (20.73) – для испарения/вдува ( $b_1 > 0$ ) (функция  $\Psi_x(b_1)$  на Рис. 20.10).



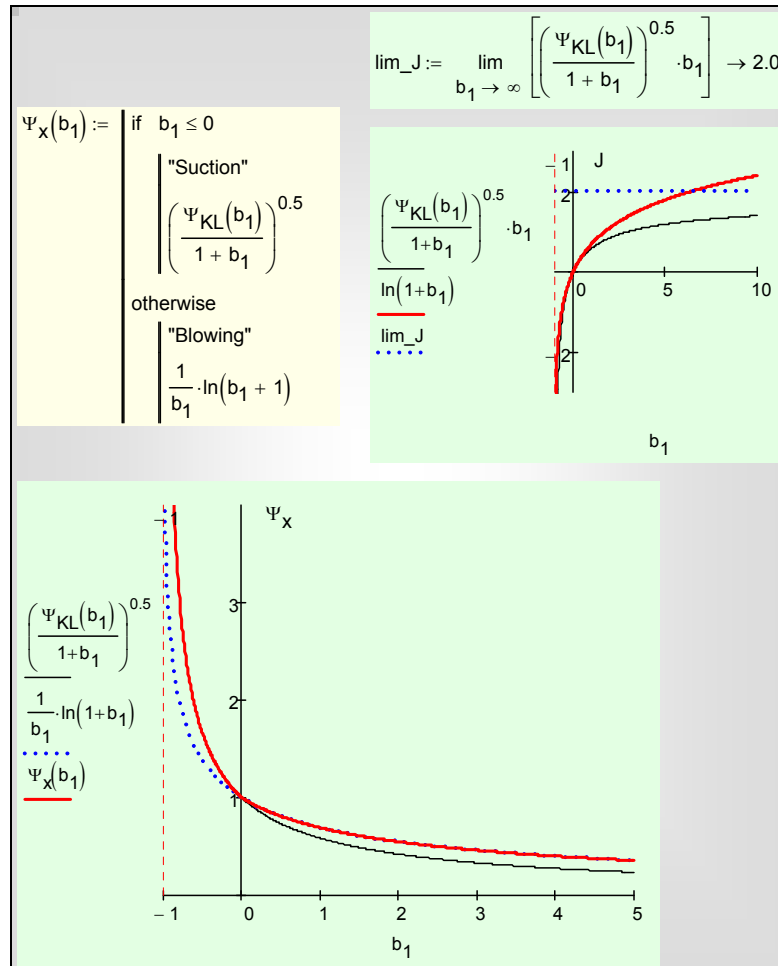


Рис. 20.10. Корректирующие факторы  $\Psi$  и  $\Psi_x$  :

[..\Mathcad HMT\20 Mass Transfer Cond Evap\Psi bD1 Lam vs Turb\\_new 1 fig 9-10 v1.xmcdz](#)

## 20.12 ПЛЕНОЧНАЯ МОДЕЛЬ ТЕПЛОМАССОБМЕНА

Расчетные соотношения в предыдущих разделах получены на основе модели пограничного слоя при продольном обтекании проницаемой пластины. Были отмечены ограничения этой модели для задачи с *интенсивным вдувом* (испарением).

Исследуем проблему на так называемой «плёночной» модели – простейшей одномерной стационарной задаче конвективной диффузии,

имеющей аналитическое решение. Предполагается, что все сопротивление переноса сосредоточено в тонком слое – «пленке», через которую происходит обмен потоками массы и энергии между объемными фазами. В пленке имеют место значительные градиенты концентрации и температуры, в то время как в самих объемных фазах благодаря интенсивному перемешиванию сколько-нибудь заметные изменения этих величин отсутствуют.

Рис. 20.11 иллюстрирует постановку задачи. В плоском слое толщиной  $\delta$  находится парогазовая смесь. Граничные поверхности ( $y = 0$  и  $y = \delta$ ) непроницаемы для инертного компонента, но через них проходит поток активного (испаряющегося или конденсирующегося) компонента смеси. Заданы концентрации инертного газа  $c_{g,0}$  и  $c_{g,\delta}$  на обеих поверхностях. Требуется определить распределение концентрации  $c_g(y)$  в слое (пленке) и найти плотность массового потока. Задача считается одномерной и стационарной.

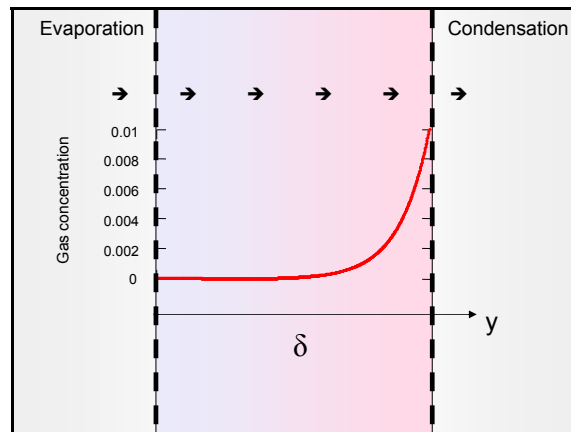


Рис. 20.11. Пленочная модель

Уравнение неразрывности с учетом стационарности и одномерности задачи записывается следующим образом:

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} = -\text{div}(\rho \mathbf{w}) \Rightarrow \text{div}(\rho \mathbf{w}) = 0 \Rightarrow \frac{d}{dy}(\rho v) = 0 \quad (20.74)$$

$$\rho v \equiv j = \text{const}$$

где  $v$  – поперечная, нормальная к поверхности раздела, скорость смеси. Итак, поперечный поток массы смеси  $j$  постоянен по толщине слоя.

Аналогично преобразуется уравнение сохранения для инертного газа:

$$\frac{\partial(\rho c_g)}{\partial \tau} = -\text{div}(\mathbf{j}_g) \Rightarrow \text{div}(\mathbf{j}_g) = 0 \Rightarrow \frac{d}{dy}(j_{g,y}) = 0 \quad (20.75)$$

$$j_{g,y} \equiv j_g = \text{const}$$

где  $j_g$  – поперечный поток газа, постоянный по толщине слоя. Поскольку поверхности ( $y = 0, y = \delta$ ) непроницаемы для газа, постоянная в (20.75) равна нулю, т.е. поток массы газа нулевой по всей толщине слоя. Справедливы следующие соотношения между потоками:

$$j = j_g + j_v = \text{const}; \quad j_g = 0; \quad j = j_v = \text{const} . \quad (20.76)$$

Записывая  $j_g$  как сумму кондуктивной и конвективной составляющих и приравняв получившееся выражение нулю, получим дифференциальное уравнение для концентрации:

$$j_g \equiv -\rho D \frac{dc_g}{dy} + j c_g = 0 . \quad (20.77)$$

Интегрирование в пределах

$$y = 0 \div \delta; \quad c_g = c_{g0} \div c_{g\delta} \quad (20.78)$$

дает:

$$c_g(y) = c_{g0} \exp\left(\frac{j}{\rho D} y\right);$$

$$c_{g\delta} = c_{g0} \exp\left(\frac{j\delta}{\rho D}\right) \Rightarrow j = \rho \frac{D}{\delta} \ln \frac{c_{g\delta}}{c_{g0}} \Rightarrow j = \rho \frac{D}{\delta} \ln(1 + b_1); \quad (20.79)$$

$$b_1 = \frac{c_{g,\infty}}{c_{g,0}} - 1$$

(см. также Рис. 20.12).

Сопоставим полученный результат (20.79) с уравнением массоотдачи (см. (20.9), (20.10), (20.11)), записанным в следующей стандартной форме:

$$j = \rho \beta_{j=0} \left( \frac{\beta}{\beta_{j=0}} \right) \left( \frac{c_{v,0} - c_{v,\infty}}{1 - c_{v,0}} \right) = \rho \beta_{j=0} \Psi_x b_1; \quad (20.80)$$

$$b_1 \equiv \frac{c_{v,0} - c_{v,\infty}}{1 - c_{v,0}} = \frac{c_{g,\infty} - c_{g,0}}{c_{g,0}} = \frac{c_{g,\infty}}{c_{g,0}} - 1; \quad \Psi_x \equiv \frac{\beta}{\beta_{j=0}}$$

где  $\beta_{j=0}$  – коэффициент массоотдачи в пределе нулевого потока,  $\Psi_x$  – корректирующий фактор,  $b_1$  – параметр проницаемости.

Замечая, что в пределе нулевого потока решение (20.79) запишется в виде

$$\exp\left(\frac{j\delta}{\rho D}\right) \xrightarrow{j \rightarrow 0} 1 + \frac{j\delta}{\rho D} \quad (20.81)$$

$$\frac{c_{g\delta}}{c_{g0}} - 1 \cong \frac{j\delta}{\rho D} \Rightarrow j \cong \rho \frac{D}{\delta} b_1 \Rightarrow \beta_{j=0} = \frac{D}{\delta}$$

получим в результате сопоставления следующее выражение для корректирующего фактора на основе пленочной модели:

$$\Psi_x = \frac{\ln(1+b_1)}{b_1}. \quad (20.82)$$

Это основной результат пленочной модели, который уже был использован в предыдущем параграфе для описания предельной ситуации сильного вдува (см. формулу (20.73) и комментарии к ней).

В числовом примере, приведенном на Рис. 20.12, рассмотрен случай испарения и конденсации *практически чистого* пара: максимальная концентрация (на поверхности конденсации) составила  $10^{-2}$ , а минимальная (на поверхности испарения)  $10^{-6}$ , следовательно параметр вдува  $b_{D1}$  равен  $10^4$ . Основные черты поведения решения ясны из графика на Рис. 20.12. Концентрация инертного газа увеличивается вдоль координаты  $y$  (по направлению потока массы) по экспоненциальному закону. При большом значении параметра  $Re_D$  заметный абсолютный рост концентрации происходит в непосредственной близости от поверхности конденсации, в то время как на значительном расстоянии от поверхности испарения сохраняется практически нулевое значение концентрации инертного газа. Это типичное поведение для сильного вдува у поверхности испарения и для сильного отсоса – вблизи поверхности конденсации. Если уменьшить минимальную концентрацию еще на порядок, то скорость испарения возрастет и кривая распределения концентрации еще больше прижмется к поверхности конденсации.

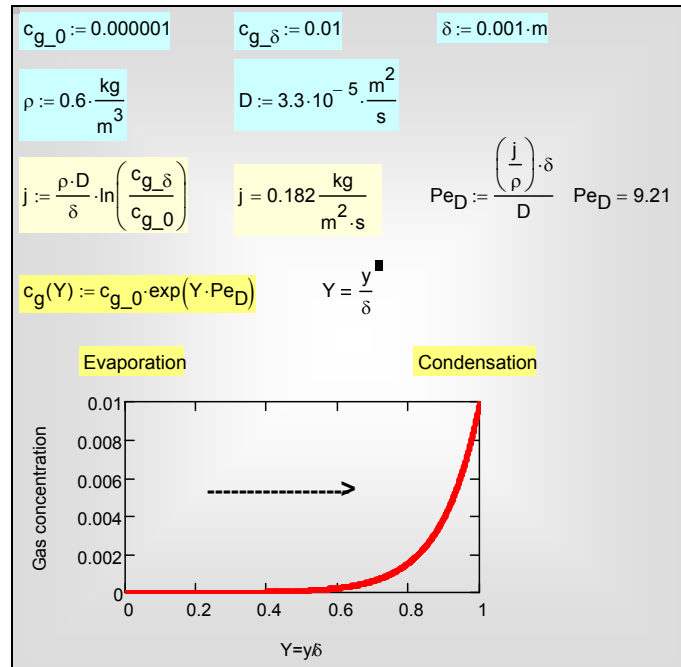


Рис. 20.12. Распределение концентрации для одномерной модельной задачи конденсации–испарения

Когда концентрация инертных газов стремится к нулю, скорость испарения контролируется другими физическими эффектами, но не концентрационной диффузией в газовой фазе.

Например, при испарении вследствие контакта с чистым перегретым паром лимитирующим фактором будет интенсивность конвективного теплообмена в паровой фазе. Если же теплота подводится через жидкую фазу от обогреваемой твердой стенки, то основную роль играет термическое сопротивление жидкой пленки.

Для интенсивного испарения в условиях вакуума (и для испарения жидких металлов) имеют место ограничения, связанные с газокинетическим фазовым сопротивлением и появлением скачка температуры на границе раздела фаз.

То же самое можно сказать о процессах конденсации, с естественным изменением направления переноса теплоты.

Рассмотрим далее кратко теплоперенос, происходящий на фоне рассмотренного выше одномерного процесса массопереноса в слое.

Уравнение сохранения энергии для одномерной стационарной задачи может быть записано как условие постоянства потока энтальпии:

$$-\lambda \frac{dt}{dy} + (j_v h_v + j_g h_g) = const. \quad (20.83)$$

где  $j_v, j_g$  – полные (включающие кондуктивную и конвективную составляющие) потоки компонентов смеси. Поскольку поток газа нулевой (см. (20.76)), получают

$$-\lambda \frac{dt}{dy} + j_v h_v = -\lambda \frac{dt}{dy} + j h_v = const. \quad (20.84)$$

Константа в (20.84) выражается через потоки на границе раздела фаз:

$$const = -\lambda \left. \frac{dt}{dy} \right|_{y=+0} + j h_{v,0} = q_0 + j h_{v,0}, \quad (20.85)$$

где  $q_0$  – тепловой поток в парогазовой фазе вблизи поверхности испарения  $y = 0$ .

После подстановки (20.85) и перегруппировки уравнение (20.84) для температуры запишется следующим образом

$$\begin{aligned} -\lambda \frac{dt}{dy} + j(h_v - h_{v,0}) &= q_0 \Rightarrow \\ -\lambda \frac{d(t-t_0)}{dy} + j c_{p,v}(t-t_0) &= q_0 \end{aligned} \quad (20.86)$$

где  $t_0$  – температура на границе раздела фаз (при  $y = 0$ ).

В безразмерном виде:

$$\begin{aligned} \frac{d\Theta}{dY} &= Pe \Theta - 1; \\ \Theta &\equiv \frac{(t-t_0)\lambda}{q_0 \delta}; \quad Y \equiv \frac{y}{\delta}; \\ Pe &\equiv \left( \frac{j\delta}{\rho D} \right) Le; \quad Le \equiv \frac{D}{a} \end{aligned} \quad (20.87)$$

Параметр  $Pe$  задается решением диффузионной задачи (см. (20.79)):

$$\frac{j\delta}{\rho D} = \ln(1 + b_1); \quad b_1 = \frac{c_{g,\infty}}{c_{g,0}} - 1 \quad (20.88)$$

Интегрирование линейного дифференциального уравнения (20.87) с начальным условием  $\Theta(0) = 0$  дает экспоненциальное распределение температуры по толщине слоя (Рис. 20.13):

$$\Theta(Y) = \frac{1 - e^{-PeY}}{Pe};$$

$$\frac{\Theta(Y)}{\Theta(1)} \equiv \frac{(t - t_0)}{(t_\delta - t_0)} = \frac{1 - e^{-PeY}}{1 - e^{-Pe}}; \quad (20.89)$$

$$Y \equiv \frac{y}{\delta}; \quad Pe \equiv \left( \frac{j\delta}{\rho a} \right),$$

где  $t_0$  и  $t_\delta$  – температуры на левой и правой фазовых границах (Рис. 20.11).

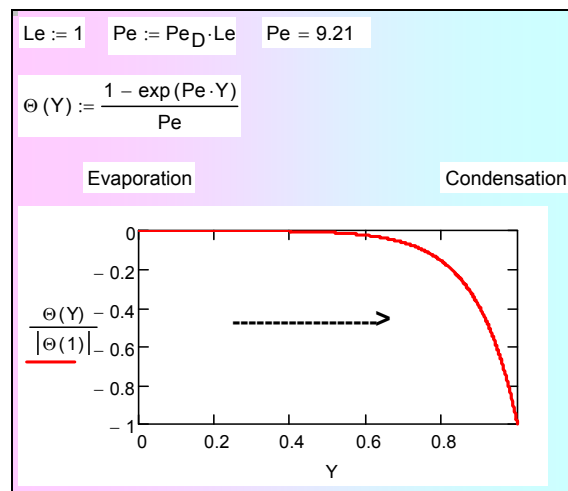


Рис. 20.13. Распределение безразмерной избыточной температуры по толщине слоя (числовые параметры см. Рис. 20.12)

Корректирующий фактор, учитывающий влияние поперечного потока массы на теплообмен, вычисляется с использованием соотношений (20.87)–(20.89):

$$\frac{\alpha}{\alpha_{j=0}} = \frac{-\frac{q_0}{t_\delta - t_0}}{\frac{\lambda}{\delta}} = -\frac{1}{\Theta(1)} = \frac{Pe}{e^{Pe} - 1} = \frac{\ln[(1 + b_1)^{Le}]}{(1 + b_1)^{Le} - 1} \quad (20.90)$$

В приближении  $Le = 1$ :

$$\frac{\alpha}{\alpha_{j=0}} = \frac{\ln[(1 + b_1)^{Le}]}{(1 + b_1)^{Le} - 1} \Bigg|_{Le=1} = \frac{\ln(1 + b_1)}{b_1} \quad (20.91)$$

Как и следовало ожидать, получилось такое же выражение, как для диффузионной задачи (см. (20.82)).

Температуры на поверхностях испарения  $t_0$  и конденсации  $t_\delta$  связаны с соответствующими концентрациями пара  $c_{g0}$ ,  $c_{g\delta}$ : это температуры насыщения при парциальных давлениях пара у левой и правой поверхностей (Рис. 20.12). Таким образом, можно рассчитать перепад температуры в слое  $\theta_0 = t_0 - t_\delta$ . Эта величина служит важной характеристикой интенсивности теплообмена при конденсации из парогазовой смеси (или при испарении в парогазовую смесь). В случае чистого пара  $\theta_0 = 0$  и, следовательно, термическое сопротивление равно нулю, в то время как через слой транспортируется мощный поток энергии, связанный с теплотой фазового превращения. Это наблюдение поясняет идею *тепловых труб* – специальных устройств для охлаждения теплонапряженных поверхностей, в последнее время применяемых даже для охлаждения персональных компьютеров.

Однако присутствие инертных газов, как показывают проведенные выше расчеты, приводит к появлению значительных перепадов температуры. Применительно к тепловым трубам, а иногда и к конденсаторам паровых турбин, говорят об «отравлении» этих устройств неконденсирующимися примесями.

Имеют место и другие проблемы, связанные с присутствием инертных газов. Например, сопоставление распределений концентрации и температуры позволяет решить вопрос о термодинамическом состоянии пара в смеси: в принципе возможно переохлаждение пара и конденсация в объеме с образованием тумана. Эти и другие дополнительные расчеты читатель может выполнить самостоятельно в качестве упражнения.

### 20.13 РАСЧЕТНЫЙ ПРИМЕР: КОНДЕНСАЦИЯ ПАРА ИЗ ПАРОГАЗОВОЙ СМЕСИ

Схема процесса показана на Рис. 20.14. Парогазовый поток при температуре  $t_{vg}$  движется с заданной массовой скоростью  $(G_{\text{vapor}} + G_{\text{gas}})$ , кг/(м<sup>2</sup>с), вдоль охлаждаемой поверхности с температурой  $t_w$ . Термическая проводимость пленки конденсата  $\alpha_{\text{film}}$  (т.е. коэффициент теплоотдачи, соотнесенный с разностью температур  $(t_s - t_w)$ ) полагается известной величиной. Требуется рассчитать локальную скорость конденсации  $j_v$ , кг/(м<sup>2</sup>с), и температуру на поверхности раздела фаз  $t_s$  на расстоянии  $L$  от входа.



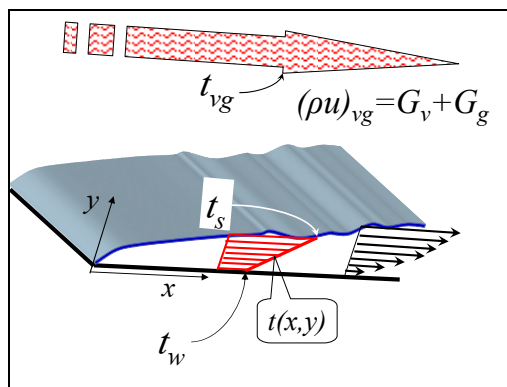


Рис. 20.14. Конденсация из парогазовой смеси

Такая постановка означает, что из полной модели конденсационной установки выделяется блок массообмена, имеющий принципиальное значение при конденсации из парогазовой смеси. К соответствующей Mathcad–программе можно обратиться по ссылке:

[..\Mathcad\\_HMT\20\\_Mass\\_Transfer\\_Cond\\_Evap\Superheated\\_vapor\\_Condensation\\_3.xmcdz](#) .

Полная модель конденсатора должна включать также гидродинамику и теплообмен конденсатной пленки, расчет системы охлаждения и т.д.

При вводе исходных данных (Рис. 20.15) производится некоторая предварительная обработка параметров. В частности, вычисляется точка росы  $t_{dew}$  (температура насыщения при парциальном давлении пара) в парогазовом потоке, с целью определить допустимый интервал значений неизменной температуры на поверхности раздела фаз. Ясно, что конденсация начнется, если температура поверхности пленки будет ниже точки росы. Для вычислений используется *уравнение кривой насыщения*  $pSatPa(T_s)$  воды.

В профессиональной вычислительной программе на этой стадии производится полная диагностика состояния парогазовой смеси, включая возможное образование тумана (мелкодисперсной влаги); в учебной программе мы ограничиваемся констатацией перегрева пара (логическая переменная Superheat имеет значение «единица», т.е. «истина» (Рис. 20.15)).

Рис. 20.16 демонстрирует программную реализацию функций для расчета интенсивности тепломассообмена на межфазной границе (см. Рис. 20.3–Рис. 20.7 и соответствующие комментарии в тексте).

**Исходные параметры:**

Вода , водяной пар, воздух

Массовые скорости пара и газа, кг/(м<sup>2</sup> сек)  $G_g := 1$   $G_v := 1$

Давление, Па  $P_{mix} := 10000$   $P_{mix\_Bar} := P_{mix} \cdot 10^{-5}$   $P_{mix\_Bar} = 0.1$

Температуры парогазовой смеси и охлаждаемой стенки, Cels  $t_{vg} := 100$   $t_w := 30$

Длина поверхности конденсации, м  $L := 0.1$

Термическая проводимость пленки конденсата, Вт/ (м<sup>2</sup> К)  $\alpha_{Film} := 10000$

Концентрация, парциальное давление пара в потоке, точка росы

$C_{v\_inf} := \frac{G_v}{(G_g + G_v)}$   $P_{vap} := \frac{P_{mix} \cdot (C_{v\_inf} \cdot R_{vg})}{-C_{v\_inf} + C_{v\_inf} \cdot R_{vg} + 1}$   $C_{v\_inf} = 0.5$

$t_{dew} := \text{root}(P_{vap} - pSatPa(t_{dew} + 273.15), t_{dew}, 0, t_{vg})$   $t_{dew} = 37.69$  Cels

$\text{Superheat} := t_{vg} > t_{dew}$   $\text{Superheat} = 1$

$Re_L := \frac{(G_g + G_v) \cdot L}{\mu(t_{vg})}$   $Re_L = 1.08 \times 10^4$   $c_p := \frac{G_g \cdot c_{pg} + G_v \cdot c_{pv}}{G_v + G_g}$

Рис. 20.15. Ввод и первичная обработка исходных данных (“root” – встроенная Mathcad-функция для нахождения корня уравнения)

Центральное место в вычислительной программе занимает функция  $\text{div}Q$ , фиксирующая дисбаланс тепловых потоков на межфазной границе при некотором *пробном* значении температуры  $t_s$  на этой границе (Рис. 20.17). В предпоследней строке программы записано уравнение (20.7), все члены которого собраны на одной стороне, т.е. результат ( $\text{div}Q$ ) должен быть нулевым (здесь полезно вновь обратиться к базовым соотношениям (20.7)–(20.12) и комментариям к ним в тексте).

$\Psi_{Lam}(b) := \begin{cases} b_{as} \leftarrow -2.268 \\ b_{cr} \leftarrow 3.478 \\ \left(1 - \frac{b}{5.505}\right)^{2.373622} & \text{if } b < 0 \\ \left(1 - \frac{b}{b_{cr}}\right)^{1.4824} & \text{otherwise} \end{cases}$	$\Psi_{lam}(b_1) := \begin{cases} b \leftarrow 0 \\ b \leftarrow \text{root}(b - \Psi_{Lam}(b) \cdot b_1, b) \\ \Psi_{Lam}(b) \end{cases}$
$\Psi_{turb}(b_1) := \frac{4}{2 + b_1 + 2 \cdot \sqrt{1 + b_1}}$	
$\Psi_{x.Lam}(b_1) := \sqrt{\frac{\Psi_{lam}(b_1)}{1 + b_1}} \quad \Psi_{x.Turb}(b_1) := \frac{\Psi_{turb}(b_1)^{0.8}}{(1 + b_1)^{0.2}}$	
$Nu_{lam}(Re_x, Pr, b_1) := 0.33 \cdot Re_x^{0.5} \cdot Pr^{0.33} \cdot \Psi_{x.Lam}(b_1)$	
$Nu_{turb}(Re_x, Pr, b_1) := 0.0296 \cdot Re_x^{0.8} \cdot Pr^{0.4} \cdot \Psi_{x.Turb}(b_1)$	
$Nu_x(Re_x, Pr, b_1) := \left( Nu_{lam}(Re_x, Pr, b_1)^4 + Nu_{turb}(Re_x, Pr, b_1)^4 \right)^{\frac{1}{4}}$	

Рис. 20.16. Расчет интенсивности теплообмена на поверхности раздела фаз с учетом  $\Psi$  – коррекции

$divQ(t_s, t_w) :=$	$p_{v\_surf} \leftarrow pSatPa(t_s + 273.15)$ $C_{v\_surf} \leftarrow \frac{1}{1 + R_{vg} \cdot \left( \frac{p_{mix}}{p_{v\_surf}} - 1 \right)}$ $b_1 \leftarrow \frac{C_{v\_surf} - C_{v\_inf}}{1 - C_{v\_surf}}$ $St_{\Psi corrected} \leftarrow \frac{Nu_x(Re_L, Pr, b_1)}{Re_L \cdot Pr}$ $\alpha_{vg} \leftarrow St_{\Psi corrected} \cdot c_p \cdot (G_g + G_v)$ $St_{D\_ \Psi corrected} \leftarrow \frac{Nu_x(Re_L, Pr_D, b_1)}{Re_L \cdot Pr_D}$ $j_v \leftarrow (G_v + G_g) \cdot St_{D\_ \Psi corrected} \cdot b_1$ <p>"Heat balance on interface"</p> $divQ \leftarrow \alpha_{vg} \cdot (t_s - t_{vg}) + j_v \cdot r_0 - \alpha_{Film} \cdot (t_w - t_s)$ $\left( \begin{array}{c} divQ \\ j_v \\ b_1 \end{array} \right)$
---------------------	---

Рис. 20.17. Тепловой баланс на границе раздела фаз

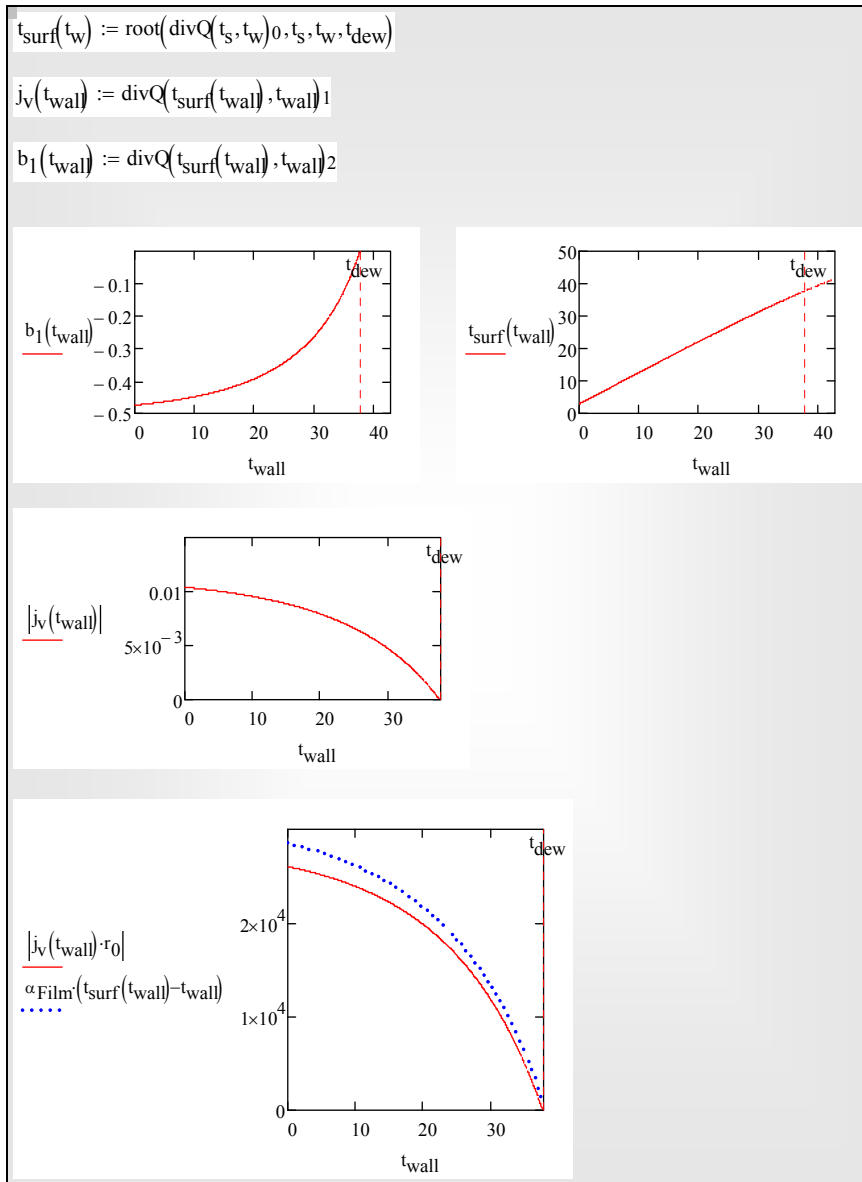


Рис. 20.18. Обращение к вычислительной программе и результаты расчета скорости конденсации из парогазовой смеси

Mathcad–программа запускается на счет (Рис. 20.18) обращением к встроенной функции «root» (нахождение корня нелинейного уравнения).

Варьируя значения температуры  $t_s$  (или  $t_{\text{surf}}$  в другом обозначении) на поверхности раздела фаз, функция «goot» устанавливает необходимый баланс потоков теплоты на межфазной границе.

Вычисления организованы так, что результаты зависят от заданной температуры охлаждаемой стенки  $t_w$ . В реальной конденсационной установке *уменьшения* этой температуры можно достичь *увеличением* интенсивности теплоотвода на другой стороне стенки и *уменьшением* температуры холодного теплоносителя.

Зафиксируем кратко результаты расчетов, представленные на диаграммах (Рис. 20.18):

- Параметр проницаемости  $b_1$  (20.49) уменьшается по абсолютному значению и обращается в ноль при стремлении температуры охлаждаемой поверхности  $t_w$  к температуре точки росы парогазового потока  $t_{\text{dew}}$ .
- Температура межфазной границы  $t_{\text{surf}}$  растет вместе с температурой охлаждаемой стенки  $t_w$ .
- Скорость конденсации уменьшается  $j_v$  (по абсолютной величине) с ростом температуры охлаждаемой стенки  $t_w$ .
- Тепловой поток уменьшается с ростом температуры охлаждаемой стенки. Тепловой поток через пленку  $\alpha_{\text{Film}}(t_{\text{surf}} - t_w)$  превышает теплоту конденсации  $j_v r_0$  на величину, обусловленную перегревом пара.

Читателю предоставляется возможность дать развернутые комментарии к этим результатам, а также провести самостоятельные исследования работы конденсатора, запустив Mathcad–программу:

[..\Mathcad\\_HMT\20\\_Mass\\_Transfer\\_Cond\\_Evap\Superheated\\_vapor\\_Condensation\\_3.xmcdz](#) .