

5 Компьютерное моделирование теплообмена: пакет Matlab

5.1 Введение

Математическое описание тепломассообмена (см. гл. 1–4 Электронного курса) включает систему *дифференциальных уравнений* в частных производных, описывающих нестационарные трехмерные поля скорости, температуры, концентрации, и *краевые условия*, задающие взаимодействие объекта с окружающей средой. В общем случае, это сложная для решения задача, если иметь в виду сложную геометрию реальных инженерных объектов, нелинейность уравнений, разнообразие и неустойчивость гидродинамических полей и т.п.

Универсальным средством решения таких задач становится все в большей мере численное моделирование на компьютерах. Во-первых, численное моделирование *востребовано* в связи с усложнением энергетических технологий. Во-вторых, численное моделирование становится *доступным* благодаря появлению и усовершенствованию инженерных математических пакетов, одним из которых является Matlab. Воспользоваться пакетом Matlab – это, возможно, самый короткий путь от теоретического введения в предмет (каким являются гл. 1–4 Электронного курса) к решению реальных сложных задач тепломассообмена.

Запустив Matlab и набрав в командном окне «*pdetool*» (что означает инструмент для решения уравнений в *частных* производных), пользователь получает доступ к графическому пользовательскому интерфейсу (GUI). В разделе меню Draw *рисуют* исследуемый объект (возможно, составной и достаточно сложный). В разделе PDE выбирают тип и указывают коэффициенты *дифференциального уравнения*. В разделе Boundary задают *граничные условия* на различных сегментах границы. В разделе меню Solve запускают *решатель* (интегратор), после чего в разделе Plot указывают, как *визуализировать* результаты. Далее эти этапы описаны подробнее на примере задачи о *температурном поле твэла*.

Matlab занимает особое место среди вычислительных инструментов инженера. Как и другие современные языки программирования высокого уровня, Matlab позволяет разрабатывать хорошо структурированные программы, снабженные графическим интерфейсом пользователя (GUI) и системой визуализации результатов. Имеются эффективные средства отладки и совершенствования программ.

В дополнение к этим универсальным свойствам, Matlab как “*matrix laboratory*” («матричная лаборатория») обеспечивает эффективную работу с векторными и матричными моделями, поскольку использует массив (*array*)

реальных и комплексных чисел как базовый элемент данных. Численные алгоритмы Matlab имеют репутацию эталонов эффективности.

В пакет Matlab включены вычислительные инструменты (toolboxes), расширяющие круг приложений для специальных инженерных областей. Особый интерес для курса тепломассообмена представляет PDE Toolbox, т.е. специальный инструмент для интегрирования уравнений (систем уравнений) в частных производных (Partial Differential Equations). Используя совместно графический интерфейс PDE Toolbox и средства программирования Matlab, мы разработаем далее простую специализированную систему для исследования температурного поля твэла («Fuel_El_UO2_He_Zr»).

5.2 Математическая формулировка.

Основным объектом в PDE Toolbox является уравнение эллиптического типа, представленное в двух эквивалентных формах (принятой в Matlab или в нашем теоретическом введении):

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot (c \nabla u) + a u &= f; \\ -\operatorname{div}(c \operatorname{grad} u) + a u &= f \end{aligned} \quad (5.1)$$

Уравнение записано для *двухмерной* области Ω . Коэффициенты c , a , f могут быть функциями координат и зависимой переменной u . В последнем случае уравнение будет нелинейным.

Можно решать также параболическое уравнение:

$$\begin{aligned} d \frac{\partial u}{\partial t} - \nabla \cdot (c \nabla u) + a u &= f; \\ d \frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}(c \operatorname{grad} u) + a u &= f \end{aligned} \quad (5.2)$$

с коэффициентами, вообще говоря, зависящими от времени t (но не от искомой переменной u).

Применительно к задачам теплообмена:

- зависимую переменную u идентифицируют с температурой,
- коэффициент c – с теплопроводностью тела,
- коэффициент f – с объемной мощностью внутренних источников теплоты;
- произведение au может представлять отвод теплоты в окружающую среду с нулевой температурой, или специальный вид внутреннего источника (стока) теплоты;
- коэффициент d для нестационарной задачи есть объемная теплоемкость ρc .

Полезно сопоставить уравнение (5.2), записанное в стиле пакета Matlab, с уравнением теплопроводности (2.14), выведенным в [гл. 2](#) Электронного курса.

Круг приложений может быть расширен в случае системы с двумя искомыми переменными (u_1, u_2). Например, если (u_1, u_2) – составляющие вектора скорости, то уравнения описывают двумерные течения в пористой среде. Если $u_1(x,y)$ – это температура, а $u_2(x,y)$ – скорость установившегося течения в канале, то получается модель теплообмена в длинных каналах.

На границах $d\Omega$ области ставятся граничные условия:

условие Дирихле:

$$hu = r, \quad (5.3)$$

(например, задается распределение температуры вдоль границы)
или *обобщенное условие Нейманна:*

$$\mathbf{n} \cdot (c \operatorname{grad} u) + qu = g, \quad (5.4)$$

где \mathbf{n} – внешняя нормаль к поверхности тела.

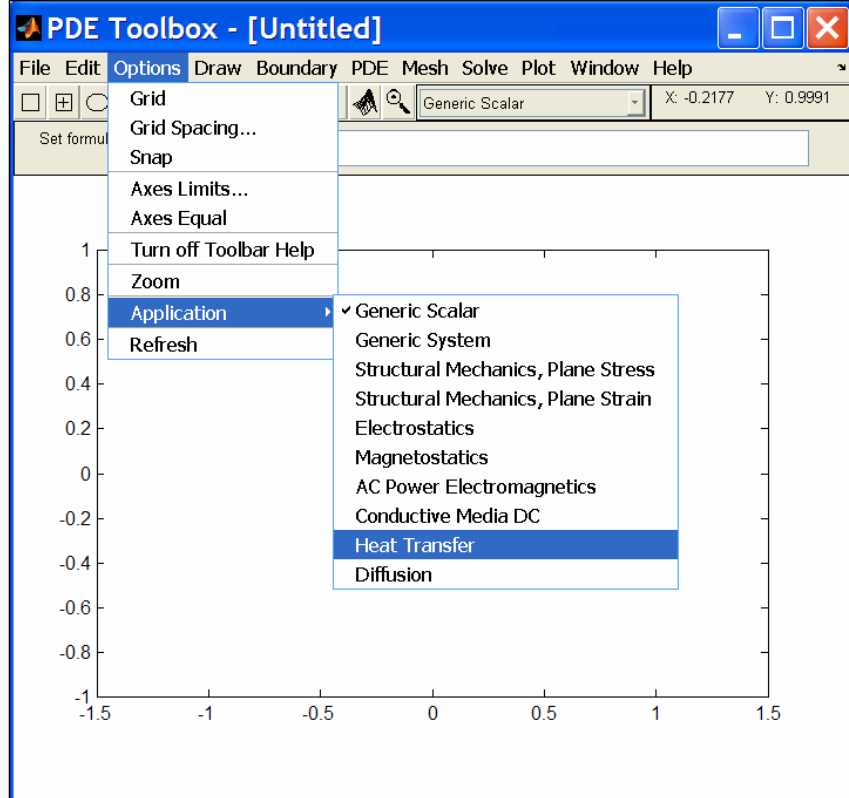
Условие (5.4) в случае $g = 0$ и $q \neq 0$ описывает теплоотдачу с окружающей средой при нулевой температуре (условие 3-го рода, q – коэффициент теплоотдачи; мы придерживаемся здесь формальных обозначений Matlab). Если $q = 0$, $g \neq 0$, то задается плотность теплового потока на поверхности (условие 2-го рода).

В общем случае соответствующим подбором коэффициентов (q, g) как функций координат и температуры на поверхности могут быть описаны разнообразные сложные условия теплового взаимодействия с окружающей средой.

5.3 Задача о температурном поле твэла.

При аксиальной симметрии твэла и при отсутствии заметных продольных изменений температурное поле будет одномерным, изменяющимся только по радиальной координате. В учебном курсе рассматривается решение одномерной стационарной задачи с переменными коэффициентами в пакете Mathcad.

Нарушения аксиальной симметрии в результате технологических погрешностей, неоднородности условий охлаждения и т.п. делает задачу двумерной. Далее представлено решение этой задачи в пакете Matlab PDE Toolbox. Рассмотрены искажения температурного поля твэла вследствие эллипсоидальности оболочки, т.е. неравномерности толщины гелиевого зазора. Моделируется также влияние неоднородности охлаждения из-за ухудшения теплоотвода на одном из сегментов внешней поверхности твэла.



4

5.4 Создание модели в графическом интерфейсе пользователя

В командном окне Matlab запускают инструмент PDE Toolbox посредством команды:

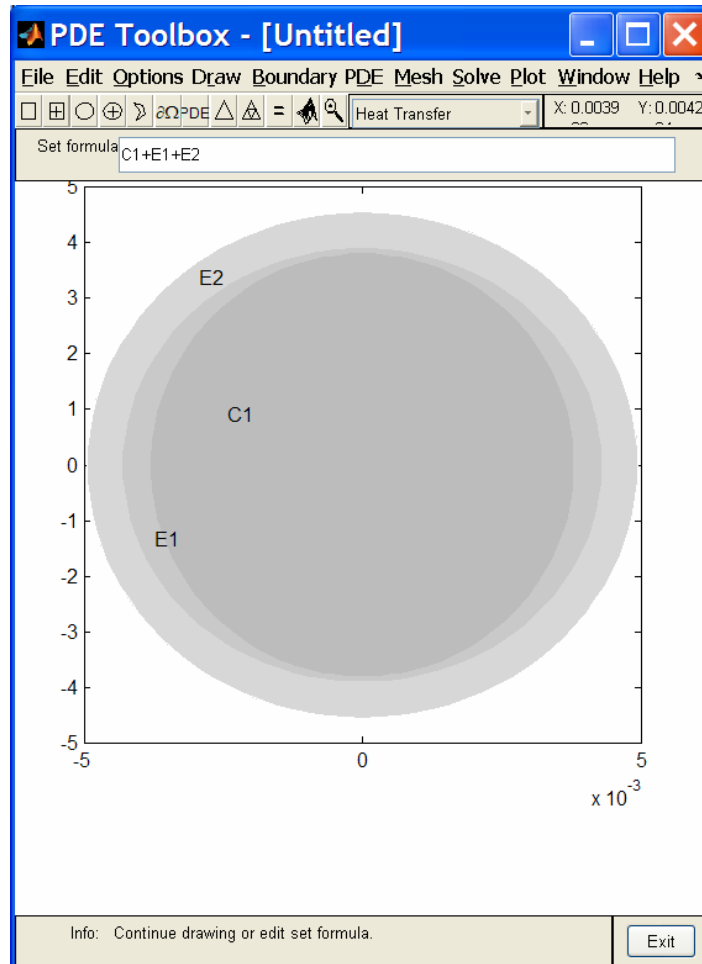
```
>> pdetool.
```

В пункте меню **Options, Application** устанавливают область инженерных наук, в нашем случае, **Heat Transfer** (теплообмен).

В пункте меню **Options, Axis limits** ... устанавливают размеры двумерной рабочей области, в которой будут производиться геометрические построения: для оси x – $[-0.005 \ 0.005]$ и для оси y – $[-0.005 \ 0.005]$.

Построение объекта

В меню **Draw** (чертить) строят геометрический объект, в нашем случае, круглый стержень из диоксида урана с несколько деформированной, эллипсоидальной циркониевой оболочкой. Выбирают Draw, **Ellipse/circle (centered)** и правой (!) кнопкой мыши строят круг радиусом 0.0038 мм с центром в начале координат. Эта область автоматически затемняется и снабжается меткой C1 (Circle1).



Далее выбирают **Draw, Ellipse/circle (centered)** и левой (!) кнопкой мыши строят эллипс с полуосями $(0.0038+0.0005)$ мм и $(0.0038+0.0001)$ мм с центром в начале координат (метка E1). Повторяют эту операцию для эллипса с полуосями $(0.0038+0.0005+0.00065)$ мм и $(0.0038+0.0001+0.00065)$ мм (метка E2), где 0.00065 мм – толщина циркониевой оболочки.

При манипуляциях с мышью трудно достичь нужной точности позиционирования объектов. Однако двойной щелчок на объекте открывает диалоговый бокс, где можно установить точные координаты и размеры.

В окне Set formula автоматически генерируется формула алгебры множеств $C1+E1+E2$, согласно которой по умолчанию образуется составной объект как сумма (объединение) трех геометрических примитивов (элементарных объектов, таких как прямоугольники, окружности, эллипсы, многоугольники). Можно редактировать эту формулу, применяя операции суммы (объединения),

пересечения (умножения) и разности (вычитания) множеств. Например, операция вычитания применяется для образования отверстия или полости в твердом объекте.

Напомним, что сумма, или объединение, дает тело, каждая точка которого принадлежит хотя бы одному из примитивов. Пересечение (умножение) образует объект, точки которого принадлежат одновременно обоим примитивам. При вычитании $A-B$ остаются те точки A , которые не принадлежат одновременно B .

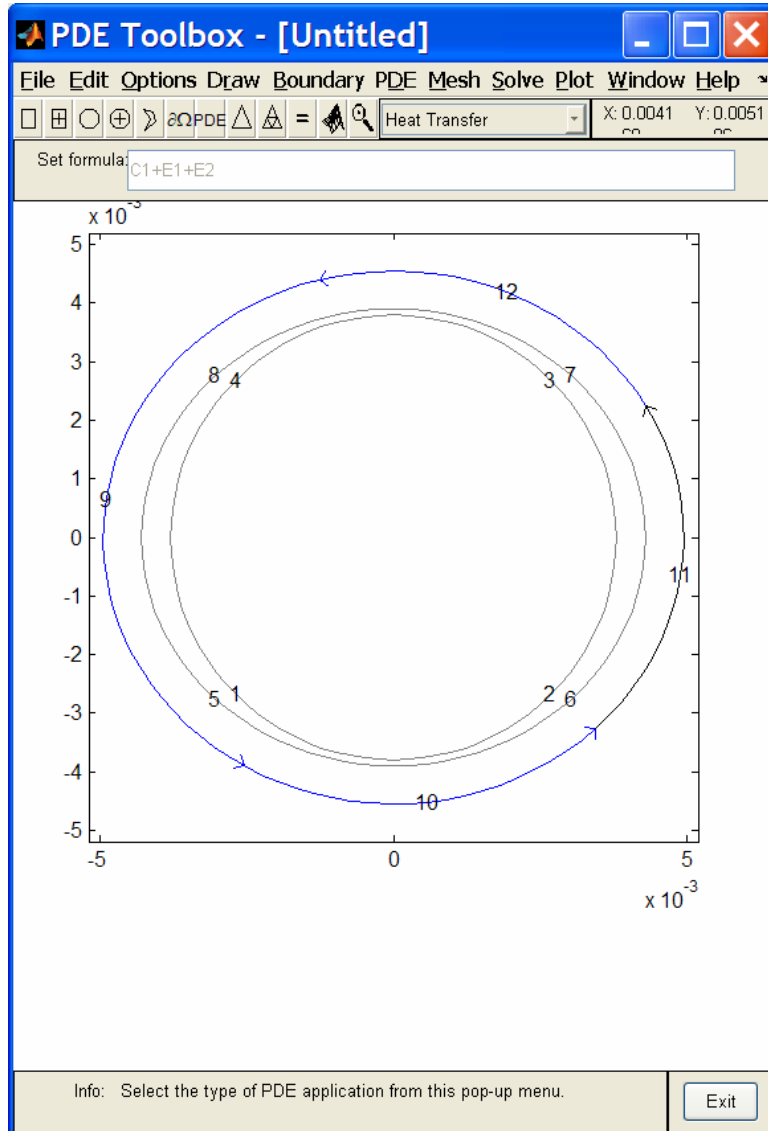
Графические построения на основе комбинирования простых геометрических тел (примитивов) обозначаются аббревиатурой CGS (Constructive Solid Geometry, конструктивная блочная геометрия).

Объединение элементарных объектов не уничтожает внутренних границ, как это хорошо видно при переходе в режимы Boundary, Boundary mode (границы) и PDE, PDE mode (установка коэффициентов дифференциальных уравнений в различных подобластях). Предполагается в частности, что физические параметры могут быть различными в подобластях, разделенных внутренними границами. На самих внутренних границах считаются выполненными условия непрерывности величин u и потоков.

Если же подобласти однородны, то внутренние границы могут быть удалены в режиме Boundary mode.

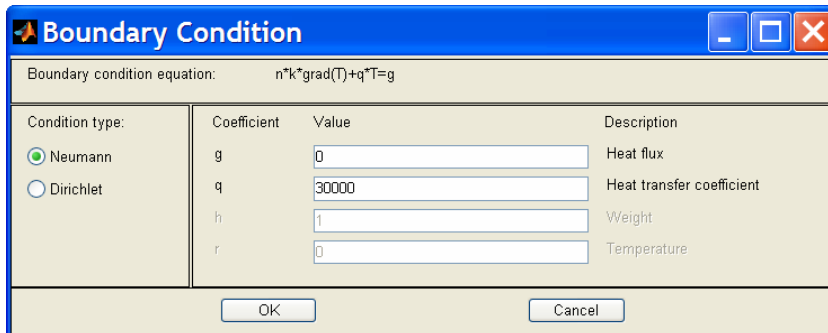
Постановка граничных условий.

Используя меню программы PDE Toolbox, переходят в режим **Boundary, Boundary mode**.



Внешние границы высвечиваются синим цветом. Показываются номера сегментов границы, если в меню Boundary отмечен пункт Show Edge Labels. Чтобы специфицировать условия например на сегменте 11, отмечают его двойным щелчком и переходят в меню к пункту Specify Boundary Conditions... . В открывшемся диалоговом окне выбирают тип граничного условия (в рассматриваемой задаче – обобщенное условие Нейманна (Neumann)) и задают коэффициенты g (Heat flux, плотность теплового потока) и q (Heat transfer coefficient), коэффициент теплоотдачи. При указанных числовых значениях мы

специфицировали граничное условие 3-го рода, приняв, что температура объекта T отсчитывается от температуры окружающей среды. Коэффициент теплопроводности тела (обозначение k в уравнении Boundary condition equation) будет определен далее при спецификации коэффициентов дифференциального уравнения.



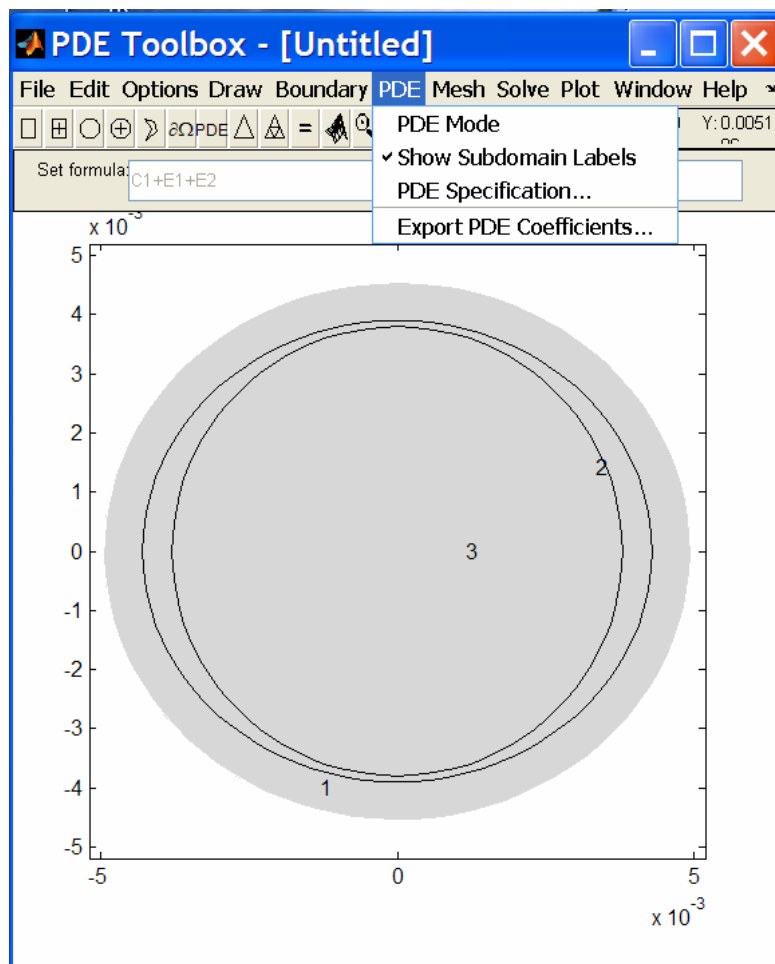
Указанные операции повторяют для остальных сегментов границы с окружающей средой. Если эти условия одинаковы, то отмечают все границы при нажатой клавише Shift и выполняют операцию для всех границ сразу.

Можно вызывать нужный сегмент границы двойным щелчком, например, чтобы проконтролировать правильность ввода.

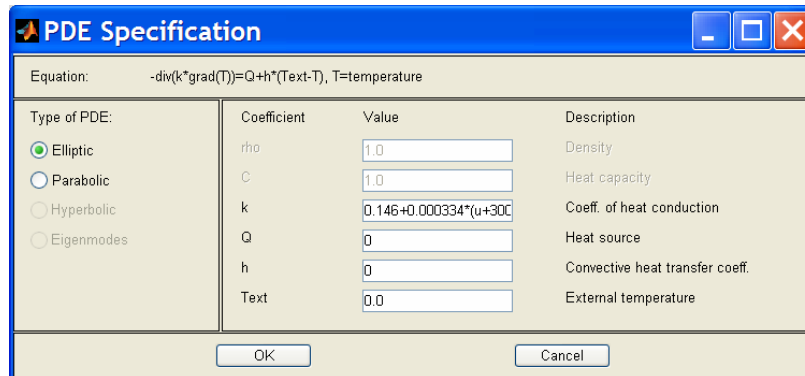
Спецификация коэффициентов дифференциального уравнения

Переходят в режим **PDE, PDE Mode**, отметив также пункт Show Subdomain Labels (показать метки подобластей).

Щелчком мыши на номере выделяют необходимую подобласть, в примере это область 2, соответствующая гелиевому зазору между таблеткой ядерного горючего 3 и циркониевой оболочкой 1.



Двойной щелчок по номеру подобласти вызывает диалоговое окно для ввода коэффициентов дифференциального уравнения.



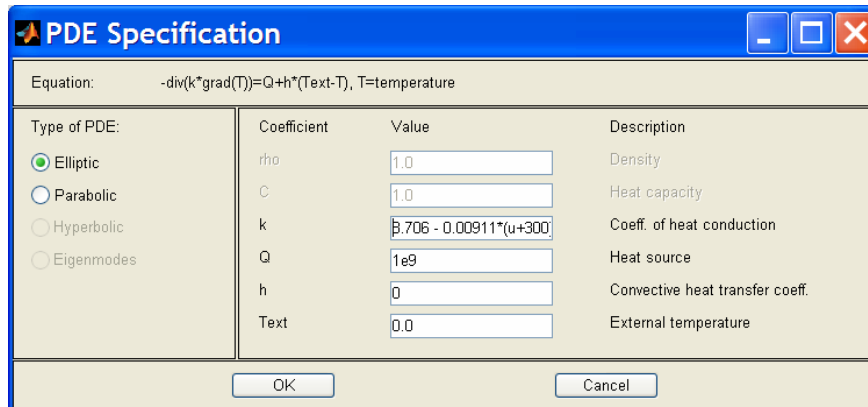
Рассматривается стационарная эллиптическая задача, и мы отмечаем нужный пункт в левой части диалогового окна (Elliptic отмечено по умолчанию). Дифференциальное уравнение теплопроводности показано в верхнем окне. Смысл коэффициентов поясняется в правом окне.

Мы исключаем в правой части конвективный оператор $h*(Text - T)$ и устанавливаем $h, Text = 0$. (Вообще говоря, этот оператор может быть полезен для постановки другой задачи – с *тонким* диском, отдающим теплоту в окружающую среду с верхней и нижней плоской круглой поверхности, но не для рассматриваемой сейчас задачи с длинным тепловыделяющим стержнем).

Принципиальный для реальных приложений вопрос о возможной сильной зависимости свойств тела от температуры решается следующим образом. В окне ввода коэффициента теплопроводности k видна *формула*, задающая температурную зависимость. В режиме работы с графическим интерфейсом пользователя (GUI программы `pdetool`), как это происходит сейчас, формула вводится вручную по правилам записи выражений, принятым в Matlab. Обозначение зависимой переменной “ u ” принято по умолчанию в пакете PDE Toolbox, и мы должны использовать его вместо мнемонического T для прикладной области «теплообмен» (см. Options, Application, Heat transfer). Слагаемое «300» означает точку отсчета температуры, т.е. температуру окружающей среды.

Мощность внутренних источников в гелиевом зазоре нулевая, поэтому $Q = 0$.

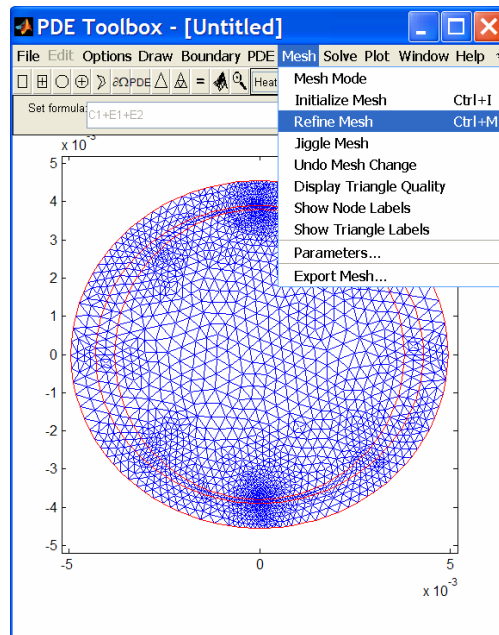
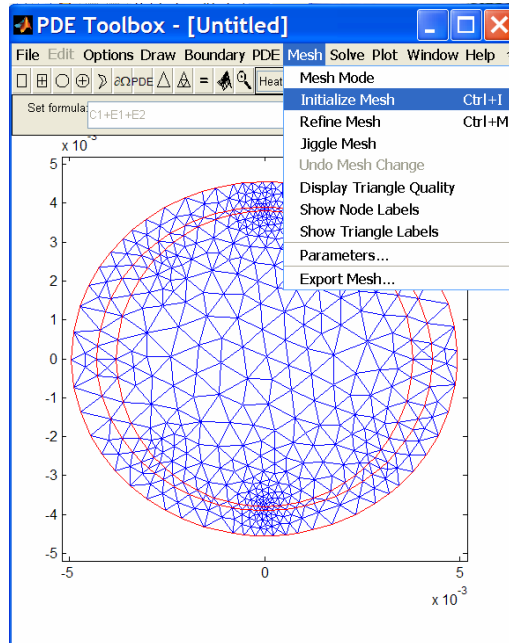
Для центральной области с внутренним тепловыделением указывается значение мощности внутренних источников теплоты, Вт/м³.



Поскольку задача с переменными, зависящими от температуры свойствами становится нелинейной, необходимо указать это в разделе Solve, Parameters..., Use nonlinear solver (применить нелинейный решатель), иначе при запуске решения будет выдано сообщение об ошибке.

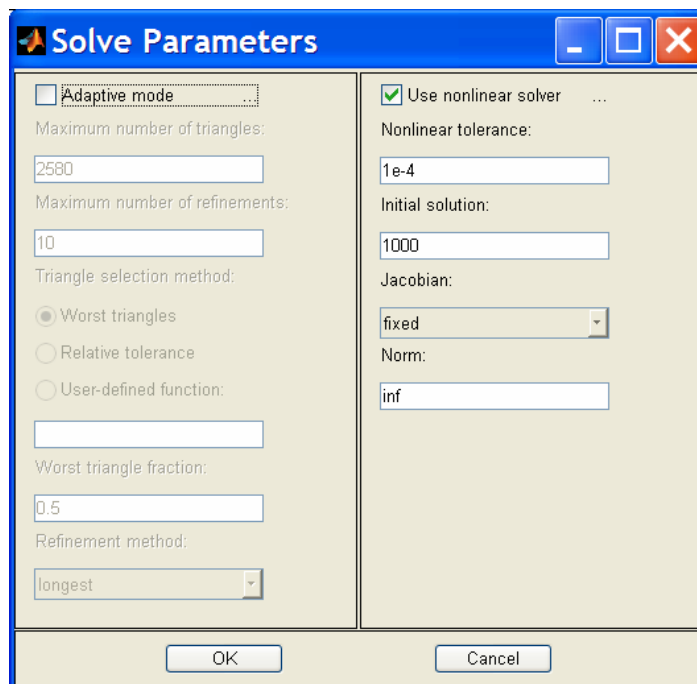
Генерация сетки

В пакете PDE Toolbox применяется численный метод конечных элементов (FEM, finite-element method), который предусматривает разбиение расчетной области на треугольники конечных (хотя и малых) размеров. Искомое поле температуры представляется значениями в вершинах треугольников. Триангуляция расчетной области является эффективным способом учесть особенности сложной геометрии реальных объектов. Дифференциальное уравнение в частных производных используется для того, чтобы тем или иным способом вывести и записать систему *алгебраических* уравнений для узлов сетки (вершин треугольников). Решение такой системы, в реальных задачах с очень большим числом неизвестных, является центральной проблемой численного анализа. Соответствующий блок вычислительной программы (solver, решатель) требует значительных вычислительных мощностей и времени выполнения. Для показанной первичной, достаточно грубой сетки (Initialize Mesh) число узлов (число неизвестных) составляет 561, а после улучшения (Refine Mesh) – еще на порядок больше.

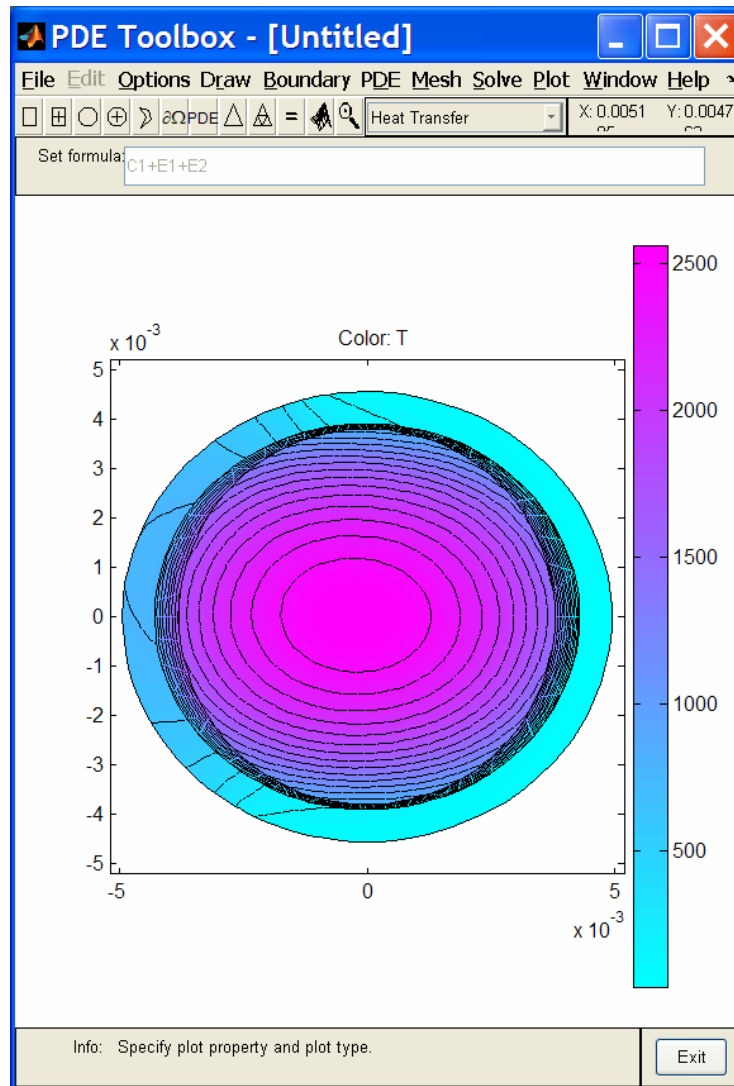


Решение

В режиме **Solve, Solve Parameters** (решение, параметры решения) следует отметить **Use nonlinear solver** (использовать нелинейный решатель) и указать начальное приближение для температуры, поскольку процедура решения для нелинейных задач носит итерационный характер. Дополнительно можно включить режим автоматического улучшения решения (**Adaptive mode**).



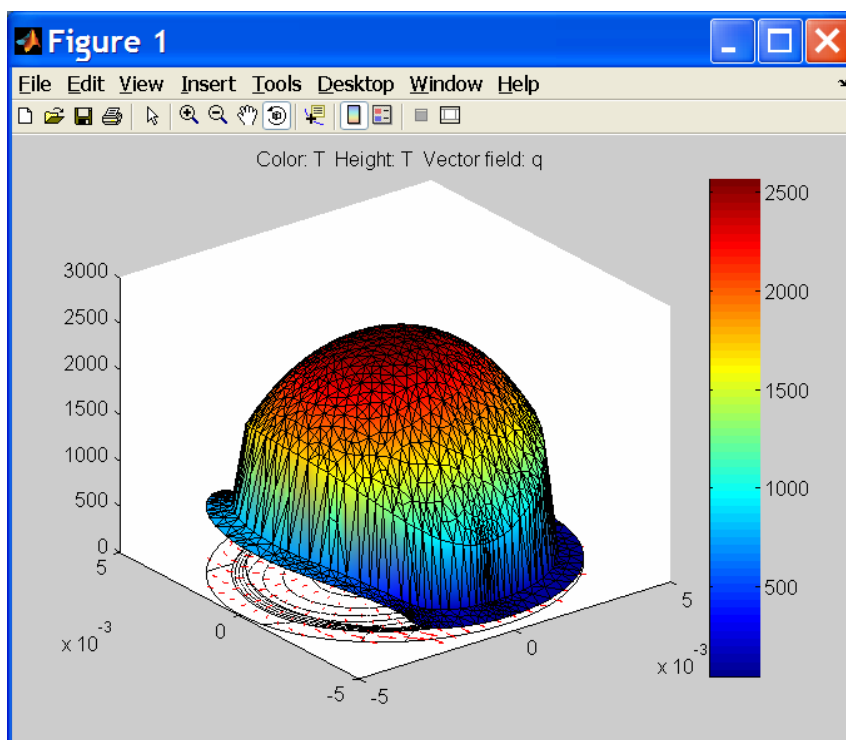
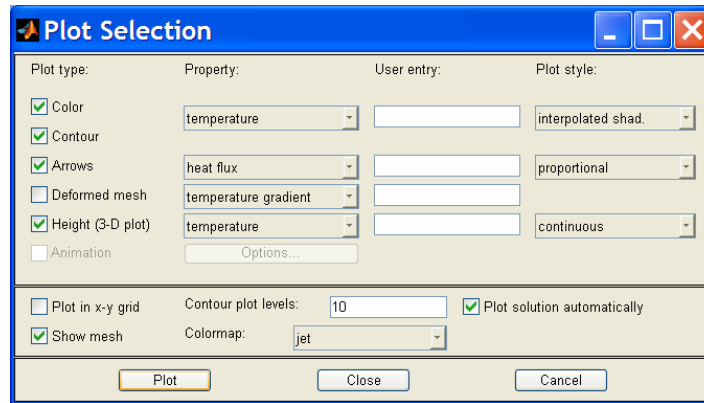
Запуск решения осуществляется выбором **Solve, Solve PDE** или нажатием кнопки « \Leftrightarrow » на панели инструментов.

Визуализация решения.

Температурное поле твэла как результат численного решения представлено цветом (Color, цветовая шкала представлена справа) и изотермами (Contour). Отчетливо видна асимметрия распределения температуры, вызванная неравномерностью зазора и ухудшенными условиями теплоотдачи на левом верхнем сегменте внешней поверхности.

В режиме **Plot, Parameters** предоставляются дополнительные способы визуализации результатов. Векторное поле плотности теплового потока (heat flux) будет построено, если выбрать **Arrows** (стрелки). Пространственный

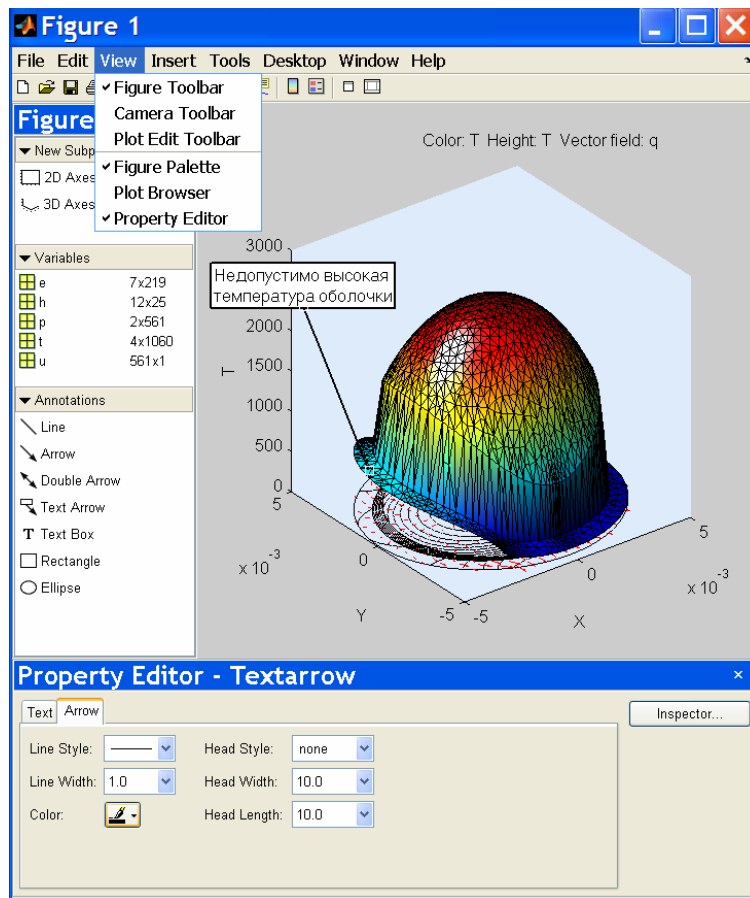
график распределения температуры получается при включении позиции Height (3-D plot), temperature.



Отчетливо видны сильные перекосы температурного поля, способные вызвать значительные и неравномерно распределенные температурные напряжения в твэле. Температура циркониевой оболочки (синий и голубой ободка на картине) в рассматриваемом экстремальном режиме

функционирования твэла явно превосходит допустимый предел (примерно 400°C). Экспериментирование с различными режимами, в том числе аварийными, составляет основную задачу численного моделирования инженерных объектов.

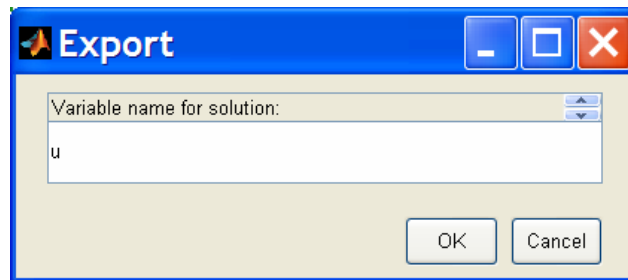
Имеются дополнительные возможности улучшения графики, открывающиеся при работе с меню. Можно добавить комментарии, изменить палитру и т.п.



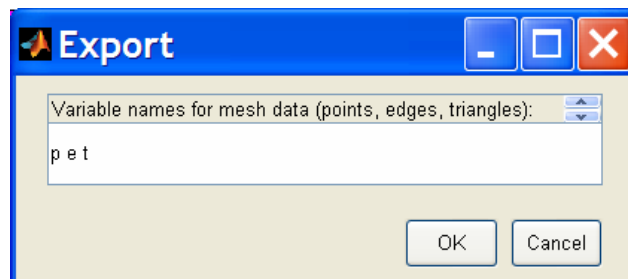
5.5 Экспорт решения и постпроцессорная обработка

Экспорт решения в среду Matlab

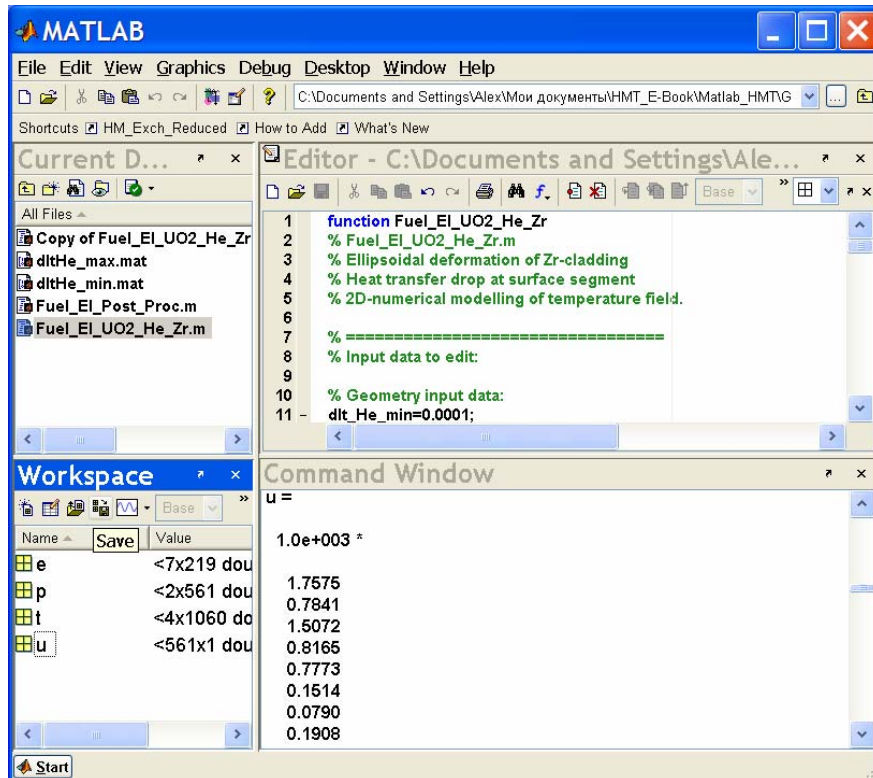
Результаты численного моделирования сохраняются в режиме **Solve > Export Solution**



Кроме того, необходимо экспортировать данные о расчетной сетке: **Mesh, Export Mesh.**

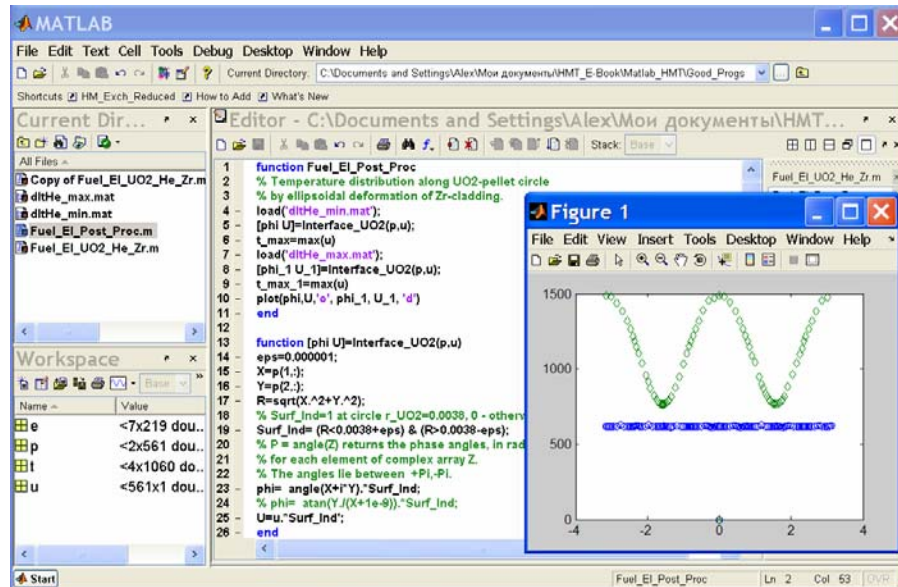


В результате становятся доступными данные о температуре (матрица u), координатах x, y точек (матрица p), сторонах (матрица e) и треугольниках (матрица t). Они могут быть сохранены в файлах, таких как `dltHe_max.mat`, `dltHe_min.mat` и использованы для дальнейшей, так называемой, постпроцессорной обработки результатов.



Постпроцессорная обработка. Распределение температуры по окружности топливного стержня.

Небольшая Matlab программа сопоставляет распределение температуры по окружности топливной таблетки при работе твэла с нормальным гелиевым зазором и увеличенным зазором при эллипсоидальной деформации оболочки. Это пример пользовательского расширения ограниченных возможностей визуализации результатов, предусмотренных непосредственно в PDE Toolbox.



Matlab – функция *Fuel_EI_UO2_He_Zr*

При разработке модели в режиме графического пользовательского интерфейса, как описано выше, автоматически создается функция Matlab с именем (по умолчанию) `function pdemodel`, являющаяся протоколом действия пользователя. Вызов этой функции в среде Matlab воспроизводит все необходимые установки и запускает решение задачи.

Однако если производится численное моделирование объекта с изменяющимися размерами, свойствами, условиями на границах, то стандартная процедура становится слишком громоздкой и трудоемкой.

Средствами языка программирования Matlab можно так *модифицировать автоматически созданную функцию*, чтобы варьируемые параметры задавались в специальном блоке программы (или даже в универсальном графическом интерфейсе пакета Matlab).

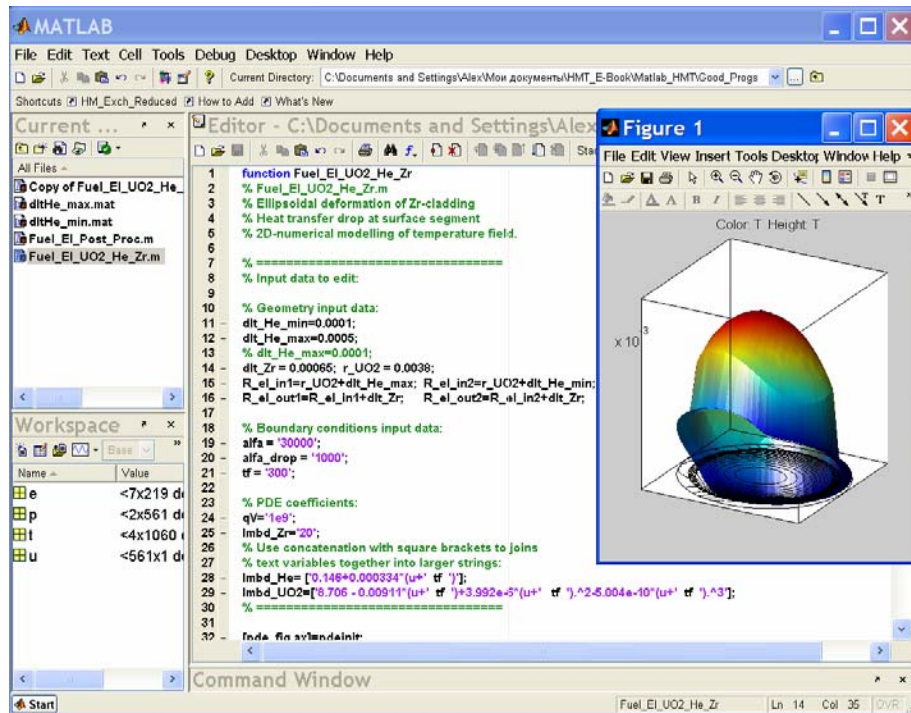
В приводимом далее тексте функции `Fuel_EI_UO2_He_Zr` первый блок программы:

```
% Geometry input data
```

содержит геометрические параметры твэла: минимальную и максимальную толщину гелиевого зазора, толщину циркониевой оболочки, радиус топливной таблетки. Этим параметрам присваиваются значения, которые используются затем при построении расчетной области функциями `pdescirc`, `pdeellip`. Таким образом, вместо того чтобы вручную перерисовывать сложный объект, можно изменить размеры в тексте программы, и новый вариант будет построен автоматически.

Аналогично вводятся параметры теплоотдачи, температуры окружающей среды, мощности внутренних источников. Коэффициенты теплопроводности диоксида урана и гелия существенно зависят от температуры и для их расчета вводятся соответствующие аппроксимации.

Параметризация задачи существенно упрощает работу с моделью, поскольку редактирование значений легко осуществляется в окне редактора Matlab.



```
function Fuel_EI_UO2_He_Zr
% Fuel_EI_UO2_He_Zr.m
% Ellipsoidal deformation of Zr-cladding
% Heat transfer drop at surface segment
% 2D-numerical modelling of temperature field.

% =====
% Input data to edit:

% Geometry input data:
dlt_He_min=0.0001;
dlt_He_max=0.0005;
% dlt_He_max=0.0001;
dlt_Zr = 0.00065; r_UO2 = 0.0038;
R_el_in1=r_UO2+dlt_He_max; R_el_in2=r_UO2+dlt_He_min;
R_el_out1=R_el_in1+dlt_Zr; R_el_out2=R_el_in2+dlt_Zr;

% Boundary conditions input data:
alfa = '30000';
alfa_drop = '1000';
tf = '300';

% PDE coefficients:
qV='1e9';
lmbd_Zr='20';
% Use concatenation with square brackets to joins
% text variables together into larger strings:
lmbd_He=[ '0.146+0.000334*(u+' tf ')'];
lmbd_UO2=[ '6.706 - 0.00911*(u+' tf ')'+3.992e-5*(u+' tf ')^2-5.004e-10*(u+' tf ')^3'];
% =====

% End of file end of line
```

```

R_el_out1=R_el_in1+dlt_Zr;   R_el_out2=R_el_in2+dlt_Zr;

% Boundary conditions input data:
alfa = '30000';
alfa_drop = '1000';
tf = '300';

% PDE coefficients:
qV='1e9';
lmbd_Zr='20';
% Use concatenation with square brackets to joins
% text variables together into larger strings:
lmbd_He= ['0.146+0.000334*(u+' tf ' ')'];
lmbd_UO2=['8.706 - 0.00911*(u+' tf '')+3.992e-6*(u+' tf ').^2-5.004e-10*(u+'
tf ').^3'];
% =====

[pde_fig,ax]=pdeinit;
pdetool('appl_cb',9);
set(ax,'DataAspectRatio',[1 1 1]);
set(ax,'PlotBoxAspectRatio',[1 1 1]);
set(ax,'XLim',[-R_el_out1*1.05 R_el_out1*1.05]);
set(ax,'YLim',[-R_el_out1*1.05 R_el_out1*1.05]);
set(ax,'XTickMode','auto');
set(ax,'YTickMode','auto');

% pdecirc(0,0,0.0038,'C1');
pdecirc(0,0,r_UO2,'C1')
pdeellip(0,0, R_el_in1, R_el_in2,0,'E1')
pdeellip(0,0,R_el_out1,R_el_out2,0,'E2')
set(findobj(get(pde_fig,'Children'),'Tag','PDEEval'),'String','C1+E1+E2')

% Boundary conditions:
pdetool('changemode',0)
pdesetbd(12,...
'neu',...
1,...
alfa,...
'0')
pdesetbd(11,...
'neu',...
1,...
alfa,...
'0')
pdesetbd(10,...
'neu',...

```

```

1,...
alfa,...
'0')
pdesetbd(9,...
'neu',...
1,...
alfa_drop,...
'0')

% Mesh generation:
setappdata(pde_fig,'Hgrad',1.3);
setappdata(pde_fig,'refinethod','regular');
% [p,e,t]=initmesh(g);
% [p,e,t]=refinemesh(g,p,e,t);
pdetool('initmesh')
% pdetool('refine')

% PDE coefficients:
pdeseteq(1,...
[lmbd_Zr '!' lmbd_He '!' lmbd_UO2],...
'0!0!0',...
['(0)+(0).*(0.0)!(0)+(0).*(0.0)!( qV ')+(0).*(0.0)'],...
'(1.0).*(1.0)!(1.0).*(1.0)!(1.0).*(1.0)',...
'0:10',...
'0.0',...
'0.0',...
'[0 100]');

% Use the "char" function to create character array
% from strings of different lengths (see 2-26 Programming)
setappdata(pde_fig,'currparam',...
char('1.0!1.0!1.0',...
'1.0!1.0!1.0',...
[lmbd_Zr '!' lmbd_He '!' lmbd_UO2],...
['0!0!' qV],...
'0!0!0',...
'0.0!0.0!0.0 '))

% Solve parameters:
setappdata(pde_fig,'solveparam',...
str2mat('0','6360','10','pdeadworst',...
'0.5','longest','1','1e-4','1000','fixed','inf'));

% Plotflags and user data strings:
setappdata(pde_fig,'plotflags',[1 1 1 1 1 1 1 1 0 0 0 1 1 1 0 0 0 1]);
setappdata(pde_fig,'colstring','');

```

```
setappdata(pde_fig,'arrowstring','');  
setappdata(pde_fig,'deformstring','');  
setappdata(pde_fig,'heightstring','');  
  
% Solve PDE:  
pdetool('solve');
```

5.6 Заключение

PDE Toolbox является эффективным и доступным средством решения задач теплообмена. Освоение этого встроенного в Matlab инструмента является естественным первым шагом к более мощным вычислительным пакетам, в особенности к системе Femlab, также базирующейся на вычислительной среде Matlab и известной как оперативное средство решения сложных реальных задач.

PDE Toolbox сочетает в себе, с одной стороны, фирменный графический пользовательский интерфейс, встроенные эффективные алгоритмы построения областей, сеток, решений, и – с другой – открытость программы, возможность пользовательского вмешательства на разных уровнях. Благодаря этому, можно разрабатывать удобные специализированные системы, как в приведенном выше простом примере задачи о температурном поле твэла (см. функцию «Fuel_El_UO2_He_Zr»).