

## 15 Тепломассообмен: горение, защита от высокотемпературных потоков

### 15.1 Введение

Существует круг практически важных задач массообмена, объединенных явлением гетерогенного катализа, когда химические реакции активно протекают на специальных твердых поверхностях, но практически не идут в газовой или жидкой фазах. Известным примером является автомобильный конвертер – дожигатель вредных выбросов автомобильного двигателя.

При проектировании такого рода тепломассообменных аппаратов стремятся получить развитую поверхность контакта, что, в частности, стимулирует разработку т.н. *микрочанальных* устройств (см. [гл. 25](#) Электронного курса).

К рассматриваемому кругу задач относятся также процессы горения *твердого* топлива, например, угля или графита. Давление паров твердых веществ слишком мало, чтобы реакция шла в газовой фазе (как это бывает при испарении капель жидкого топлива), и реакция протекает на поверхности.

Графит как материал, стойкий до температур  $\sim 3000\text{K}$ , применяется для защиты от высокотемпературных потоков в ракетной технике. Режим *абляции* защитных покрытий связан с реакциями на твердых поверхностях. В ядерной энергетике графит применяется как замедлитель в некоторых типах реакторов. Поэтому возможные аварийные ситуации должны рассматриваться с учетом горения графита.

Проблема защиты поверхностей от воздействия высокотемпературных потоков эффективно решается посредством *вдувания* через обтекаемую поверхность.

В качестве модельных задач рассмотрены массообмен в окрестности критической точки поперечно обтекаемого цилиндра и теплообмен в турбулентном пограничном слое на продольно обтекаемой пластине со щелевым и распределенным вдувом. Основным инструментом анализа будут интегральные уравнения пограничного слоя (см. также предыдущую [гл. 14](#) Электронного курса).

Процессы тепломассообмена с фазовыми превращениями на поверхностях раздела (испарение, конденсация), подробно рассмотрены отдельно в [гл. 20](#) Электронного курса.

## 15.2 Горение

### **Интегральное уравнение диффузионного пограничного слоя**

Понятие пограничного слоя обсуждалось в [гл. 12](#) Электронного курса. При обтекании поверхностей потоками с большими числами Рейнольдса изменения скорости, температуры, концентрации сосредотачиваются в тонком – *пограничном* – слое вблизи стенки. Мерой толщины *диффузионного* пограничного слоя является величина  $\delta_{D^{**}}$ , называемая толщиной *потери* концентрации, т.е. уменьшения от исходного значения  $c_{1\infty}$  этой величины в набегающем потоке:

$$\rho u_{\infty} \delta_{D^{**}} (c_{1\infty} - c_{1w}) \equiv \int_0^{\infty} \rho u(y) (c_{1\infty} - c_1(y)) dy$$

В левой части этого уравнения – модельное представление потери концентрации потоком смеси в пределах диффузионного пограничного слоя, а в правой – соответствующее точное выражение. Последнее может быть вычислено, если известны (из теоретического решения или из эксперимента) распределения концентрации и скорости по сечению пограничного слоя. Таким образом, согласно определению:

$$\delta_{D^{**}} \equiv \frac{\int_0^{\infty} \rho u(y) (c_{1\infty} - c_1(y)) dy}{\rho u_{\infty} (c_{1\infty} - c_{1w})} \quad (15.1)$$

Толщина потери концентрации служит линейным масштабом при построении локального числа Рейнольдса:

$$\text{Re}_{D^{**}} = \frac{u_{\infty} \delta_{D^{**}}}{\nu} \quad (15.2)$$

*Интегральное уравнение* диффузионного пограничного слоя представляет собой формулировку закона сохранения массы рассматриваемого компонента смеси (индекс «1») для специального контрольного объема, охватывающего всю толщину пограничного слоя и дифференциально малого в продольном направлении  $x$ :

$$\frac{d}{dx} \underbrace{(\rho u_{\infty} \delta_{D^{**}} (c_{1\infty} - c_{1w}))}_{\text{Потеря концентрации}} = -j_{diff\ w} + j_{\Sigma w} (c_{1\infty} - c_{1w}) \quad (15.3)$$

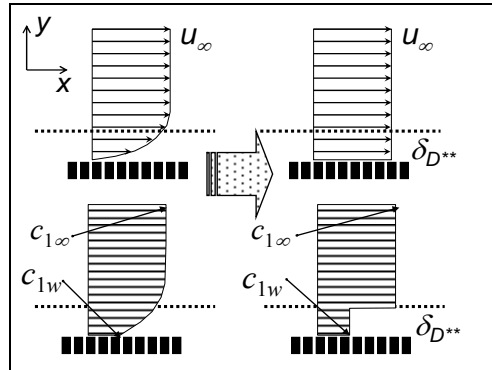


Рис. 15.1. Модельное представление диффузионного пограничного слоя

Уравнение (15.3) основано на модельном представлении диффузионного пограничного слоя (Рис. 15.1). Проницаемость стенки для потоков массы, специально показанная на рисунке, является принципиальной особенностью массообмена по сравнению с обычным конвективным теплообменом на твердых поверхностях.

В левой части рисунка представлено *действительное* распределение скорости и концентрации в пограничном слое. Для определенности принимают, что вдоль поверхности движется жидкость, обогащенная рассматриваемым компонентом смеси и теряющая этот компонент через проницаемую стенку. Эквивалентное представление (по содержанию массы компонента в потоке смеси) дано в правой части рисунка. Считают, что в слое толщиной  $\delta_{D^{**}}$  поток смеси полностью теряет избыток концентрации по отношению к стенке  $(c_{1\infty} - c_{1w})$ ; одновременно принимают, что скорость смеси остается равной скорости внешнего потока  $u_\infty$  вплоть до стенки. Тогда расход смеси, полностью "потерявшей" избыточную концентрацию, вычисляется как  $(\rho u_\infty \delta_{D^{**}})$ .

После этих предварительных замечаний можно непосредственно записать интегральное уравнение диффузионного пограничного слоя (15.3); подробное обоснование дано в предыдущей [гл. 14](#) на примере теплового пограничного слоя.

Согласно уравнению сохранения компонента смеси (15.3), *потеря концентрации* компонента «1» в слое  $\delta_{D^{**}}$  *увеличивается* вдоль проницаемой поверхности вследствие

- отвода рассматриваемого компонента смеси к стенке посредством *диффузии (кондуктивного переноса)* (первое слагаемое справа):

$$j_{1\text{diff}w} = -\rho D \left. \frac{\partial c_1}{\partial y} \right|_{y=0} \quad (15.4)$$

- затрат на обогащение (от  $c_{1w}$  до  $c_{1\infty}$ ) компонентом «1» вдуваемого потока  $j_{\Sigma w}$ ; это второе слагаемое в правой части (15.3) можно

интерпретировать как конвективный поток в поперечном направлении:

$$\begin{aligned} j_{\Sigma w}(c_{1\infty} - c_{1w}) &\equiv \rho v_w (c_{1\infty} - c_{1w}); \\ j_{\Sigma w} &= \rho v_w. \end{aligned}$$

Полезно иметь в виду, что величина  $j_{\Sigma w}$  задает некоторое *конечное* (не нулевое) значение  $v_w$  *поперечной* скорости гидродинамического потока на проницаемой стенке.

Диффузионный *параметр проницаемости*  $b_{D1}$  вводится как соотношение конвективного и диффузионного потоков массы компонента смеси на проницаемой поверхности:

$$b_{D1} \equiv \frac{j_{\Sigma w}(c_{1\infty} - c_{1w})}{(-j_{1w\_diff})} \equiv \frac{j_{\Sigma w}}{\rho u_\infty} \frac{1}{St_D} \quad (15.5)$$

Диффузионное число Стантона  $St_D$  является мерой интенсивности процесса массообмена на стенке:

$$St_D \equiv \frac{\left( \frac{-j_{1w\_diff}}{c_{1\infty} - c_{1w}} \right)}{\rho u_\infty} \equiv \frac{\rho \beta}{\rho u_\infty} \quad (15.6)$$

где  $\beta$ , м/с – коэффициент массоотдачи:

$$j_{1w\_diff} = -\rho D \left. \frac{\partial c_1}{\partial y} \right|_{y=+0} = \rho \beta (c_{1w} - c_{1\infty}) \quad (15.7)$$

В числителе (15.6) записано отношение потока переносимой величины к соответствующей движущей силе, т.е. проводимость ( $\rho\beta$ ). В знаменателе – масштаб для этой величины, в качестве которого выступает продольный поток массы ( $\rho u_\infty$ ), потенциально способный обеспечить высокую интенсивность переноса.

Уравнение диффузионного пограничного слоя (15.3) содержит две неизвестные величины. Если в качестве граничного условия на стенке задается концентрация на поверхности, то искомыми величинами являются толщина потери концентрации  $\delta_{D^{**}}$  и плотность диффузионного (кондуктивного) потока массы на стенке ( $j_{1w\_diff}$ ). Необходимое дополнительное соотношение между неизвестными величинами задается *законом массообмена* (см. далее).

При интегрировании уравнения (15.3) вдоль обтекаемой поверхности (вдоль  $x$ ) должно быть поставлено начальное условие. Например, на передней кромке проницаемой пластины равна нулю толщина потери концентрации,  $\delta_{D^{**}}(x=0) = 0$ .

Для справки приведем основные обозначения и определения для двухкомпонентных смесей:

плотность  $i$ -го компонента:

$$\rho_i, \frac{\text{кг } i\text{-го комп.}}{\text{м}^2 \text{ смеси}},$$

концентрация  $i$ -го компонента:

$$c_i = \frac{\rho_i}{\rho_{см}};$$

$$\rho_1 + \rho_2 = \rho_{\Sigma}; \quad c_1 + c_2 = 1$$

плотность потока массы компонента смеси:

$$\vec{j}_i = \rho \vec{w} c_i - \rho D \text{ grad } c_i, \quad \frac{\text{кг } i\text{-го комп.}}{\text{м}^2 \text{ с}},$$

где  $D$  – коэффициент диффузии бинарной смеси; первое слагаемое в правой части – конвективная составляющая потока массы, второе слагаемое – диффузионная (кондуктивная) составляющая, обусловленная концентрационной диффузией;

плотность массового потока и скорость смеси:

$$\vec{j}_{\Sigma} \equiv j = \vec{j}_1 + \vec{j}_2 = \rho \vec{w}$$

Если величина употребляется без индекса, то по умолчанию предполагается, что она относится к смеси в целом.

### **Стандартные законы**

Соотношение между числом Стантона  $St_D$  (локальной проводимостью, см. (15.6)) и числом Рейнольдса  $Re_{D^{**}}$  (локальной толщиной пограничного слоя, см. (15.2)):

$$St_{D0} = f(Re_{D^{**}}, Pr_D) \quad (15.8)$$

установленное на основе теоретических и экспериментальных исследований массообмена при обтекании безградиентным внешним потоком непроницаемой (т.е. при стремящемся к нулю поперечном потоке массы,  $j_{\Sigma w} \rightarrow 0$ ) пластины с постоянными значениями концентрации на ее поверхности, называют *стандартным законом массообмена*.

Благодаря локальному характеру, соотношение (15.8) приобретает свойство определенной универсальности, общности, и может быть распространено (как хорошее приближение) на условия, отличные от тех, при которых оно было непосредственно получено. Например, на потоки с продольными градиентами давления, или с переменной по поверхности концентрацией. Однако влияние поперечного потока массы должно быть учтено специальной корректировкой.

Ниже приведены степенные аппроксимации, пригодные для газов и неметаллических жидкостей:

для ламинарного режима течения в пограничном слое,  $Re_{**} < Re_{**cr} \approx 400$ :

$$St_{D0} = \frac{0.22}{Re_{D**} Pr_D^{4/3}} \quad (15.9)$$

для турбулентного режима,  $Re_{**} > Re_{**cr} \approx 400$ :

$$St_{D0} = \frac{0.0128}{Re_{D**}^{1/4} Pr_D^{3/4}} \quad (15.10)$$

Условие ламинарно–турбулентного перехода записывается для числа Рейнольдса, построенного по толщине потери импульса  $\delta_{**}$  (ср. с (15.1)):

$$Re_{**} = \frac{u_{\infty} \delta_{**}}{\nu}.$$

Поэтому, вообще говоря, необходимо вести параллельный расчет диффузионного и гидродинамического (и, часто, теплового) пограничных слоев. Этот вопрос подробнее рассмотрен в [гл. 20](#) Электронного курса; здесь мы ограничимся ссылкой на приближенный характер прогнозирования перехода и на относительно близкие значения толщин пограничных слоев в случае газовых потоков. Критическое число  $Re_{**cr}$  принято равным примерно 400, что соответствует "техническим", возмущенным потокам. При сильном вдуве практически гарантирован турбулентный режим. Напротив, при отсосе происходит ламинаризация потока.

### **Физика горения**

В качестве модельной задачи рассмотрим обтекание затупленного графитового тела со скоростью  $w$  (Рис. 15.2). Таким образом, мы моделируем защиту объекта от воздействия высокотемпературного набегающего потока, либо горение частицы угля в камере сгорания энергетической установки.

Рассчитаем интенсивность выгорания углерода в окрестности критической точки, где поток разветвляется. Скорость обтекания  $u_{\infty}$  профиля переменна и задается в окрестности критической точки соотношением:

$$u_{\infty} = 2w \sin\left(\frac{x}{R}\right) \quad (15.11)$$

Примером может быть поперечное обтекание цилиндра, необязательно круглого:  $R$  – это радиус кривизны поверхности вблизи критической точки.

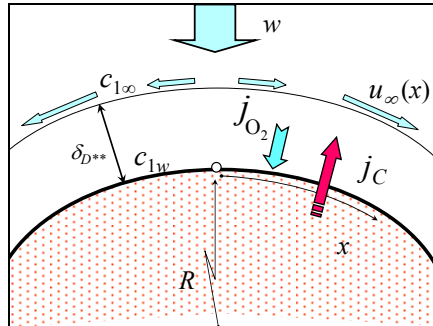
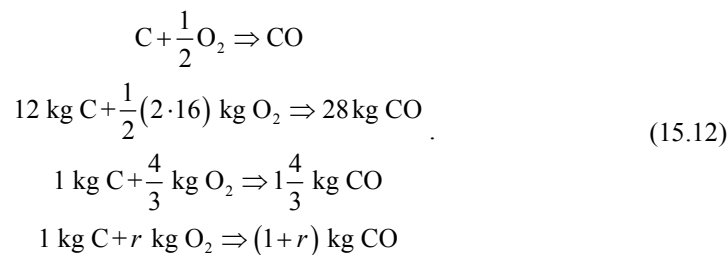


Рис. 15.2. Диффузионный пограничный слой в окрестности критической точки поперечно обтекаемого цилиндра

При высокой температуре окисление углерода на твердой поверхности будет происходить с образованием оксида углерода (угарного газа):



где через  $r$  обозначена доля окислителя в реакции ( $r = 4/3$ ). Давление паров топлива (углерода) над графитом настолько мало, что концентрацией этого компонента в газовой фазе можно пренебречь даже при очень высоких температурах. Поэтому реакция окисления (горение) идет только на самой твердой поверхности. Содержание кислорода уменьшается в пределах диффузионного пограничного слоя по мере приближения к стенке из-за накопления продуктов сгорания. Ясно, что актуальным компонентом газовой смеси является кислород, который идентифицируется в формулах либо индексом 1, либо своим химическим символом.

Поток кислорода, поддерживающий горение, как обычно, состоит из конвективной и кондуктивной (диффузионной) составляющих:

$$j_{O_2} = j_{\Sigma} \cdot c_{O_2} + j_{O_2\_diff} \quad (15.13)$$

На твердой поверхности подводимый кислород соединяется с углеродом и покидает поверхность в обратном направлении в связанном виде. Поэтому единственным переносимым через поверхность *веществом* будет углерод, и массовый поток газовой смеси окажется просто равным скорости выгорания углерода  $j_C$ :

$$j_{\Sigma} = j_C. \quad (15.14)$$

Связь между количествами кислорода и углерода, вступающими в реакцию, уже установлена (см. (15.8)) и следует только учесть противоположное направление потоков кислорода и углерода:

$$j_{O_2} = -r \cdot j_C. \quad (15.15)$$

Существует два предельных режима горения на твердой поверхности. Если скорость самой реакции высока, а подвод кислорода через диффузионный пограничный слой затруднен, то скорость выгорания углерода будет определяться массообменом в пограничном слое. Именно этот режим, называемый обобщенно «массообменом с каталитическими реакциями на стенке», рассматривается в дальнейшем. (Другой, неактуальный для нас сейчас режим, лимитируется относительно небольшой скоростью самой химической реакции на стенке, в то время как интенсивность массообмена предельно высока).

В пределе высокой скорости реакции, концентрация кислорода непосредственно у стенки стремится к нулю

$$c_{O_2} \Big|_w \rightarrow 0. \quad (15.16)$$

Любое повышение концентрации кислорода немедленно компенсируется убылью последнего в быстротекающей реакции на стенке, в то время как подвод кислорода контролируется относительно «медленным» процессом диффузии через газовый пограничный слой.

Из условия (15.16) следует:

$$\begin{aligned} j_{O_2} &= j_{\Sigma} \cdot c_{O_2} + j_{O_2\_diff} \Rightarrow \\ j_{O_2} \Big|_w &= j_{\Sigma} \Big|_w \cdot c_{O_2} \Big|_w + j_{O_2\_diff} \Big|_w \Rightarrow j_{O_2} \Big|_w = j_{\Sigma} \cdot 0 + j_{O_2\_diff} \Big|_w \\ j_{O_2} \Big|_w &= j_{O_2\_diff} \Big|_w \end{aligned} \quad (15.17)$$

т.е. поток кислорода непосредственно на стенке рассчитывается как диффузионный (кондуктивный) поток, определяемый *градиентом* концентрации кислорода на стенке. Скорость диффузии кислорода вблизи стенки определяет скорость выгорания графита:

$$\begin{aligned} j_{O_2} \Big|_w &= -r \cdot j_C; \quad j_{O_2} \Big|_w = j_{O_2\_diff} \Big|_w \Rightarrow \\ j_{O_2\_diff} \Big|_w &= -r \cdot j_C \end{aligned} \quad (15.18)$$

Выпишем условия сохранения массы по обеим сторонам поверхности раздела «графит (graphite)–газовая смесь ( $\Sigma$ )»:



$$\begin{aligned} j_{\Sigma w} &\equiv j_C; \\ j_{\Sigma w} &= \rho_{\text{graphite}} v_{\text{graphite}} = \rho_{\Sigma} v_{\Sigma w}; \\ \rho_{\text{graphite}} &\gg \rho_{\Sigma}; \\ v_{\text{graphite}} &\ll v_{\Sigma w} \end{aligned}$$

Величина поперечной скорости  $v_{\text{graphite}}$  определяет, например, с какой скоростью (м/с) уменьшается толщина защитного графитового покрытия вследствие выгорания (абляция защитного покрытия). Поперечная скорость в газовом потоке  $v_{\Sigma} \gg v_{\text{graphite}}$  показывает, с какой скоростью (м/с) удаляются газовые продукты сгорания от стенки. Скорость такого «вдува» в пограничный слой может быть значительной при интенсивном горении.

Важным результатом предварительного анализа горения является возможность вычислить параметра проницаемости через заданные в условиях задачи величины:

$$b_{D1} \equiv \frac{j_{\Sigma}}{\rho u_{\infty} St_D} = \frac{j_{\Sigma}}{\rho u_{\infty}} \frac{\rho u_{\infty} (c_{O_2\infty} - c_{O_2w})}{(-j_{O_2\text{-diff}}|_w)} = \frac{c_{O_2\infty} - c_{O_2w}}{r} \approx \frac{c_{O_2\infty}}{r}. \quad (15.19)$$

### Интегрирование уравнения диффузионного пограничного слоя

Целью расчета является определение скорости выгорания при заданных величинах:

- концентрации кислорода  $c_{1\infty}$  в набегающем потоке газа,
- скорости набегающего потока  $w$ ,
- радиуса поверхности  $R$ .

Учитывая результаты предварительного анализа (15.18),(15.19), расчет можно было бы выполнить, используя уравнение массоотдачи (15.7):

$$\left. \begin{aligned} j_{O_2\text{-diff}}|_w &= -r j_C \\ j_{1\text{-diff}}|_w &= \rho\beta(c_{1w} - c_{1\infty}) \end{aligned} \right\} \Rightarrow j_C = \rho\beta \frac{(c_{1\infty} - c_{1w})}{r}; \quad c_{1w} = 0; \quad (15.20)$$

$$j_C = \rho\beta b_{D1}$$

(в левой части двух исходных уравнений фигурирует одна и та же величина, поскольку индекс компонента смеси «1» соответствует кислороду «O<sub>2</sub>»). Однако коэффициент массоотдачи  $\beta$  неизвестен.

План решения задачи таков. Исходными соотношениями являются уравнение диффузионного пограничного слоя (15.3) и закон массообмена (15.9). Интегрируя дифференциальное уравнение (15.3) по продольной координате  $x$  (Рис. 15.2), найдем распределение толщины диффузионного пограничного слоя  $\delta_{D^{**}}$  (или его безразмерного представления  $Re_{D^{**}}$  (15.2)) и коэффициента массоотдачи (в безразмерном представлении  $St_D$  (15.6)).

Введем также необходимые корректировки на влияние поперечного потока массы.

В критической точке ( $x = 0$ ), благодаря симметрии (Рис. 15.2), искомые распределения имеют экстремум. Благодаря этому в *близкой окрестности* критической точки правая часть дифференциального уравнения остается постоянной величиной, и приближенное интегрирование осуществляется просто:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(\rho u_\infty \delta_{D^{**}}(c_{1\infty} - c_{1w})) &= -j_{1diff\ w} + j_{\Sigma w}(c_{1\infty} - c_{1w}) \Rightarrow \\ \rho u_\infty \delta_{D^{**}}(c_{1\infty} - c_{1w}) &\simeq (-j_{1diff\ w} + j_{\Sigma w}(c_{1\infty} - c_{1w}))x \end{aligned} \quad (15.21)$$

Переходя к безразмерному представлению, получим после простых преобразований:

$$\begin{aligned} \frac{u_\infty \delta_{D^{**}}}{\nu} &= \left( \frac{-j_{1diff\ w}}{\rho u_\infty (c_{1\infty} - c_{1w})} + \frac{j_{\Sigma w}}{\rho u_\infty} \right) \underbrace{\left( \frac{x u_\infty}{\nu} \right)}_{Re_x}; \\ Re_{D^{**}} &= \left( St_D + \frac{j_{\Sigma w}}{\rho u_\infty} \right) Re_x \equiv St_{D0} \left( \frac{St_D}{\frac{St_{D0}}{\Psi_D}} + \frac{j_{\Sigma w}}{\rho u_\infty} \frac{1}{\frac{St_{D0}}{b_D}} \right) Re_x; \\ Re_{D^{**}} &= St_{D0} (\Psi_D + b_D) Re_x \end{aligned} \quad (15.22)$$

Введенный здесь фактор  $\Psi$  учитывает возможное отклонение от стандартного закона массообмена (см. соотношения (15.8)–(15.10)) из-за ненулевого поперечного потока массы на стенке:

$$\Psi_D(b_{D1}) \equiv \left( \frac{St_D}{St_{D0}} \right)_{Re_{D^{**}}} \quad (15.23)$$

Сопоставление производится при фиксированных значениях числа Рейнольдса  $Re_{D^{**}}$ , т.е. при фиксированных значениях толщин пограничного слоя. Модифицированный параметр проницаемости  $b_D$  связан с ранее введенным параметром  $b_{D1}$  (15.5) соотношением, непосредственно следующим из определений этих величин:

$$\frac{b_D}{b_{D1}} = \Psi_D \quad (15.24)$$

Полагая развивающееся течение в окрестности критической точки ламинарным, привлечем для дальнейших вычислений стандартный закон массообмена (15.9):

$$\begin{aligned} St_{D0} &= \frac{0.22}{Re_{D^{**}} Pr_D^{4/3}}; \\ Re_{D^{**}} &= \frac{\sqrt{0.22}}{Pr_D^{2/3}} \sqrt{\Psi_D + b_D} \sqrt{Re_x}; \\ St_D &\equiv \frac{-j_{diff\ w}}{\rho u_\infty (c_{1\infty} - c_{1w})} \equiv \frac{\beta}{u_\infty} = \frac{\sqrt{0.22}}{\sqrt{Re_x} Pr_D^{2/3}} \frac{\Psi_D}{\sqrt{\Psi_D + b_D}} \end{aligned} \quad (15.25)$$

После подстановки выражения (15.11) для распределения скорости  $u_\infty(x)$  получим:

$$\begin{aligned} \frac{\beta}{w} &= \frac{0.94}{Re_d^{1/2} Pr_D^{2/3}} \sqrt{\frac{\sin(x/R)}{(x/R)}} \frac{\Psi_D}{\sqrt{\Psi_D + b_D}}; \\ Re_d &= \frac{wd}{\nu}; \quad d = 2R \end{aligned} \quad (15.26)$$

Определив коэффициент массоотдачи  $\beta$ , мы воспользуемся теперь соотношениями (15.20), чтобы завершить решение задачи и рассчитать скорость выгорания графита:

$$\begin{aligned} j_C &= \rho \beta b_{D1}; \\ b_{D1} &= \frac{(c_{1\infty} - c_{1w})}{r}; \quad c_{1w} = 0 \end{aligned}$$

Очевидные подстановки и преобразования (см. (15.24), (15.26)) дают:

$$\begin{aligned} \frac{j_C}{\rho w} &= \frac{\beta}{w} b_{D1} = \left[ \frac{0.94}{Re_d^{1/2} Pr_D^{2/3}} \sqrt{\frac{\sin(x/R)}{(x/R)}} \frac{\Psi_D}{\sqrt{\Psi_D + b_D}} \right] b_{D1}; \\ b_D &= \Psi_D b_{D1} \end{aligned} \quad (15.27)$$

и окончательно:

$$\begin{aligned} \frac{j_C}{\rho w} &= \left\{ \frac{0.94}{Re_d^{1/2} Pr_D^{2/3}} \right\} \left\{ \sqrt{\frac{\sin(x/R)}{(x/R)}} \right\} \left\{ \frac{\Psi_D(b_{D1})}{1 + b_{D1}} \right\} b_{D1}; \\ b_{D1} &= \frac{(c_{1\infty} - c_{1w})}{r}; \quad c_{1w} = 0; \quad r = \frac{4}{3} \end{aligned} \quad (15.28)$$

### Результаты

Расчетная формула (15.28) имеет факторизованную структуру.

Первый множитель является гидродинамическим фактором, т.е. определяет влияние скорости и режима течения. Заметим, что в рамках

аналогии между процессами тепло- и массообмена, после замены  $P_{ГD} \rightarrow P_{Г}$  этот фактор определит также теплоотдачу в окрестности критической точки.

Второй множитель дает зависимость от продольной координаты (вблизи критической точки) (Рис. 15.2, Рис. 15.3). В пределах четверти окружности, где еще имеет смысл допущение «окрестность критической точки», локальная скорость горения изменяется незначительно.

Третий фактор определяет влияние поперечного потока массы (проницаемости стенки) на массоотдачу в пограничном слое (Рис. 15.4). Если параметр проницаемости стремится к нулю, например, при уменьшении концентрации кислорода в набегающем потоке, то этот фактор становится близким к единице. Сопоставление с полным решением (15.28) показывает, что ошибка от пренебрежения эффектом поперечного потока становится значительной при больших скоростях горения.

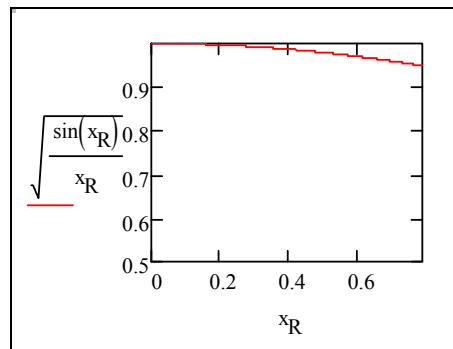


Рис. 15.3. Изменение скорости горения вдоль профиля поверхности

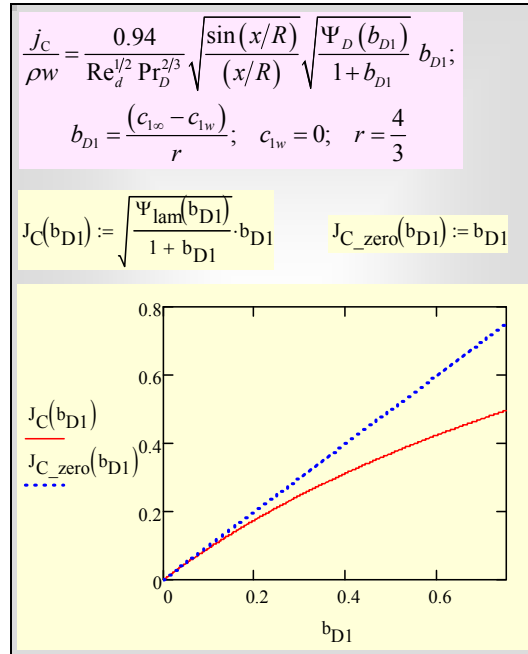


Рис. 15.4. Зависимость скорости горения от параметра проницаемости

Зависимость корректирующего фактора  $\Psi$  (см. (15.23)) от параметра проницаемости в двух модификациях ( $b_D$  и  $b_{D1}$ ) представлена на Рис. 15.5, Рис. 15.6. Положительные значения параметра проницаемости соответствуют вдуву, как при горении или испарении, отрицательные – отсосу, как при конденсации.

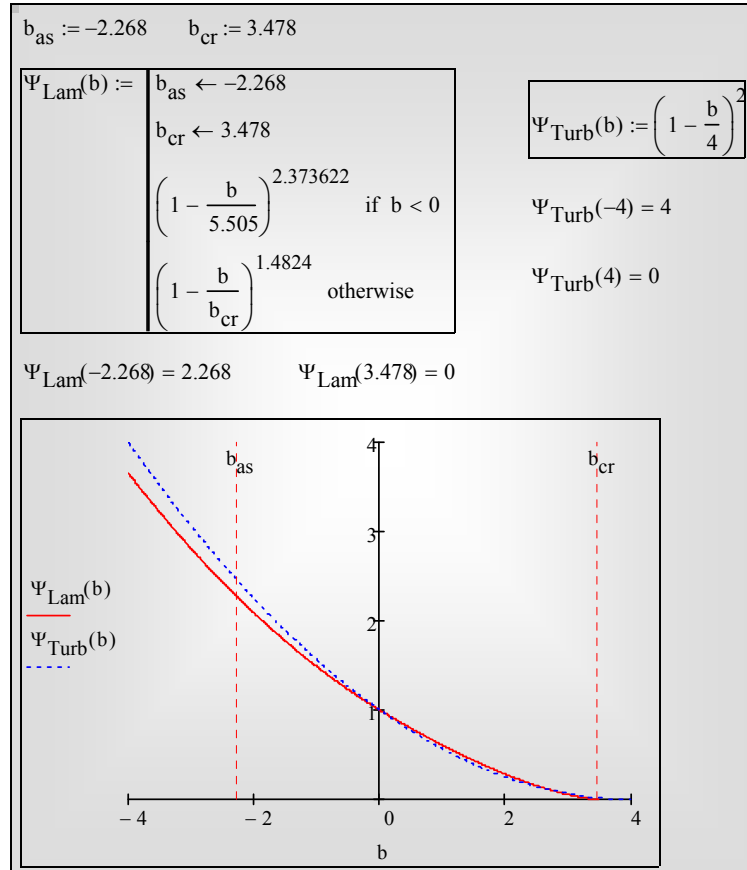


Рис. 15.5. Корректирующий фактор  $\Psi(b)$  при вдуве ( $b > 0$ ) и отсосе ( $b < 0$ )

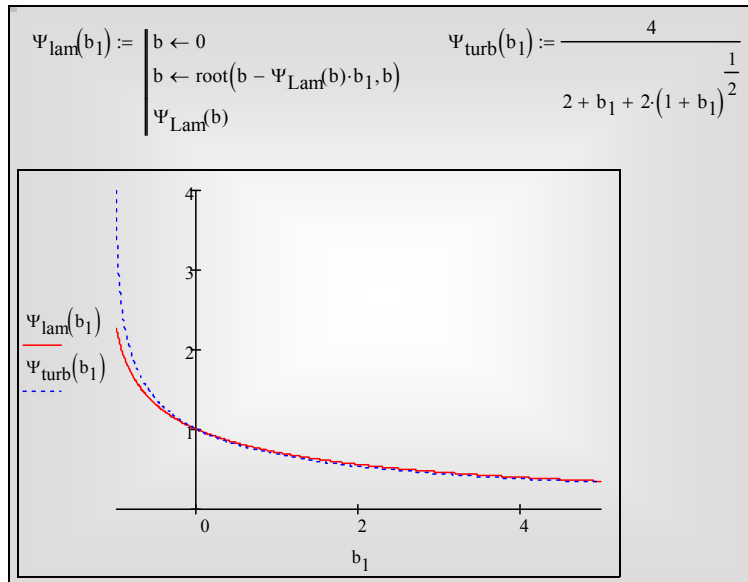


Рис. 15.6. Корректирующий фактор  $\Psi(b_1)$  при вдуве ( $b_1 > 0$ ) и отсосе ( $b_1 < 0$ )

За пределами проведенного анализа остается вопрос о температуре стенки. Можно наметить следующий план решения этой проблемы.

Поскольку скорость горения уже определена, то фактически задана плотность теплового потока на стенке как произведение скорости выгорания  $j_c$  на удельную теплоту сгорания топлива (графита).

Далее необходимо решить задачу теплообмена при заданном параметре проницаемости и заданном тепловом потоке, что можно сделать, оперируя с интегральным уравнением теплового пограничного слоя и законом теплообмена, аналогично уже решенной диффузионной задаче. Однако для тепловой задачи возникает специфическая трудность, связанная со значительной ролью теплообмена излучением.

Другая сложность всей рассматриваемой проблемы – это зависимость теплофизических свойств от температуры и состава газа, сложность, которую, по-видимому, трудно преодолеть в рамках применения средних параметров.

### 15.3 Защита поверхности от воздействия высокотемпературного потока посредством вдува

#### Постановка задачи

На практике часто возникает проблема защиты поверхностей от воздействия высокотемпературных потоков. В качестве примеров можно

назвать камеры сгорания, сопловые аппараты и лопатки газовых турбин, своды металлургических печей и т.п. Посредством вдува можно существенно уменьшить интенсивность теплообмена поверхности с высокотемпературным потоком и понизить температуру до допустимых значений. Конструктивно вдув осуществляется через специальные щели или каналы, или сама твердая поверхность выполняется из пористого металла.

Схематически рассматриваемая далее задача представлена на Рис. 15.7.

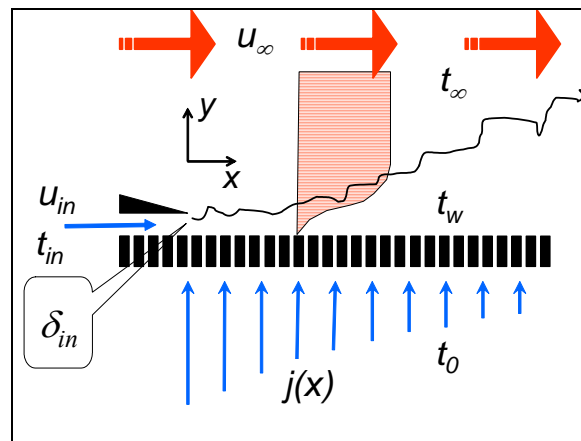


Рис. 15.7. Защита посредством вдува

Пористая пластина длиной  $L$  обтекается продольным высокотемпературным ( $t_\infty$ ) потоком газа. Охлаждающий газ с температурой  $t_0$  вдувается через поверхность. *Требуется подобрать такую величину и распределение вдува  $j(x)$ , чтобы температура поверхности поддерживалась на заданном уровне  $t_w$ .*

Как известно, интенсивность теплообмена особенно велика на передней кромке пластины, вследствие чего ее температура будет близка к температуре газа. Для защиты передней кромки предусмотрен специальный щелевой вдув с указанными на схеме параметрами.

### Модельные представления

Сформулируем модельные представления, которые позволят перейти далее к математической постановке задачи.

Поток на выходе из щелевого канала должен трансформироваться в пограничное течение (Рис. 15.7). Мы не будем детально рассматривать сложную картину этого перехода и ограничимся балансовым соотношением:



$$\begin{aligned} \rho c_p u_{in} \delta_{in}(t_\infty - t_{in}) &= \rho c_p u_\infty \delta_{T^{**}}(t_\infty - t_w) \Rightarrow \\ \delta_{T^{**}}|_{x=0} &\approx \delta_{in} \frac{u_{in} t_\infty - t_{in}}{u_\infty t_\infty - t_w}; \\ \text{Re}_{T^{**}0} &= \frac{u_\infty \delta_{T^{**}0}}{\nu}, \end{aligned} \quad (15.29)$$

согласно которому пограничный слой наследует «потерю энтальпии» щелевого потока и которое определяет начальную толщину теплового пограничного слоя  $\delta_{T^{**}0}$  и начальное значение числа Рейнольдса  $\text{Re}_{T^{**}0}$ .

При вдуве переход от ламинарного течения к турбулентному происходит при относительно малых значениях числа Рейнольдса, и мы примем, что условие перехода выполняется для полученного значения  $\text{Re}_{T^{**}0}$ .

Поскольку температура стенки  $t_w$  при включенном охлаждении меньше температуры набегающего потока газа  $t_\infty$ , возникает тепловой поток в направлении к стенке ( $-q_w$ ). В случае распределенного вдува через пористую стенку разумно предположить, что поток ( $-q_w$ ) расходуется на подогрев проходящего через пористую структуру вдуваемого теплоносителя от начальной температуры  $t_0$  до температуры поверхности  $t_w$ :

$$-q_w = j_w c_p (t_w - t_0) \quad (15.30)$$

Напомним, что величина  $t_w$  предопределена проектным заданием.

В безразмерном виде:

$$\begin{aligned} \frac{-q_w}{\rho c_p u_\infty (t_\infty - t_w)} &= \frac{j_w c_p (t_w - t_0)}{\rho c_p u_\infty (t_\infty - t_w)} \Rightarrow \\ \frac{t_w - t_0}{t_\infty - t_w} &= \frac{-q_w}{\rho c_p u_\infty (t_\infty - t_w)} \frac{1}{\left(\frac{j_w}{\rho u_\infty}\right)} \equiv \frac{\text{St}}{\left(\frac{j_w}{\rho u_\infty}\right)} = \frac{\frac{\text{St}}{\text{St}_0}}{\left(\frac{j_w}{\rho u_\infty} \frac{1}{\text{St}_0}\right)} \Rightarrow \\ \frac{t_w - t_0}{t_\infty - t_w} &\equiv \Theta = \frac{\Psi_T}{b_T} \end{aligned} \quad (15.31)$$

### Математическое описание

Итоговое соотношение (15.31) определяет главную идею решения задачи. Поскольку величина  $\Theta$  является заданным параметром (фиксированным числом), для обеспечения заданной температуры поверхности  $t_w$  необходимо поддерживать некоторое постоянное вдоль поверхности значение параметра проницаемости  $b_T$ , определяемое решением уравнения:

$$\left\{ \Theta = \frac{\Psi_T(b_T)}{b_T} \right\} \Rightarrow b_T(\Theta)$$

$$\left( b_T \equiv \frac{j_w}{\rho u_\infty} \frac{1}{St_0} \right) \Rightarrow \frac{j_w}{\rho u_\infty} = b_T(\Theta) \cdot St_0(Re_{T^{**}}) \quad (15.32)$$

$$Re_{T^{**}} \equiv \frac{u_\infty \delta_{T^{**}}}{\nu}$$

Детальный план решения будет таким:

- Вычислить температурный параметр  $\Theta$  по формуле (15.31)

$$\Theta = \frac{t_w - t_0}{t_\infty - t_w}$$

- Вычислить параметр проницаемости  $b_T$  по уравнению (15.32), верхняя строка

$$\left\{ \Theta = \frac{\Psi_T(b_T)}{b_T} \right\} \Rightarrow b_T(\Theta)$$

- Проинтегрировать уравнение теплового пограничного слоя (15.34) при полученном значении параметра проницаемости  $b_T$
- Представить решение в виде зависимости  $Re_{T^{**}}(x/L)$
- Рассчитать необходимое распределение вдува по формуле (15.32), нижняя строка

$$\frac{j_w}{\rho u_\infty} = b_T(\Theta) \cdot St_0(Re_{T^{**}}(x/L), Pr)$$

Математическое описание задачи включает:

- ♦ Интегральное уравнение теплового пограничного слоя, записанное с учетом проницаемости стенки (см. [гл. 14](#) Электронного курса):

$$\frac{d}{dx}(\rho c_p u_\infty \delta_{T^{**}}(t_\infty - t_w)) = -q_w + j_w c_p (t_\infty - t_w), \quad (15.33)$$

благодаря постоянству температурного напора легко преобразуемое к удобному для решения безразмерному виду:

$$\frac{d}{dX}(Re_{T^{**}}) = Re_L \cdot St_0(Re_{T^{**}}, Pr) \cdot (\Psi_T(b_T) + b_T); \quad (15.34)$$

$$b_T = const$$

- ♦♦ Закон теплообмена, скорректированный с учетом проницаемости стенки:

$$St = St_0(Re_{r^{**}}, Pr) \cdot \Psi_T(b_T) \quad (15.35)$$

где число Стантона с индексом "0" задается стандартной формулировкой (15.9), (15.10), а фактор проницаемости  $\Psi$  вычисляется по формулам на Рис. 15.5 как функция параметра проницаемости  $b$  (пользуясь аналогией процессов тепло- и массообмена, эти соотношения, записанные для массообмена, легко переформулировать для теплообмена; подробнее см. [гл. 20](#) Электронного курса).

### **Интегрирование уравнения теплового пограничного слоя**

Дифференциальное уравнение (15.34) – с разделяющимися переменными, поэтому можно продвинуться дальше с целью получить аналитическое решение. Однако это не всегда целесообразно при практических расчетах, главным образом потому, что результат нельзя обобщить при усложнении постановки задачи, или ввиду громоздкости получающихся формул.

Поэтому заключительный этап мы проведем в пакете Mathcad, сопровождая численные решения наглядными графиками результатов (Рис. 15.8, Рис. 15.9). Доступ к вычислительной программе можно получить по ссылке:

[..\Mathcad\\_HMT\15\\_Combustion\blowing\\_defense\\_1.xmcdz](#)

На Рис. 15.8 представлены пользовательские функции для расчета теплоотдачи  $St_0$ , корректирующего фактора  $\Psi$ , параметра проницаемости  $b(\Theta)$ , фактора  $(\Psi + b)$  в правой части дифференциального уравнения (15.34).

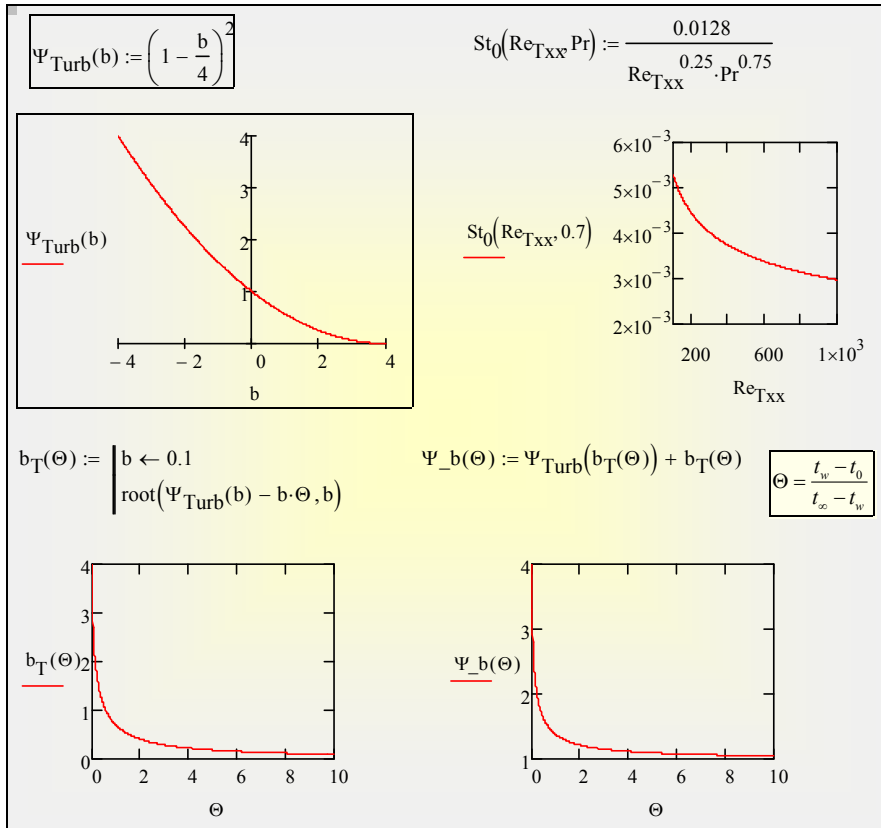


Рис. 15.8. Вычисление параметра проницаемости  $b_{\text{T}}$  как функции заданного температурного параметра  $\Theta$

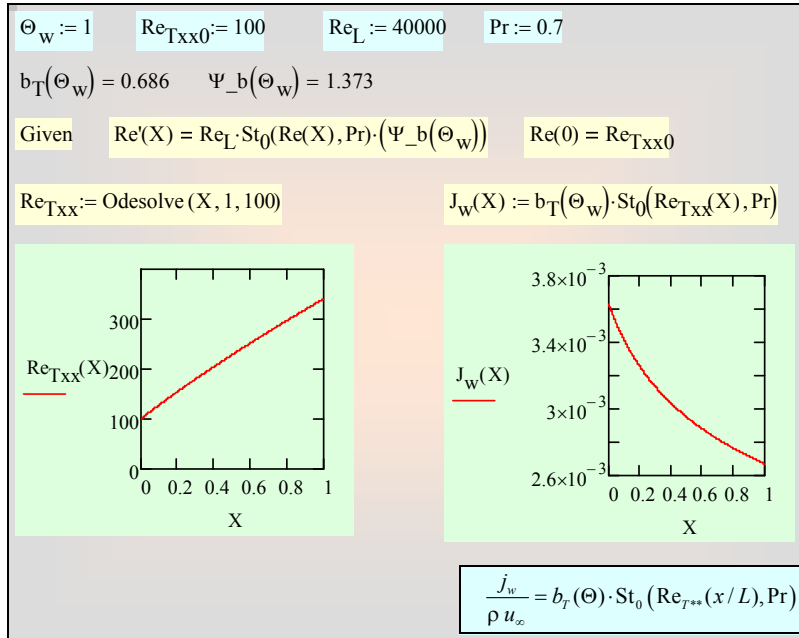


Рис. 15.9. Численное интегрирование уравнения теплового пограничного слоя методом Odesolve и расчет вдува

Входные параметры задачи выписаны в верхней строчке программы на Рис. 15.9. Далее в программном блоке Mathcad «Given – Odesolve» записаны дифференциальное уравнение (15.34) и начальное условие. Численное решение как функция  $Re_{T^{**}}(X)$  получается при обращении к встроенному интегратору Odesolve и представляется графически (это распределение безразмерной толщины пограничного слоя по длине пластины с учетом вдува).

**Результаты**

Главный результат, т.е. величина и распределение вдува, обеспечивающего заданный температурный режим  $\Theta_w = 1$ , где

$$\Theta_w \equiv \frac{t_w - t_0}{t_\infty - t_w},$$

представлен на правом графике (Рис. 15.9).

Безразмерная величина вдува:

$$J_w(X) \equiv \frac{j_w(x)}{\rho u_\infty}$$

составляет в среднем примерно 0.003 в рассмотренном примере; при скорости набегающего потока 300 м/с *поперечная* скорость на стенке составит примерно 1 м/с.

Выбранное для расчетного примера значение температурного параметра  $\Theta_w = 1$  соответствует температуре поверхности  $t_w$  посередине между высокой температурой потока  $t_\infty$  и низкой температурой вдуваемого теплоносителя  $t_0$ . Напомним, что целью расчета было определение того, каким должен быть вдув, чтобы обеспечить заданное значение температуры стенки  $t_w$ . Графики на Рис. 15.8 показывают, что если бы мы поставили задачу еще уменьшить температуру стенки (уменьшить  $\Theta_w$ ), то потребовалось бы увеличить параметр проницаемости  $b_T$ . Согласно верхнему левому графику (Рис. 15.8), при таком усилении вдува уменьшится коэффициент теплоотдачи (см. (15.35)), что для *целей защиты* поверхности является положительным эффектом.

Полезно поэкспериментировать с программой и проследить связь между температурным параметром  $\Theta_w$  и интенсивностью вдува  $J_w$ , а также внутренними характеристиками процесса, такими как фактор проницаемости  $b$ , корректирующий фактор  $\Psi$ . Как и для задачи горения, анализ может быть уточнен с целью учесть теплообмен излучением и переменность свойств теплоносителя.