

1 Законы переноса теплоты, вещества, импульса

1.1 Теплообмен

Температурное поле. Как математический объект, температурное поле представляют в виде уравнения

$$t = t(x, y, z, \tau), \quad (1.1)$$

означающего, что каждой точке материального объекта в каждый момент времени ставится в соответствие числовое значение температуры. Нахождение конкретного вида этой функциональной зависимости в каком-либо природном или техническом объекте является основной задачей теории тепломассообмена.

Материальными объектами, с которыми имеют дело в теории тепломассообмена, являются твердые тела различной геометрии (детали тепловых машин, стенки труб в теплообменниках и т.п.), газовые и жидкие теплоносители (воздух, вода и др.), обтекающие поверхности различной формы или движущиеся в каналах. Когда говорят о температуре в какой-либо *точке* объекта, то предполагают, что тела являются *сплошными средами*. Если размеры технического объекта велики по сравнению с межмолекулярными расстояниями, а это почти всегда так, то предположение о сплошности оправдано.

Наиболее сложными для расчета являются *трехмерные нестационарные температурные поля*, когда температура существенно изменяется по всем трем координатам и во времени. Если температура остается постоянной во времени, то имеют дело со *стационарными* температурными полями. Если существенным является изменение только вдоль двух координат или вдоль одной координаты, то температурное поле называют соответственно двумерным или одномерным. Например, $t = t(x, \tau)$ – это одномерное нестационарное поле.

Изотермы. Самым распространенным способом получить наглядное представление о температурном поле является изображение *изотерм*, т.е. поверхностей или линий, на которых температура имеет постоянное значение.

Предположим, что *известно* некоторое двумерное нестационарное поле $t = t(x, y, \tau)$, т.е. задан конкретный вид этой функциональной зависимости от координат и времени. Пусть необходимо построить изотерму t_1 (например, $t_1 = 20$ °С). Для фиксированного момента времени τ_1 можно записать:

$$t_1 = t(x, y, \tau_1). \quad (1.2)$$

Уравнение (1.2) связывает координаты x и y точек тела условием постоянства температуры. Геометрическое место таких точек с постоянной

температурой является *изотермой*. В двумерном случае получается некоторая линия или контур на плоскости рисунка. Изотерма в трехмерном объекте – это поверхность, например, сферическая поверхность в охлаждаемом шаре.

Рассмотрим пример - температурное поле в тепловыделяющем элементе (ТВЭЛ) ядерного реактора (Рис. 1.1). ТВЭЛ – это длинный цилиндрический стержень из двуокиси урана, покрытый тонкой циркониевой оболочкой. Внутри ТВЭЛ происходит мощное тепловыделение за счет ядерной реакции. Снаружи стержень охлаждается водой. Если охлаждение недостаточное, то температура оболочки может превысить допустимое значение (примерно 400°C) и последствия будут катастрофическими. На рисунке продемонстрирована опасная ситуация, когда условия охлаждения в правой нижней четверти окружности ТВЭЛ ухудшились, и изотерма 725°C вплотную приблизилась к оболочке. Расчет ТВЭЛ подробно рассматривается в [гл. 5](#) и [гл. 7](#) Электронного курса.

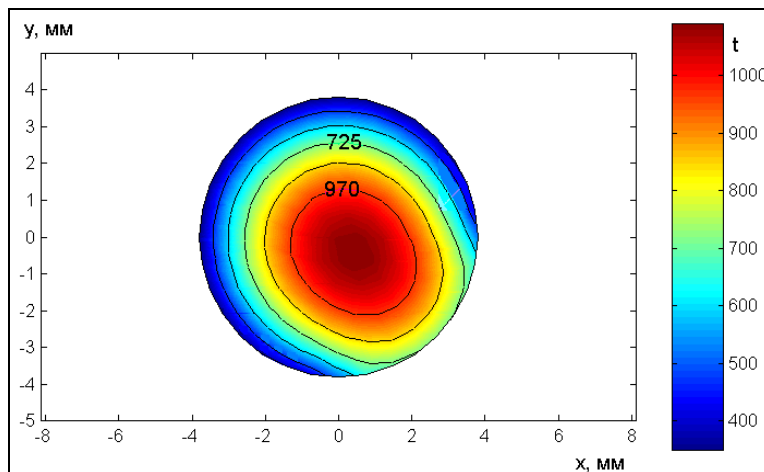


Рис. 1.1 Температурное поле в ТВЭЛ ядерного реактора.

Цвета изображения (или градации серого) соответствуют значениям температуры по шкале, показанной в правой части рисунка. Это температурное поле было рассчитано и сделано видимым на компьютере. Способ визуализации отражает особенности профессионального – для специалиста в области теплообмена - видения различных объектов. Мы отслеживаем изменения температуры от точки к точке, внимание концентрируется на областях с *разной температурой* и в особенности там, где температура может превысить допустимое значение. Можно утверждать, что в любой отрасли техники обеспечение безопасного температурного режима в различных установках является одной из важнейших задач конструктора.

Другое часто применяемое представление температурного поля использует для идентификации температуры и цвет, и вертикальную координату.

Двумерное температурное поле $t=t(x,y)$ в твэле представлено на рис. 1.2. Видно, что изотермы – это уровни постоянного значения температуры, спроектированные на плоскость (x,y) .

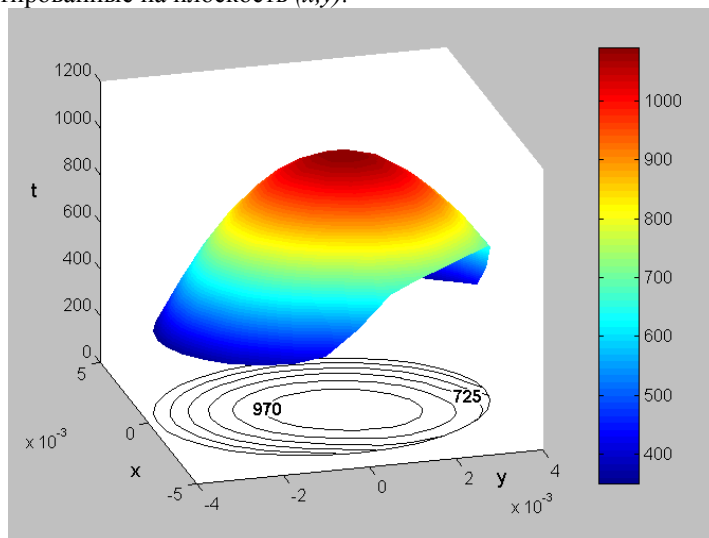


Рис. 1.2. Пространственное представление двумерного температурного поля.

Для одномерной задачи используют обычные графики $t=t(x)$ на плоскости. Для трехмерного поля приходится строить распределения температур в различных сечениях тела.

Производные от температуры. Кроме самих значений температуры в различных точках рассматриваемого объекта, нас интересует также скорость изменения температуры во времени и пространстве.

Частная производная

$$\frac{\partial t}{\partial \tau}, \text{ К/с}$$

характеризует скорость изменения температуры во времени в данной точке. Если во всех точках объекта эта величина равна нулю, то говорят о стационарном температурном поле. Большинство технических объектов работает при стационарном режиме, так что в инженерной практике чаще всего приходится рассчитывать стационарные поля.

Известно, однако, что при эксплуатации различных установок самыми опасными считаются нестационарные – пусковые или переходные – режимы. Для оптимизации таких режимов необходимо рассчитывать *нестационарные* температурные поля. При этом следят, чтобы температура не превысила допустимого предела. Важно также, чтобы перепады

температуры не стали слишком большими, так как иначе могут возникнуть разрушающие термические напряжения или недопустимые уменьшения зазоров между движущимися частями машин из-за неодинакового расширения.

Частная производная по времени является важным индикатором теплового состояния объекта. Если, например, это ненулевая положительная величина, т.е. температура возрастает, то можно полагать, что из соседней окрестности подводится поток тепловой энергии.

Частные производные

$$\frac{\partial t}{\partial x}, \frac{\partial t}{\partial y}, \frac{\partial t}{\partial z}, \text{ К/м}$$

характеризуют скорость изменения температуры вдоль координатных осей в фиксированный момент времени. Полезно представить себе, как следует производить измерения этих величин в некотором мысленном эксперименте. Например, для измерения частной производной по x необходимо иметь два датчика температуры, расположенных в близких точках вдоль оси x . Температуры в этих двух точках следует измерить в одно и то же мгновение и разделить разность температур на разность значений координаты x .

Можно поставить вопрос об интенсивности изменения температуры вдоль произвольного направления

$$\frac{\partial t}{\partial l}, \text{ К/м.}$$

Теперь опять будет полезен мысленный эксперимент с перемещением из некоторой точки в различных направлениях (Рис. 1.3). Если это направление вдоль изотермы (1), то мы не заметим никакого изменения температуры: производная по этому направлению равна нулю. Существует и другое характерное направление (3), при перемещении в котором обнаруживается наиболее быстрое пространственное изменение. Из построений следует, что это – нормаль к изотерме. Положительным считается направление в сторону роста температуры.

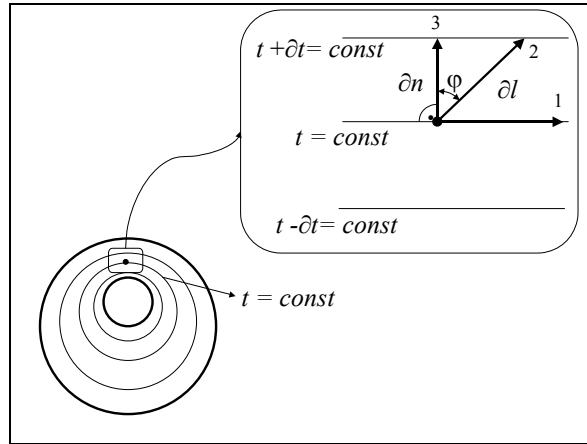


Рис. 1.3. Изотермы и производные по направлению. 1-перемещение вдоль изотермы, 2-в произвольном направлении, 3-по нормали к изотерме.

В нижней левой части рисунка показано некоторое реальное температурное поле, изотермы которого криволинейны. Однако если рассмотреть окрестность выделенной точки под очень большим увеличением и построить изотермы с очень частой градацией температуры, то картина упростится и будет выглядеть, как в правой верхней части рисунка. Изотермы со значениями температуры, отличающимися на малую величину δt , представляют собой систему параллельных прямых, расположенных на одинаковом расстоянии одна от другой.

Перемещаясь в любом направлении δl с одной изотермы на другую, мы обнаружим одно и то же изменение температуры δt , но расстояние, на котором происходит это изменение, будет различным. Самое короткое расстояние δn получается при перемещении по нормали к изотерме. Из очевидного соотношения

$$\delta l = \frac{\delta n}{\cos(\varphi)}, \quad \varphi = 0 \div \pi$$

следует

$$\frac{\partial t}{\partial l} = \frac{\partial t}{\partial n} \cdot \cos(\varphi), \quad \cos(\varphi) = 1 \div -1, \quad (1.3)$$

т. е. производная по нормали действительно имеет максимальное значение $\varphi = 0$ ($\cos(\varphi) = 1$), а производная вдоль изотермы обращается в ноль ($\varphi = \pi/2$, $\cos(\varphi) = 0$).

Производные по направлению являются скалярными величинами со знаком: отрицательные значения указывают на убывание температуры в рассматриваемом направлении.

Градиент температуры. Как мы видели, имеется особое направление – нормаль к изотерме и связанное с этим направлением численное значение, равное производной от температуры по нормали. Эту информацию можно хранить в одном математическом объекте – векторе градиента температуры.

Согласно определению, градиент температуры $\text{grad } t$ есть вектор, направленный в сторону максимального возрастания температуры в пространстве (то есть по нормали к изотерме) и численно равный производной от температуры по этому направлению (Рис. 1.4):

$$|\text{grad } t| = \frac{\partial t}{\partial n}. \quad (1.4)$$

Если имеется карта изотерм (как на рис. 1.3 или на рис. 1.4), то построить градиент температуры в любой точке очень просто: следует провести нормаль к изотерме, а длину (модуль) вектора найти, поделив прирост температуры на расстояние между изотермами. Разумеется, градация изотерм должна быть достаточно частой, чтобы получить результат с приемлемой точностью.

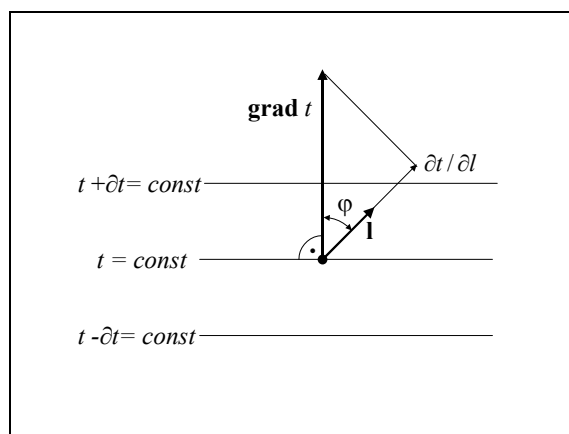


Рис. 1.4 Изотермы и градиент температуры

Другой способ задать вектор градиента – указать его проекции на оси координат. Выше мы уже определили понятие производной по направлению (см. формулу (1.3)). Если в качестве направления взять единичный вектор \mathbf{i} вдоль оси координат x и спроектировать градиент температуры на это направление, т.е. построить скалярное произведение

$$\mathbf{i} \cdot \text{grad } t = 1 \cdot |\text{grad } t| \cos(\varphi), \quad 1$$

то в соответствии с (1.4) и (1.3) получим в результате частную производную от температуры по x :

$$\mathbf{i} \cdot \text{grad } t = 1 \cdot |\text{grad } t| \cos(\varphi) = \frac{\partial t}{\partial n} \cos(\varphi) = \frac{\partial t}{\partial x},$$

где φ - угол между векторами \mathbf{i} и $\text{grad } t$.

Таким образом,

$$\frac{\partial t}{\partial x} = \mathbf{i} \cdot \text{grad } t; \quad \frac{\partial t}{\partial y} = \mathbf{j} \cdot \text{grad } t; \quad \frac{\partial t}{\partial z} = \mathbf{k} \cdot \text{grad } t$$

и градиент можно записать как векторную сумму составляющих по осям координат (Рис. 1.5):

$$\text{grad } t = \mathbf{i} \frac{\partial t}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial t}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial t}{\partial z}. \quad (1.5)$$

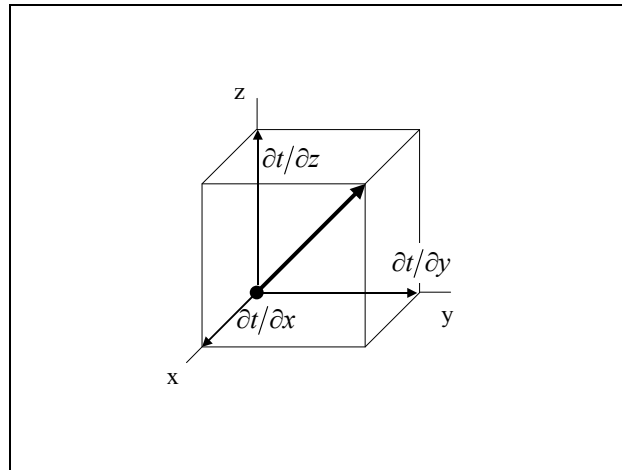


Рис. 1.5 Составляющие градиента температуры.

С помощью градиента температуры легко определить скорость изменения температуры в любом направлении в пространстве. Для этого зададим интересующее нас направление единичным вектором \mathbf{l} и спроектируем вектор градиента на это направление, т.е. составим скалярное произведение

$$\frac{\partial t}{\partial l} = \mathbf{l} \cdot \text{grad } t = \mathbf{l} \cdot |\text{grad } t| \cos(\varphi). \quad (1.6)$$

Модуль градиента определяется как корень квадратный из суммы квадратов проекций (Рис. 1.5):

$$|\text{grad } t| \equiv \frac{\partial t}{\partial n} = \sqrt{\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial t}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial t}{\partial z}\right)^2}, \text{ К/м.} \quad (1.7)$$

По отношению к физическим полям в пространстве градиент похож на обычную производную от функции. Чтобы вычислить приращение обычной функции от одной переменной, записывают:

$$\frac{df}{dx} \cdot dx.$$

Аналогично, приращение полевой величины, такой как температура, при смещении в пространстве на вектор

$$d\mathbf{r} = (dx, dy, dz)$$

вычисляется как скалярное произведение вектора градиента и вектора смещения:

$$\text{grad } t \cdot d\mathbf{r} = \frac{\partial t}{\partial x} dx + \frac{\partial t}{\partial y} dy + \frac{\partial t}{\partial z} dz. \quad (1.8)$$

Вектор градиента температуры является количественной мерой пространственной неоднородности температурного поля. Если температура в окрестности данной точки постоянна, то градиент равен нулю. Чем сильнее изменяется температура от точки к точке, тем больше абсолютная величина градиента.

Плотность теплового потока. Если неравномерно нагретое тело поместить в *адиабатическую* оболочку и предоставить систему самой себе, то по прошествии некоторого времени произойдет выравнивание температуры. Отсюда заключают, что возникают *потоки энергии* в направлении от областей с высокой температурой к областям с низкой температурой. Картина температурного поля должна быть теперь дополнена изображением потоков энергии.

Мы исходим из того фундаментального опытного факта, что если имеется пространственная неоднородность температурного поля (то есть температура в рассматриваемом объекте изменяется от одной точки к другой), то возникает самопроизвольный перенос тепловой энергии от более горячих участков тела к менее горячим. Этот *необратимый, самопроизвольный процесс, сопровождаемый ростом энтропии*, называется *теплопроводностью*.

С молекулярно-кинетической точки зрения, теплопроводность обусловлена непосредственным обменом энергией между хаотически движущимися микрочастицами вещества (молекулами, атомами, электронами). В литературе для обозначения такого механизма часто используется термин *кондуктивный* перенос.

Количественной мерой кондуктивного переноса энергии является **вектор плотности теплового потока**

$$\mathbf{q}, \text{ Дж}/(\text{м}^2\text{с}) = \text{Вт}/\text{м}^2,$$

указывающий направление переноса и численно равный количеству теплоты dQ (Дж), проходящему за единицу времени (с) через единицу контрольной поверхности dF (м^2), нормальной к направлению переноса (Рис. 1.6).

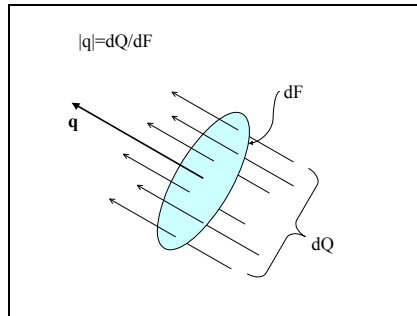


Рис. 1.6 Вектор плотности теплового потока.

Проектируя вектор плотности потока на единичные орты, получают координатное разложение:

$$\mathbf{q} = \mathbf{i} q_x + \mathbf{j} q_y + \mathbf{k} q_z. \quad (1.9)$$

Расчет векторного поля плотности теплового потока является одной из основных задач теории теплообмена. На рис. 1.7 показаны два примера таких рассчитанных на компьютере полей. В действительности масштабы левой и правой картинок отличаются в тысячу раз. Слева показано, как прогревается вечная мерзлота от проложенного в грунте трубопровода диаметром около одного метра, справа – как передается теплота от нагревателя к низкокипящему теплоносителю через оребренную металлическую стенку с характерным размером порядка миллиметра.

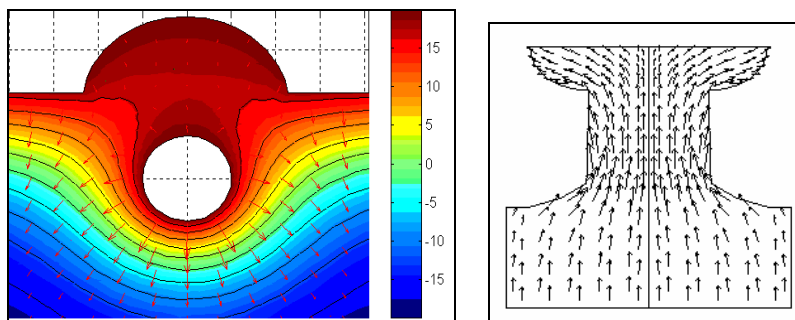


Рис. 1.7. Векторные поля плотности теплового потока

Сейчас мы предположим, что поле теплового потока известно, и рассмотрим несколько практически полезных операций с вектором \mathbf{q} .

Часто приходится вычислять тепловой поток через какую-либо произвольно ориентированную элементарную площадку dF , например, для того чтобы в конечном счете определить поток теплоты через поверхность F рассматриваемого объекта (Рис. 1.8).

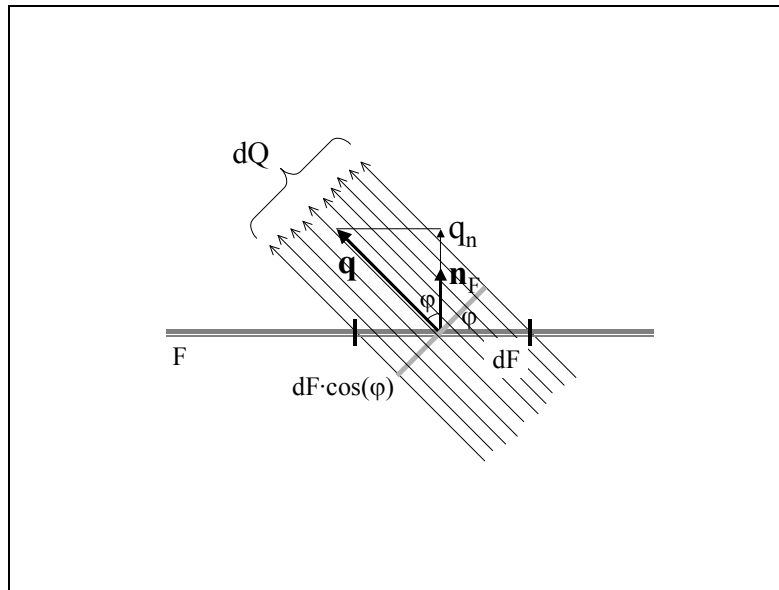


Рис. 1.8 Тепловой поток через поверхность

Вектор \mathbf{q} может быть различным образом ориентирован по отношению к dF . Пусть \mathbf{q} составляет угол φ с единичным вектором нормали \mathbf{n}_F к dF . Как показано на рисунке, искомый тепловой поток dQ через площадку dF такой же, как через площадку $dF \cdot \cos(\varphi)$, нормальную к \mathbf{q} . Поэтому

$$|dQ| = |\mathbf{q}| \cdot (dF \cdot \cos(\varphi))$$

или, после перегруппировки сомножителей,

$$\frac{|dQ|}{dF} \equiv q_n = (|\mathbf{q}| \cdot \cos(\varphi)).$$

Величина в круглых скобках есть проекция вектора \mathbf{q} на направление нормали к dF . Удобно записать эту проекцию как скалярное произведение:

$$q_n = (\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}_F), \text{ Вт/м}^2. \quad (1.10)$$

Тогда

$$dQ = q_n dF = (\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}_F) dF, \text{ Вт.} \quad (1.11)$$

Знак dQ зависит от того, в какую сторону ориентирован вектор \mathbf{n}_F - внутрь или наружу от поверхности F .

Полный тепловой поток через поверхность F выражается поверхностным интегралом:

$$Q = \int_F (\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}_F) dF, \text{ Вт.} \quad (1.12)$$

В качестве контрольных поверхностей обычно выступают границы тел или поверхности раздела фаз, как при конденсации или испарении.

Если F – замкнутая поверхность, ограничивающая область с объемом V , и объем стягивается к точке, то предельный переход

$$\lim_{V \rightarrow 0} \frac{Q}{V} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\int_F (\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}_F) dF}{V} \equiv \text{div } \mathbf{q} \quad (1.13)$$

определяет *дивергенцию вектора* как суммарный поток вектора через замкнутую поверхность дифференциально малого контрольного объема, отнесенный к единице объема и направленный наружу (здесь \mathbf{n}_F – внешняя нормаль к поверхности).

В декартовых координатах дивергенция вычисляется по формуле:

$$\text{div } \mathbf{q} = \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z}, \quad (1.14)$$

которую легко вывести, если взять контрольный объем в виде кубика и в производных в правой части увидеть превышение уходящих потоков через грани над входящими.

Дивергенция вектора плотности теплового потока является важной характеристикой теплового состояния объекта. Предположим, в какой-либо точке твердого тела выполняется условие: $\text{div } \mathbf{q} = 0$. Это означает, что суммарный поток теплоты через поверхность контрольного объема, построенного вокруг рассматриваемой точки, равен нулю. Поэтому можно предсказать, что температура в данной точке не будет изменяться во времени. Такого рода соображения, только более строгие, мы используем в дальнейшем при записи закона сохранения энергии.

Понятие плотности потока как *вектора* может потребовать дополнительных пояснений при первом знакомстве с предметом. Здесь будет полезен следующий мысленный эксперимент. Пусть мы располагаем инструментом для измерения потока q через единичную контрольную площадку, похожим на рамку пеленгатора. Поместим центр этой контрольной площадки в фиксированную точку и будем проводить измерения при различных ориентациях площадки. Мы обнаружим, что поток q будет различным, зависящим от ориентации контрольной площадки.

Выяснится, что при некотором вполне определенном положении поток достигает максимума. Зафиксируем это характерное направление, а ориентацию других положений будем отсчитывать от него как угол φ отклонения нормали к поверхности. Итак, получится, что $q = q(\varphi)$, а $q(\varphi = 0)$ – максимальное значение. Проводя обработку данных эксперимента, мы обнаружим, что отношение плотностей меняется как косинус угла отклонения:

$$\frac{q(\varphi)}{q(\varphi = 0)} = \cos(\varphi).$$

Это выражение совпадает с уравнением (1.10). Направление $\varphi = 0$ принимают за направление вектора \mathbf{q} , а значение $q(\varphi = 0)$ за величину вектора \mathbf{q} .

Закон теплопроводности Фурье. Выше говорилось о том, что тепловой поток возникает вследствие пространственной неоднородности температурного поля. Задача состоит в том, чтобы выразить это утверждение в математической форме, т.е. установить функциональное соотношение между вектором плотности теплового потока и количественной мерой пространственной неоднородности температуры – вектором градиента температуры.

Простейшей подходящей формулировкой является линейная пропорциональность между этими величинами:

$$\mathbf{q} \propto -\text{grad } t$$

Это соответствует следующим фундаментальным экспериментальным фактам:

- если градиент температуры равен нулю, т.е. температура постоянна в окрестности данной точки, то плотность теплового потока равна нулю
- чем больше абсолютная величина градиента, т.е. чем сильнее изменяется температура от точки к точке, тем больше величина плотности теплового потока
- тепловой поток распространяется в сторону падения температуры (поскольку градиент указывает направление возрастания температуры, в формуле фигурирует знак минус).

Остается согласовать размерности левой и правой частей этого соотношения. Для этого вместо знака пропорциональности подставим коэффициент пропорциональности с нужной размерностью, называемый **коэффициентом теплопроводности** и запишем **закон теплопроводности** в виде:

$$\mathbf{q} = -\lambda \text{ grad } t; \quad [\lambda] = \frac{[q]}{[\text{grad } t]}, \text{ Вт/(м К), или Вт/(м }^\circ\text{С)}. \quad (1.15)$$

Рис. 1.9 показывает, как выглядит температурное поле, градиент и плотность теплового потока в окрестности какой-либо точки (в изотропной среде).

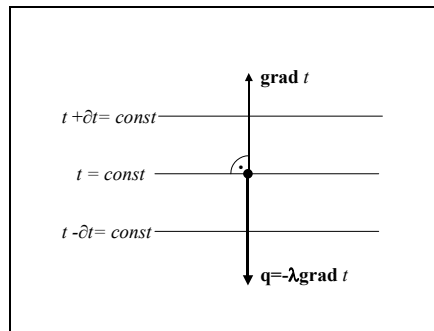


Рис. 1.9 Закон Фурье. Изотермы, градиент, тепловой поток.

Коэффициент теплопроводности λ является физическим параметром (свойством) вещества (материала). Такая интерпретация соответствует эксперименту и просто повседневному опыту, согласно которому одни вещества – такие как металлы – хорошо проводят тепло, а другие – плохо (такие как газы, пористые строительные материалы и т.п.). Другими словами, при одинаковом градиенте температуры плотность теплового потока может быть очень большой (для металлов) или очень малой (для газовых прослоек). Представление о порядке величин коэффициента теплопроводности для разных веществ при нормальной температуре можно получить из следующей таблицы:

Вещество, материал	λ , Вт/(м К)
Воздух	0.026
Вода	0.6
Дерево	0.2
Бетон	1.3
Сталь	50
Медь	380

Как свойство вещества, коэффициент теплопроводности, вообще говоря, зависит от параметров состояния, то есть от температуры и давления. Для газовых смесей или жидких растворов необходимо учитывать зависимость от концентрации. Для материалов, обладающих некоторой структурой, таких как пористые материалы, слоистые композитные материалы и т.п., теплопроводность зависит от характеристик структуры.

При решении большинства задач в этой книге мы будем считать коэффициент теплопроводности постоянной (или заранее осредненной в

рассматриваемом интервале температуры) величиной, чтобы упростить решение и выяснить главные закономерности процессов теплопереноса. Во многих случаях (но не всегда) этого достаточно и для практических расчетов.

По умолчанию до сих пор коэффициент теплопроводности считался скалярной величиной, то есть характеризовался одним числом, как в вышеприведенной таблице. Однако математическая структура уравнения (1.15) допускает еще одну возможность:

$$\mathbf{q} = -\Lambda \cdot \text{grad } t, \tag{1.16}$$

где коэффициент теплопроводности записан как тензор, или квадратная матрица размерности 3x3. Эта возможность действительно полезна для практики, поскольку существуют *анизотропные* материалы (монокристаллы, слоистые композитные материалы), теплопроводность которых зависит от направления. Теперь понадобится девять чисел для задания значения коэффициента теплопроводности как матрицы 3x3. Однако эта матрица - симметричная и, следовательно, ее можно привести к диагональному виду, так что всего необходимо три числа.

Примером анизотропного материала является дерево, теплопроводность которого поперек волокон может быть в 2 ÷ 3 раза меньше, чем вдоль волокон. Посмотрите, к чему это приведет, если градиент температуры направлен, скажем, под углом 45 градусов к волокнам (Рис. 1.10):

$$\begin{bmatrix} q_x \\ q_y \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \lambda_{xx} & \\ & \lambda_{yy} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial t}{\partial x} \\ \frac{\partial t}{\partial y} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0.3 & \\ & 0.1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 100 \\ 100 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 30 \\ 10 \end{bmatrix} \tag{1.17}$$

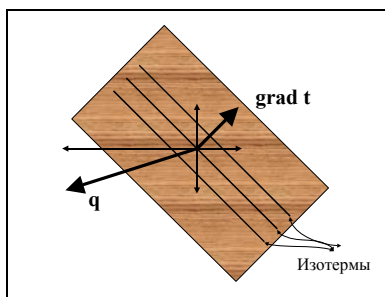


Рис. 1.10 Теплопроводность в анизотропном материале.

Обратите внимание на то, что векторы градиента температуры и плотности теплового потока находятся теперь не на одной линии (Рис. 1.9), а составляют некоторый (тупой) угол (Рис. 1.10).

Все же большинство технических материалов изотропны, и мы будем использовать закон теплопроводности в форме (1.15).

Формулировка закона теплопроводности Фурье – важный этап в разработке математического описания процессов тепломассообмена. Мы говорили выше о том, что задачей теории является определение *неизвестных заранее* полей температуры и плотности теплового потока. Теперь с помощью закона Фурье между этими неизвестными установлена функциональная связь: поток \mathbf{q} пропорционален термодинамической движущей силе – градиенту температуры $\text{grad } t$. Справедливость закона Фурье подтверждается экспериментами, хотя существуют особые случаи, когда формулировка (1.15) требует уточнения (задачи с очень быстрыми временными и пространственными изменениями температурного поля, см. [гл.10](#)). Фундаментальное обоснование закона Фурье и аналогичных соотношений для других процессов переноса (диффузии, молекулярного трения) дается *неравновесной термодинамикой* (см. [гл.4](#)).

Динамическую, развивающуюся во времени картину сопряженных полей температуры и плотности теплового потока можно увидеть, запустив видеоролик о нестационарной двумерной задаче теплопроводности при «включении» тела с ухудшенным режимом охлаждения на части поверхности (ср. с рис. 1.1, рис. 1.2):

[..\Avi_HMT\FuelEI_2D_short.wmv](#)

Конвективный перенос энергии. При непосредственном контакте материальных объемов (частей тела) с различной температурой всегда возникает кондуктивный («кондукция» – проводимость) перенос энергии, независимо от того, рассматривается ли перемешиваемая жидкость или твердое тело, части которого неподвижны друг относительно друга.

С другой стороны, в движущихся средах энергия транспортируется вместе с перемещающимися материальными объемами жидкости или газа со скоростью течения жидкости. Такой перенос энергии называется *конвективным* («конвекция» - принесение, доставка).

Конвекция играет большую роль во многих природных явлениях и технологических процессах. Например, если в Москве быстро потеплело, то это произошло потому, что пришел *поток* теплого воздуха из Атлантики, передвигавшийся со скоростью примерно 10 м/с, а не потому, что через *тысячекилометровый слой* воздуха, отделяющий нас от теплого океана, передавалась теплота посредством теплопроводности.

Посредством конвекции в энергетических установках теплоносители (вода, воздух и др. вещества) транспортируют тепловую энергию в теплообменниках. Конвекция обеспечивает высокую интенсивность теплообмена между твердыми поверхностями и движущимися жидкостями (теплоносителями) благодаря непрерывному обновлению теплового контакта и сохраняющемуся вследствие этого высокому градиенту температуры в пристенной области. В *турбулентных* потоках конвективное *перемешивание* жидкости резко увеличивает интенсивность теплообмена.

Для количественного описания конвективного потока энергии необходимо начать с некоторого расширения привычного понятия скорости как перемещения за единицу времени. На Рис. 1.11 показан вектор скорости \mathbf{w} и ориентированная по нормали к этому вектору контрольная поверхность.

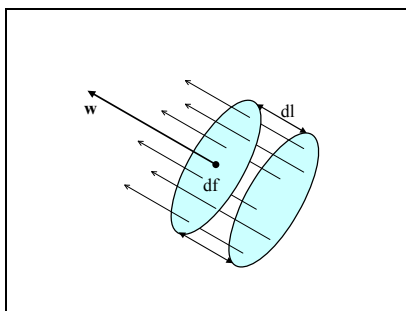


Рис. 1.11 Скорость как расходная характеристика.

На контрольной поверхности df , m^2 , как на основании, построен цилиндр с высотой dl . За время dl/w , с, жидкость в объеме этого цилиндра $df \cdot dl$ пройдет через контрольную поверхность df . Вычислим величину плотности объемного расхода в направлении вектора скорости как величину объема, переносимого через единичную площадку за единицу времени:

$$\frac{(df \cdot dl)}{df \cdot dl/w} = w, \text{ м}^3/(\text{м}^2 \text{ с}).$$

Получилось просто значение скорости. Итак, вектор скорости можно рассматривать как вектор плотности объемного расхода материальной среды. Численное значение этого вектора равно материальному объему, переносимому за единицу времени через единицу контрольной поверхности, нормальной к направлению переноса (то есть к направлению скорости).

Умножая \mathbf{w} на плотность жидкости, получим вектор плотности потока массы:

$$\mathbf{j} = \rho \mathbf{w}, \text{ кг}/(\text{м}^2 \text{ с}), \tag{1.18}$$

показывающий, какое количество вещества (кг) переносится за единицу времени через единицу контрольной поверхности.

Теперь понятно, как рассчитать вектор конвективной плотности потока какой-либо экстенсивной (то есть связанной с массой вещества) величины, например, энтальпии. Для этого следует умножить вектор плотности потока массы на удельную энтальпию h , Дж/кг, т.е. на содержание энтальпии в единице массы теплоносителя:

$$\mathbf{q}_{h,conv} = \mathbf{j} \cdot h = \rho \mathbf{w} h, \text{ Вт}/\text{м}^2. \tag{1.19}$$

Ниже мы увидим, что аналогичные формулы определяют конвективные потоки компонентов смеси.

В технических устройствах движение жидкости чаще всего вынуждается действием насоса или вентилятора. При *вынужденной* конвекции поле скоростей w можно найти заранее, решив гидродинамическую задачу, а затем перейти к расчету теплообмена, определяя конвективные потоки формулами вида (1.19). Однако такую процедуру следует рассматривать как первое приближение. Во многих случаях поля скорости и температуры взаимосвязаны. Например, так бывает в случае сильной температурной зависимости вязкости жидкости. В самых общих чертах можно представить себе, что в области течения, где жидкость холодная и поэтому более вязкая, происходит замедление потока.

При *свободной (естественной)* конвекции само движение жидкости возникает из-за неоднородности температуры жидкости: в поле силы тяжести горячая и поэтому менее плотная жидкость выталкивается вверх Архимедовой силой. Возникновение свободной циркуляции и развитие термогидродинамических полей вблизи включенного нагревателя – горизонтальной трубки можно наблюдать на анимации:

[..\Avi_HMT\FreeConv_transient_short.wmv](#)

Теплообменные устройства, работающие на принципе свободной конвекции, имеют важное значение в технике. Развитие естественной циркуляции в испарительной градирне – крупномасштабном охлаждающем устройстве на ТЭС или АЭС – схематически представлено на анимации:

[..\Avi_HMT\CoolingTower_starting_1.wmv](#)

На атомных станциях системы СПОТ (системы пассивного отвода тепла, т.е. свободноконвективные устройства), представляют последний рубеж защиты при гипотетических авариях.

Сложно переплетаются гидродинамика и теплообмен в двухфазных потоках при испарении (кипении) или конденсации. Кроме обычных твердых границ со стенками, большую роль играют межфазные поверхности раздела, многообразные по форме, изменчивые и неустойчивые. По указанным причинам на практике уравнения гидродинамики и теплообмена чаще всего образуют взаимосвязанную систему.

Визуализация конвективного теплообмена при вынужденном поперечном обтекании трубки нагревателя на Рис. 1.12 дает совместное представление полей скорости и температуры. Стрелки изображают векторное поле скорости, светлые линии – линии тока. Цветом показано скалярное поле температуры: нагревшаяся жидкость вблизи горячей стенки – красного цвета, холодная вдали от нее – синего. Скорость обтекания в расчетном примере невелика, и в кормовой части цилиндра видна застойная зона со слабой регулярной циркуляцией. Градиент температуры в застойной зоне

относительно низкий: это область с ухудшенной теплоотдачей, по сравнению с лобовой частью цилиндра.

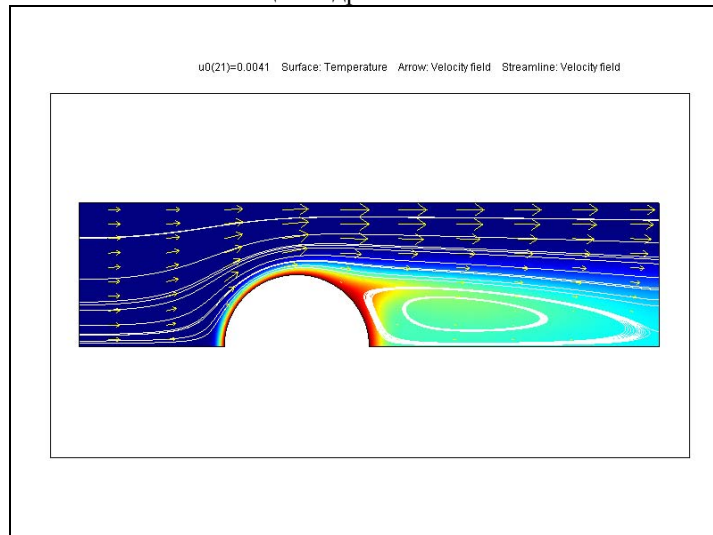


Рис. 1.12. Теплоотдача при поперечном обтекании цилиндра (отразить изображение вниз для получения полной картинки)

В реальных теплообменниках скорость течения намного больше, и в кормовой части цилиндра наблюдается интенсивное беспорядочное вихревое течение, обеспечивающее высокую теплоотдачу. Цель демонстрации на Рис. 1.12 – показать влияние поля течения на теплообмен. Изменения, которые мы могли бы наблюдать, постепенно увеличивая скорость вынужденного обтекания горячей трубы с постоянной температурой, можно увидеть на видеоролике:

[Avi CrossTubeFlow Animate](#)

Подробный расчетно-теоретический анализ теплоотдачи при обтекании цилиндра дан в [гл. 14](#).

1.2 Массообмен

Концентрация. Очень многие технологические и природные процессы сопровождаются массопереносом. Например, при горении твердой углеродной частицы кислород поступает к ее поверхности, реагирует при высокой температуре с углеродом, а газообразные продукты реакции, такие как окись углерода, отводятся от поверхности в обратном направлении.

Для формирования погоды и климата важно взаимодействие атмосферы и океана. Например, сухой горячий ветер пустыни, продвигаясь над поверхностью моря, насыщается парами воды.

Для экологии важно, как промышленные выбросы вредных веществ постепенно распространяются на большие расстояния.

Из этих примеров видно, что, во-первых, часто необходимо рассматривать газовые или жидкие среды как смеси двух или более компонентов и, во-вторых, что компоненты смеси могут перемещаться относительно друг друга (как кислород и углекислый газ в первом примере).

Мы будем рассматривать в дальнейшем двухкомпонентные системы. Этого достаточно для большинства практических задач.

Важнейшими характеристиками смеси являются:

- плотность компонента смеси

$$\rho_k, \text{ (кг k-компонента) / (м}^3 \text{ смеси),} \quad (1.20)$$

равная массовому содержанию k – компонента в единичном объеме смеси, и

- концентрация компонента:

$$c_k \equiv \frac{\rho_k}{\rho}, \text{ (кг k-компонента) / (кг смеси),} \quad (1.21)$$

По умолчанию в дальнейшем будем считать, что величины без индексов есть характеристики смеси в целом. Очевидно, плотность смеси равна сумме плотностей компонентов:

$$\rho = \rho_1 + \rho_2, \quad (1.22)$$

а сумма массовых концентраций равна единице:

$$c_1 + c_2 = \frac{\rho_1}{\rho} + \frac{\rho_2}{\rho} = 1. \quad (1.23)$$

При решении задач массообмена основной задачей является расчет поля концентрации рассматриваемого компонента:

$$c_1 = c_1(x, y, z, \tau). \quad (1.24)$$

Для двухкомпонентных систем достаточно рассчитать концентрацию одного из компонентов, например c_1 , так как $c_2 = 1 - c_1$.

Все, что было сказано выше о способах изображения и характеристиках изменения температурного поля без всяких изменений переносится на поле концентрации. Таким образом, мы можем говорить об изоконцентрационных поверхностях, градиенте концентрации и т.д.

Плотность потока массы компонентов смеси. Представим движение компонентов смеси как перемещение двух взаимопроникающих континуумов (непрерывных сред) с *различными* скоростями. Тогда векторы плотности потока компонентов выражаются через эти индивидуальные скорости следующим образом:

$$\mathbf{j}_k = \rho_k \mathbf{w}_k, \text{ (кг } k\text{-компонента)} / (\text{м}^2\text{с}). \quad (1.25)$$

Плотность потока смеси есть векторная сумма потоков компонентов смеси:

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_1 + \mathbf{j}_2 = \rho_1 \mathbf{w}_1 + \rho_2 \mathbf{w}_2. \quad (1.26)$$

Ту же величину можно выразить через скорость смеси:

$$\mathbf{j} = \rho \mathbf{w}. \quad (1.27)$$

Сравнивая правые части двух последних соотношений, получают следующее определение для скорости смеси:

$$\mathbf{w} = \frac{\rho_1 \mathbf{w}_1 + \rho_2 \mathbf{w}_2}{\rho}. \quad (1.28)$$

В этой формуле легко увидеть известное из курса механики определение скорости центра масс системы двух тел. Итак, скорость смеси – это скорость движения центра масс системы из двух компонентов. Такое определение позволяет описывать гидродинамику смеси точно так же, как для однокомпонентной жидкости.

Закон диффузии Фика. Пусть наблюдатель передвигается вместе со смесью со скоростью \mathbf{w} . Тогда компоненты смеси перемещаются относительно наблюдателя с различными скоростями $(\mathbf{w}_k - \mathbf{w})$. При этом возникают потоки массы компонентов: $\rho_k (\mathbf{w}_k - \mathbf{w})$.

Причиной, заставляющей компоненты смеси перемещаться относительно осредненного (наблюдаемого) движения смеси, является *неоднородность поля концентрации*. Это фундаментальный опытный факт, аналогичный возникновению теплового потока в неоднородном температурном поле. Явление, описанное выше, называется концентрационной диффузией. Кондуктивный (диффузионный) поток компонентов бинарной смеси описывается законом Фика:

$$\mathbf{j}_{k,conduct} \equiv \rho_k (\mathbf{w}_k - \mathbf{w}) = -\rho D \mathbf{grad} c_k, \quad (1.29)$$

где D , $\text{м}^2/\text{с}$ – коэффициент диффузии, физический параметр двухкомпонентной смеси. Для газовых смесей значения коэффициента диффузии составляют примерно $(0.1-1)10^{-4}$, для водных растворов – примерно $10^{-9} \text{м}^2/\text{с}$.

Полный поток компонента смеси выражается формулой:

$$\mathbf{j}_k \equiv \rho_k \mathbf{w}_k = \rho_k (\mathbf{w}_k - \mathbf{w}) + \rho_k \mathbf{w} = \mathbf{j}_{k,conduct} + \rho_k \mathbf{w} = -\rho D \mathbf{grad} c_k + \rho_k \mathbf{w} \quad (1.30)$$

Величина

$$\mathbf{j}_{k,conv} = \rho_k \mathbf{w} \quad (1.31)$$

является конвективной составляющей плотности потока компонента.

Поскольку кондуктивные потоки обоих компонентов описывают движение относительно центра масс, их сумма должна быть равна нулю. Следовательно, для двухкомпонентной смеси

$$\mathbf{j}_{1,conduct} = -\mathbf{j}_{2,conduct} \quad (1.32)$$

Этот результат нетрудно проверить, используя тождество из формулы (1.29) и определение скорости центра масс (1.28).

Энтальпия смеси. В дальнейшем потребуются определять энтальпию смеси через концентрации и энтальпии компонентов. В термодинамике смесей используют следующее соотношение:

$$h = c_1 h_1 + c_2 h_2 \quad (1.33)$$

или, после умножения на плотность смеси:

$$\rho h = \rho_1 h_1 + \rho_2 h_2, \quad (1.34)$$

где h_2 и h_1 - так называемые *парциальные* энтальпии компонентов, вообще говоря зависящие от концентрации. Эти величины могут быть вычислены, если известны удельные энтальпии чистых компонентов и теплота смешения. Для идеальных смесей, то есть таких что смешение компонентов не сопровождается изменением объема и тепловыми эффектами, парциальные энтальпии равны энтальпиям чистых исходных компонентов. Идеальными смесями являются многокомпонентные идеальные газы. Для идеальных газов энтальпия компонентов зависит только от температуры, а энтальпия смеси - от температуры и концентрации.

Кондуктивный поток энергии при наличии диффузии. Пусть \mathbf{j}_1 и \mathbf{j}_2 , кг/(м²с) - полные потоки массы компонентов, определяемые формулой (1.30), и h_2 и h_1 , Дж/кг - удельные энтальпии компонентов. Предположим пока, что система изотермическая, и вычислим плотность потока энтальпии, переносимого компонентами смеси при их различном перемещении в пространстве, связанном, как мы видели, с возникновением диффузии:

$$\begin{aligned} \mathbf{j}_1 h_1 + \mathbf{j}_2 h_2 &= (\mathbf{j}_{1,conduct} + \rho_1 \mathbf{w}) h_1 + (\mathbf{j}_{2,conduct} + \rho_2 \mathbf{w}) h_2 = \\ &= (\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2) \mathbf{w} + \mathbf{j}_{1,conduct} h_1 + \mathbf{j}_{2,conduct} h_2 \end{aligned} \quad (1.35)$$

Замечая, что в правой части множитель в скобках перед \mathbf{w} есть энтальпия смеси (см. формулу (1.34)) и учитывая соотношение между диффузионными потоками (1.32), получим для потока энтальпии:

$$\mathbf{j}_1 h_1 + \mathbf{j}_2 h_2 = \rho \mathbf{w} h + \mathbf{j}_{1,conduct} (h_1 - h_2). \quad (1.36)$$

Первое слагаемое в правой части является обычным выражением для конвективного потока энтальпии (ср. с формулой (1.19)). Второе слагаемое в правой части

$$\mathbf{j}_{1,conduct} (h_1 - h_2) \quad (1.37)$$

связано с существованием необратимого, самопроизвольного процесса кондуктивного (диффузионного) переноса массы.

Если происходит совместный процесс тепло - и массообмена, т.е. имеются неоднородные поля и температуры и концентрации, то кондуктивный поток энергии имеет две составляющие: связанную с теплопроводностью (1.15) и связанную с диффузией (1.37):

$$\mathbf{q} = -\lambda \operatorname{grad} t + \mathbf{j}_{1, \text{conduct}} (h_1 - h_2). \quad (1.38)$$

В неравновесной термодинамике анализируются и другие виды необратимых (связанных с ростом энтропии) процессов переноса, кроме рассмотренных нами теплопроводности и концентрационной диффузии. Например, очень большие градиенты температуры приводят к возникновению потоков массы компонентов смеси (термодиффузия). Такой процесс использовался для разделения изотопов при создании атомной бомбы. Существует и так называемый перекрестный эффект, когда градиент концентрации приводит к возникновению теплового потока (диффузионный термоэффект). Однако в большинстве случаев в теплообменных и теплотехнологических установках, а также в окружающей среде условия таковы, что достаточно ограничиться рассмотренными выше необратимыми процессами переноса: теплопроводностью и концентрационной диффузией. Формулировки законов переноса в двухкомпонентной среде с позиций неравновесной термодинамики обсуждаются в гл. 4.

1.3 Трение

Конвективный перенос импульса. Мы видели, какую большую роль в тепломассообмене играет движение жидкости, обеспечивая конвекцию (перенесение, доставку) тепловой энергии и массы компонента смеси. Поэтому расчет поля скоростей является важным этапом при решении задачи конвективного тепломассообмена.

В предыдущих параграфах обсуждались процессы переноса энергии (энтальпии) и массы компонента. В гидродинамике переносимой величиной является *импульс* (количество движения):

$$m\mathbf{w}, \text{ (кг м/с)}.$$

Импульс единичной массы жидкости есть скорость:

$$\frac{(m \mathbf{w})}{m} = \mathbf{w}, \text{ м/с},$$

Обратите внимание на то, что переносимая величина является вектором. Ранее мы имели дело со скалярными переносимыми величинами - массой, энтальпией.

Плотность *конвективного потока импульса* можно записать, умножая плотность потока массы $\rho\mathbf{w}$ на импульс единицы массы \mathbf{w} :

$$\rho \mathbf{w} \mathbf{w}, \text{ (кг м/с)/(м}^2\text{с)}. \quad (1.39)$$

Не следует ставить никакого знака умножения между векторами скорости в только что записанной формуле. Это особое произведение векторов, так называемое прямое произведение (не скалярное и не векторное). Оно образует *тензор потока импульса*, координатное разложение которого расписывается следующим образом:

$$\begin{bmatrix} \rho u u & \rho u v & \rho u w \\ \rho v u & \rho v v & \rho v w \\ \rho w u & \rho w v & \rho w w \end{bmatrix} \quad (1.40)$$

Здесь (u, v, w) - составляющие вектора скорости по координатным осям. Каждая составляющая тензора потока импульса связана с двумя направлениями: одно из них - направление переноса, второе - направление переносимой величины (Рис. 1.13).

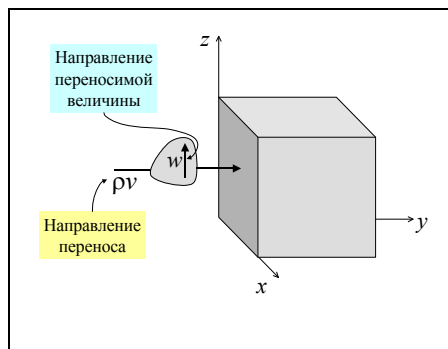


Рис. 1.13. Плотность потока импульса

Пусть необходимо определить плотность потока импульса через контрольную поверхность, нормальную к оси y . Поскольку импульс – векторная величина, необходимо уточнить, какую именно составляющую импульса имеет в виду. В нашем примере это вертикальная составляющая w . Через контрольную поверхность протекает поток массы жидкости ρv . Каждая единица массы этого потока содержит импульс w . Следовательно, искомая плотность потока импульса есть $\rho w v$. Для диагональных элементов тензора направления переноса и переносимой величины совпадают.

Тензор напряжений. Рассмотрим теперь силы *контактного* взаимодействия между элементами жидкости, разделенными какой-либо контрольной поверхностью, или, как говорят в сопротивлении материалов, напряженное состояние в точке.

Чтобы охарактеризовать напряжения (силы, отнесенные к единице площади), следует задать ориентацию площадки (например, единичным

вектором нормали) и вектор силы, действующей на эту площадку. Мы опять имеем дело с величиной, связанной с двумя направлениями, и представляем напряжения в виде тензора, координатное разложение которого записывается следующим образом:

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}, \text{ Н/м}^2 = (\text{кг м/с})/(\text{м}^2\text{с}). \quad (1.41)$$

Например, на единичную площадку, нормальную к оси y (Рис. 1.14) действует сила \mathbf{P}_y , которая в координатном разложении представляется как

$$\mathbf{P}_y = \mathbf{i}\sigma_{yx} + \mathbf{j}\sigma_{yy} + \mathbf{k}\sigma_{yz} \quad (1.42)$$

где, в частности, σ_{yx} есть касательное напряжение, действующее в направлении x на площадку, нормальную к оси y (ориентация площадки - первый индекс, направление силы - второй).

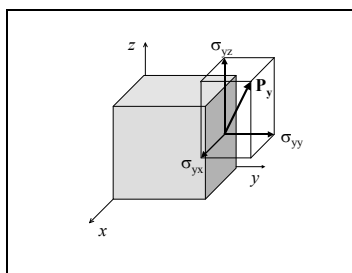


Рис. 1.14. Тензор напряжений в вязкой жидкости

Знак напряжения определяется правилом «отброшенной» жидкости: направления стрелок таковы, что это силы, действующие со стороны жидкости, находящейся справа от контрольной поверхности, как говорят, «отброшенной» со стороны положительного направления оси y .

В гидродинамике принято интерпретировать напряжения как плотности потока импульса. Действительно, если на грань контрольного объема со стороны контактирующей жидкости действует напряжение (сила), то это означает, что контрольному объему сообщается через эту площадку некоторый импульс. Следует принять во внимание правило знаков: плотность потока импульса за счет действия поверхностных сил – это тензор напряжений с обратным знаком.

Диагональные элементы тензора называются по понятной причине нормальными напряжениями, а внедиагональные - касательными, или сдвиговыми напряжениями.

Давление. Для *идеальной* (невязкой) жидкости на гранях контрольного объема действуют только силы давления, всегда нормальные к

рассматриваемой площадке. В этом случае тензор напряжений записывается просто:

$$\begin{bmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix} \equiv -p \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \equiv -p\mathbf{I}, \quad (1.43)$$

где \mathbf{I} - единичный тензор.

При течении *вязкой* жидкости возникают дополнительные, так называемые *вязкие* напряжения. Прежде всего это касательные, или сдвиговые напряжения. Менее очевидно то, что и в нормальных напряжениях возникают вязкие составляющие, в связи с чем возникает вопрос о том, что понимать под давлением в движущейся вязкой жидкости. Принимают, что давление есть среднеарифметическое значение нормальных напряжений (среднее давление) с обратным знаком:

$$p = -\frac{1}{3}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) \quad (1.44)$$

Это определение с очевидностью подходит для идеальной жидкости (см. (1.43)), и его распространяют на вязкие жидкости. Заметим, что сумма диагональных элементов тензора является инвариантом, т.е. не зависит от ориентации системы координат, как и должно быть для давления.

Вязкие напряжения. При записи тензора напряжений выделяют давление и вязкие напряжения (величина со «штрихом»):

$$\sigma = -p\mathbf{I} + \sigma' . \quad (1.45)$$

Другими словами, считают, что отклонения напряжений от давления связано с возникновением вязких напряжений.

Чтобы сохранить определение (1.44) для давления, необходимо потребовать, чтобы сумма диагональных элементов тензора вязких напряжений была равна нулю:

$$\sigma'_{xx} + \sigma'_{yy} + \sigma'_{zz} = 0 . \quad (1.46)$$

Это условие используется далее при формулировке закона вязких напряжений.

Плотность потока импульса. После этого обсуждения можно записать выражение полной плотности потока импульса:

$$-\sigma + \rho\mathbf{w}\mathbf{w} \equiv p\mathbf{I} - \sigma' + \rho\mathbf{w}\mathbf{w} , \quad (\text{кг м/с})/(\text{м}^2\text{с}), \quad (1.47)$$

согласно которому поток импульса возникает вследствие действия сил давления, вязких напряжений и конвективного переноса импульса.

Остается получить выражение для тензора вязких напряжений, или, в другой интерпретации, кондуктивного потока импульса σ' .

Закон трения Стокса. Свойство вязкости проявляется только при движении жидкости, таком, что имеет место сдвиг слоев жидкости относительно друг друга. Движения жидкости, похожие на движение твердого тела, когда не происходит относительных перемещений частиц, не подвержены влиянию вязкости. Эти качественные соображения могут быть выражены математически, если воспользоваться теоремой Гельмгольца о разложении движения элементарного объема жидкости на три составляющие (Рис. 1.15):

1. поступательное перемещение как твердого тела (с одинаковой для всех частиц скоростью)
2. твердое вращение (с одинаковой для всех частиц угловой скоростью)
3. деформация (сдвиг, перекашивание углов).

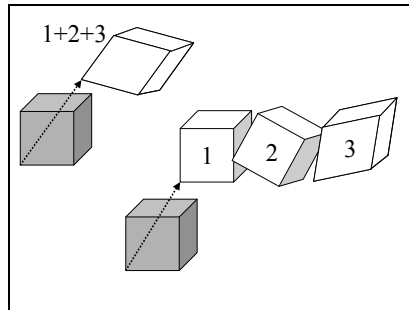


Рис. 1.15. Разложение движения элементарного объема на поступательное перемещение (1), поворот (2) и деформацию (3)

Поскольку первые две составляющие не дают сдвига (относительного смещения) частиц, остается искать связь между вязкими напряжениями и деформациями.

Деформации возникают из-за неравномерности поля скорости. Мерой этой неравномерности является *градиент скорости* – тензор, координатное разложение которого составлено из производных от проекций скорости (u, v, w) по координатам (x, y, z) :

$$\text{grad } w = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (1.48)$$

Как поясняется в следующем пункте, внедиагональные компоненты

$$\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x} \text{ и т.п.,}$$

описывают угловую скорость поворотов линий, составленных из жидких частиц, а диагональные компоненты

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial z}$$

определяют скорость относительного удлинения жидких отрезков, расположенных вдоль данной координаты. При сложении градиента скорости с его транспонированным значением

$$\mathbf{grad w} + (\mathbf{grad w})^T$$

получается симметричный тензором, описывающий скорость деформаций элементарного объема жидкости.

Принимают, что *вязкие напряжения пропорциональны скоростям деформации в жидкости*. Это основное содержание закона вязкого трения (закона Стокса), который записывается в следующей форме:

$$\boldsymbol{\sigma}' = \mu (\mathbf{grad w} + (\mathbf{grad w})^T) - \frac{2}{3} \mu (\text{div w}) \mathbf{I}. \quad (1.49)$$

Коэффициент пропорциональности μ называется коэффициентом динамической вязкости и является физическим параметром жидкости. Его размерность есть

$$[\mu] = \frac{[\boldsymbol{\sigma}']}{[\mathbf{grad w}]} = (\text{Н/м}^2) / ((\text{м/с})/\text{м}) = \text{Па} \cdot \text{с}.$$

Отметим аналогию в формулировках законов переноса (1.49), (1.15), (1.29). Вязкие напряжения (т.е. плотность потока импульса) пропорциональны градиенту скорости, подобно тому как плотность теплового потока пропорциональна градиенту температуры (закон теплопроводности Фурье (1.15)) или диффузионный поток пропорционален градиенту концентрации (закон диффузии Фика (1.29)).

Запишем приведенные выше соотношения в форме координатных разложений:

$$\mathbf{grad w} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}; \quad (\mathbf{grad w})^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}; \quad (1.50)$$

$$\sigma' = \mu \begin{bmatrix} 2 \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} & 2 \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} & 2 \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} - \frac{2}{3} \mu (\operatorname{div} \mathbf{w}) \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}. \quad (1.51)$$

Тензор в правой части этого соотношения (1.51) определяет скорость деформации элементарного объема жидкости.

Дополнительное слагаемое с дивергенцией в уравнениях (1.49) или (1.51) для несжимаемых жидкостей обращается в ноль, а в случае среды с переменной плотностью обеспечивает выполнение требования (1.46). Это легко проверить, учитывая, что

$$\operatorname{div} \mathbf{w} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}. \quad (1.52)$$

Итак соотношения (1.49) и (1.51) задают закон вязкого трения Стокса соответственно в векторной и координатной форме.

Некоторые детали и дополнительные обоснования этих формулировок приводятся ниже.

Деформации в жидкости. Поясним кинематический смысл компонентов тензора в правой части закона Стокса (1.51):

$$\begin{bmatrix} 2 \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} & 2 \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} & 2 \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}. \quad (1.53)$$

Начнем с внедиагональных компонентов тензора, например, с величины

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}.$$

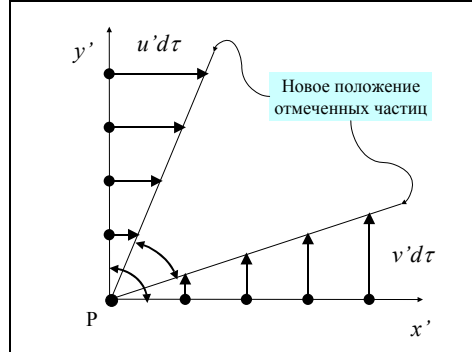


Рис. 1.16. Угловые деформации

Рассмотрим течение в окрестности какой-либо материальной точки P (Рис. 1.16), перемещаясь вместе с этой точкой, так что система координат x', y' будет *поступательно перемещаться* вместе с частицей жидкости P. Проследим за частицами, первоначально расположенными по осям координат, для чего используем разложение поля скорости в ряд и ограничимся линейными членами:

составляющие скорости частиц на вертикальной оси:

$$u = u_P + \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_P y'; \quad v = v_P \quad (1.54)$$

составляющие скорости частиц на горизонтальной оси:

$$u = u_P; \quad v = v_P + \left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_P x' \quad (1.55)$$

Эти разложения показывают, что движение частиц можно представить как сумму поступательного перемещения со скоростью (u_P, v_P) и относительного движения со скоростями соответственно для частиц на вертикальной оси

$$u' \equiv u - u_P = \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_P y'; \quad v' \equiv v - v_P = 0 \quad (1.56)$$

и для частиц на горизонтальной оси

$$u' \equiv u - u_P = 0; \quad v' \equiv v - v_P = \left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_P x' \quad (1.57)$$

На Рис. 1.16 показан результат относительного смещения, то есть того, что увидит наблюдатель, перемещающийся поступательно вместе с частицей

Р. Вертикальная линия повернется за единичный промежуток времени на угол

$$\frac{u'}{y'} = \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_P, \tag{1.58}$$

а горизонтальная – на угол

$$\frac{v'}{x'} = \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_P. \tag{1.59}$$

Из построений (Рис. 1.16) следует, что сумма

$$\frac{u'}{y'} + \frac{v'}{x'} \equiv \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \tag{1.60}$$

характеризует изменение угла между осями в исходном и конечном положениях. Правильнее говорить о скорости угловой деформации, поскольку построение сделано для единичного промежутка времени.

Таким образом, внедиагональные компоненты тензора (1.53) определяют скорость угловой деформации в жидкости.

Рассмотрим теперь специальный случай – вращение жидкости как твердого тела, с постоянной для всех точек угловой скоростью (Рис. 1.17), и вновь проследим за значениями внедиагонального компонента:

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}.$$

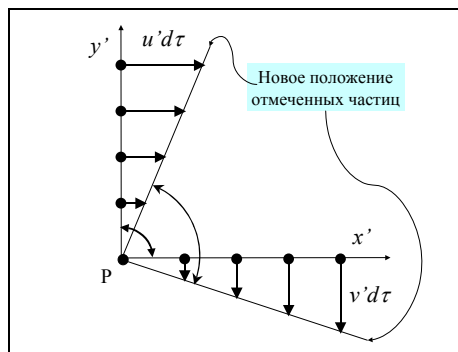


Рис. 1.17. Вращение жидкости как твердого тела

Первоначально положение частиц совпадет с координатными осями, а через единичный промежуток времени они оказываются на линиях, повернутых относительно исходного положения. Однако угол между

линиями положения частиц в исходном и в конечном положении (отмечен на рисунке дугами) *не изменяется*, остается прямым, как и должно быть для твердого вращения. Чтобы обеспечить это условие равенства нулю скорости угловой деформации, при построении (Рис. 1.17) было принято:

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \Rightarrow u' = v' \text{ и } \delta \epsilon' = x'.$$

Легко проверить, что касательные напряжения по формуле закона трения (1.51) будут при этом нулевыми, как и должно быть при твердом вращении, когда частица жидкости *не деформируется*.

Теперь ясно, почему потребовалось вводить в формулировку закона трения (1.49) сумму обычного и транспонированного градиента скорости. При внимательном рассмотрении выражений для этих величин обнаруживается, что сами они есть несимметричные тензоры (см. (1.48)), а результат их сложения – симметричный тензор. Благодаря симметрии учитывается фундаментальное требование, согласно которому *вязкие напряжения не возникают, если жидкость вращается как твердое тело*.

Рассмотрим далее кинематический смысл *диагональных компонентов* тензора (1.53):

$$2 \frac{\partial u}{\partial x}, 2 \frac{\partial v}{\partial y}, 2 \frac{\partial w}{\partial z}.$$

Повторяя с небольшими изменениями описанные выше операции разложения проекций скорости вблизи точки Р, получим:

продольная скорость частиц на горизонтальной оси:

$$u = u_P + \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_P x'; \tag{1.61}$$

скорость смещения частиц жидкости в продольном направлении относительно точки Р:

$$u' \equiv u - u_P = \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_P x'. \tag{1.62}$$

Следовательно жидкий отрезок с первоначальной длиной x' за малый промежуток времени $d\tau$ удлинится на величину $(u'd\tau)$, относительное удлинение составит $(u'd\tau)/x'$, а скорость относительного удлинения:

$$\frac{(u'd\tau)/x'}{d\tau} = \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_P. \tag{1.63}$$

Итак, производная от проекции скорости по одноименной координате определяет скорость относительного удлинения жидкого отрезка, расположенного вдоль данной координаты.

Рассмотрим далее деформации растяжения-сжатия первоначально кубического (квадратного в плане) объема (Рис. 1.18).

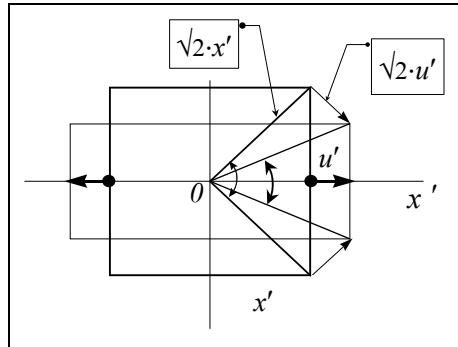


Рис. 1.18 Изменение углов при растяжении вдоль оси x

Как следует из построений на Рис. 1.18, и в этом случае прямые углы деформируются. Если объем остается постоянным (то есть жидкость несжимаема), то небольшое увеличение размера по горизонтали приводит к такому же сокращению по вертикали, а скорость угловой деформации составит

$$2 \frac{(\sqrt{2}u')}{(\sqrt{2}x')} = 2 \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (1.64)$$

Итак, угловая деформация при растяжении-сжатии равна удвоенному относительному удлинению. Эти вычисления поясняют, каким образом возникают вязкие нормальные напряжения.

Рассмотрим теперь условие (1.46), согласно которому сумма диагональных элементов тензора вязких напряжений должна быть равна нулю:

$$\sigma'_{xx} + \sigma'_{yy} + \sigma'_{zz} = 0.$$

Для несжимаемой жидкости это условие выполняется автоматически, а в общем случае, как говорилось выше, в выражение закона Стокса необходимо добавить слагаемое с дивергенцией вектора скорости. В качестве обоснования этого шага приведем следующее обсуждение деформаций растяжения-сжатия.

Если жидкость *сжимаемая*, то наш расчет (см. формулу (1.64) и Рис. 1.18) включает мгновенные изменения объема, связанные не только с деформацией, но и со всесторонним расширением (или сжатием) за счет

изменения плотности жидкости. Эту вторую составляющую мы должны вычесть, в соответствии с основной идеей: вязкость проявляется только при деформациях (изменениях формы) объема.

Если наблюдать за изменением первоначально единичного ($V = 1 \cdot 1 \cdot 1$) кубического объема, составленного из *одних и тех же жидких* частиц, то, вследствие описанного выше удлинения его сторон (см. формулу (1.63)), *скорость относительного увеличения объема* составит величину, равную *дивергенции вектора скорости*:

$$\frac{\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} d\tau\right) \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y} d\tau\right) \left(1 + \frac{\partial w}{\partial z} d\tau\right) - (1 \cdot 1 \cdot 1)}{(1 \cdot 1 \cdot 1) d\tau} = \tag{1.65}$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \text{div } \mathbf{w}$$

Этот результат можно получить и непосредственно из определения понятия дивергенции вектора скорости, учитывая, что скорость – это плотность объемного расхода (см. Рис. 1.11):

$$\text{div } \mathbf{w} = \frac{1}{V} \frac{dV}{d\tau}. \tag{1.66}$$

При малых изменениях относительное увеличение объема равно трехкратному удлинению сторон (скажем, если стороны удлинились на 1%, то объем увеличился на 3%). Или, что то же самое, удлинение составит 1/3 от увеличения объема, т.е. $1/3 \cdot \text{div}(\mathbf{w})$. Эту величину необходимо вычесть из полного удлинения $\partial u / \partial x$, чтобы осталась только часть, связанная с деформацией. Следовательно истинная (угловая) деформация в случае сжимаемой жидкости составит

$$2 \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{3} \text{div } \mathbf{w} \right). \tag{1.67}$$

Аналогичные рассуждения справедливы и для растяжения вдоль двух других осей координат. Таким образом, мы выяснили, почему в формулировке закона Стокса появляется слагаемое с дивергенцией скорости (см. (1.51)). Это дополнение работает только на главной диагонали и исправляет значения нормальных вязких напряжений так, чтобы определение давления как среднеарифметического из нормальных напряжений (см. (1.44) и (1.46)) выполнялось и для сжимаемой жидкости (с переменной плотностью).