

22 Теплообмен излучением в прозрачной среде

22.1 Диатермичная среда

Имеется много практически важных задач, когда участвующие в радиационном теплообмене тела разделены прозрачной, не излучающей и не поглощающей (диатермичной) средой. Очевидный пример – вакуумные высокотемпературные технологии, такие как вакуумное литье в металлургии, нанесение покрытий или пленок термическим распылением в электронных технологиях и т.п. Для космических энергетических установок излучение является единственным способом отвода тепла к холодному источнику.

Одноатомные и двухатомные газы практически прозрачны для теплового излучения. Поэтому сухой воздух, состоящий в основном из двухатомных азота и кислорода, является диатермичной средой.

Сильное поглощение и излучение наблюдается в трехатомных газах, таких как водяной пар и углекислый газ. Поэтому продукты сгорания, содержащие указанные газы в большой концентрации, не являются диатермичной средой. Расчет радиационного теплообмена в таких средах рассматривается в следующей главе.

Вообще говоря, излучением и поглощением в газовых объемах, разделяющих поверхности теплообмена, можно пренебречь в случае предельно малых значений оптической толщины.

22.2 Понятие углового коэффициента излучения

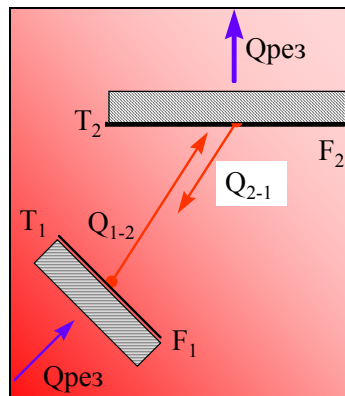


Рис.22.1. Теплообмен излучением между черными поверхностями, произвольно расположенными в пространстве

Рассмотрим теплообмен между двумя черными изотермическими поверхностями, произвольно расположенными в пространстве (Рис.22.1). Основная идея состоит в том, чтобы рассчитать поток излучения с первого тела на второе $Q_{1 \rightarrow 2}$, затем – со второго на первое $Q_{2 \rightarrow 1}$ и, наконец, взять разность между этими величинами, с тем чтобы определить результирующий поток излучения.

Поскольку температура постоянна вдоль поверхности, постоянна и плотность потока собственного излучения E_0 . Следовательно, полное излучение тела 1 по всем направлениям в пространстве определяется как

$$Q_1 = E_{0,1} F_1, \text{ Вт.} \quad (22.1)$$

Только некоторая часть этого излучения попадет на тело 2, и чтобы учесть это обстоятельство, мы вводим важное понятие *углового коэффициента излучения* первого тела на второе:

$$\varphi_{12} \equiv \frac{Q_{1 \rightarrow 2}}{Q_1}. \quad (22.2)$$

Следовательно:

$$Q_{1 \rightarrow 2} = E_{0,1} F_1 \varphi_{12}.$$

Аналогично для второго тела:

$$Q_{2 \rightarrow 1} = E_{0,2} F_2 \varphi_{21}.$$

Таким образом, результирующий поток излучения есть

$$Q_{\text{рез}} = Q_{1 \rightarrow 2} - Q_{2 \rightarrow 1} = E_{0,1} F_1 \varphi_{12} - E_{0,2} F_2 \varphi_{21}. \quad (22.3)$$

Если температуры обоих тел одинаковы, то есть тела находятся в *термодинамическом равновесии*, то результирующий поток должен быть равен нулю. Поскольку при одинаковых температурах плотности потоков собственного излучения черных тел одинаковы, то из последней формулы следует соотношение между угловыми коэффициентами:

$$F_1 \varphi_{12} = F_2 \varphi_{21}, \quad (22.4)$$

которое называется *свойством взаимности* угловых коэффициентов.

Интуитивно понятно, что значения угловых коэффициентов определяются геометрическими характеристиками системы тел, такими как форма, соотношения между размерами тел и расстояниями между ними. Напомним, однако, что мы начали с предположения об абсолютной черноте и изотермичности тел, участвующих в теплообмене излучением.

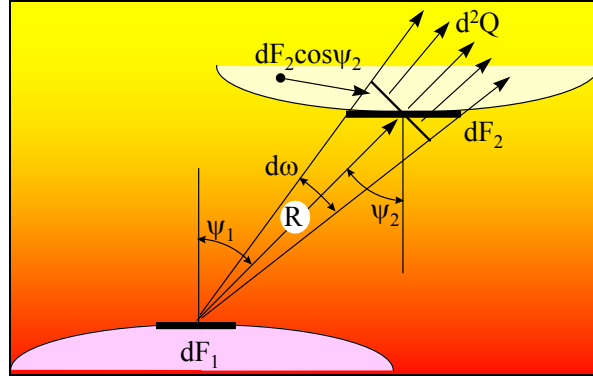


Рис. 22.2. Определение углового коэффициента излучения.

Рассмотрим, как можно применить понятие углового коэффициента для более общего случая и сформулируем важные при практическом использовании ограничения.

Пусть поверхности 1 и 2, участвующие в теплообмене излучением, являются серыми и диффузными излучателями и отражателями. В этом случае поток излучения от одной поверхности к другой есть эффективный поток, составленный из собственного и отраженного излучения.

Воспользовавшись законом Ламберта (см. главу «Законы теплового излучения») для диффузных излучателей, вычислим поток эффективного излучения, попадающего с элементарной площадки 1 на элементарную площадку 2:

$$d^2 Q_{dF_1 \rightarrow dF_2} = \frac{E_{\text{эф},1}}{\pi} d\omega dF_1 \cos(\psi_1).$$

Здесь $d\omega$ – телесный угол, под которым видна площадка dF_2 с площадки dF_1 :

$$d\omega = \frac{dF_2 \cos(\psi_2)}{r^2}.$$

Следовательно

$$d^2 Q_{dF_1 \rightarrow dF_2} = \frac{E_{\text{эф},1}}{\pi} \frac{\cos(\psi_1) \cos(\psi_2)}{r^2} dF_2 dF_1.$$

Просуммируем сначала излучение площадки dF_1 на всю поверхность F_2 :

$$dQ_{dF_1 \rightarrow F_2} = \frac{E_{\text{эф},1}}{\pi} dF_1 \int_{F_2} \frac{\cos(\psi_1) \cos(\psi_2)}{r^2} dF_2$$

и далее излучение *всех* элементарных площадок dF_1 на поверхность F_2 :

$$Q_{F_1 \rightarrow F_2} = \int_{F_1} \frac{E_{\text{эф},1}}{\pi} dF_1 \int_{F_2} \frac{\cos(\psi_1) \cos(\psi_2)}{r^2} dF_2.$$

Излучение поверхности F_1 по *всем* направлениям составит:

$$Q_{F_1} = \int_{F_1} E_{\text{эф},1} dF_1.$$

Наконец, выпишем выражение для углового коэффициента, пользуясь определением понятия этой величины:

$$\varphi_{12} \equiv \frac{Q_{F_1 \rightarrow F_2}}{Q_{F_1}} = \frac{\int_{F_1} \frac{E_{\text{эф},1}}{\pi} dF_1 \int_{F_2} \frac{\cos(\psi_1) \cos(\psi_2)}{r^2} dF_2}{\int_{F_1} E_{\text{эф},1} dF_1}.$$

Мы видим, что в общем случае угловой коэффициент зависит от геометрических характеристик системы и распределения эффективного излучения вдоль поверхности.

При проведении инженерных расчетов реальную конфигурацию представляют в виде системы поверхностей, для которых плотность эффективного излучения можно считать постоянной (с нужной точностью). При этом величина $E_{\text{эф},1}$ выносится из под знаков интегрирования и сокращается, так что угловой коэффициент оказывается теперь функцией только от геометрии системы:

$$\varphi_{12} = \frac{\int_{F_1} dF_1 \int_{F_2} \frac{\cos(\psi_1) \cos(\psi_2)}{\pi r^2} dF_2}{F_1}. \quad (22.5)$$

Определим теперь угловой коэффициент излучения поверхности 2 на поверхность 1. Ясно, что все выкладки проводятся аналогично, и в конечной формуле (22.5) следует просто изменить порядок следования индексов:

$$\varphi_{21} = \frac{\int_{F_2} dF_2 \int_{F_1} \frac{\cos(\psi_1) \cos(\psi_2)}{\pi r^2} dF_1}{F_2}. \quad (22.6)$$

Обратите внимание, что в правых частях выражений (22.5) и (22.6) вычисляется один и тот же интеграл (результат интегрирования не зависит порядка интегрирования). Поэтому

$$F_1\varphi_{12} = F_2\varphi_{21}. \quad (22.7)$$

Мы вновь вывели свойство взаимности угловых коэффициентов, полученное ранее при анализе состояния равновесия черных излучателей.

Итак, для диффузных поверхностей и при равномерном распределении плотности эффективного излучения вдоль поверхности *угловой коэффициент излучения зависит исключительно от геометрии системы* и будет одинаковым для геометрически подобных конфигураций. Это важное свойство угловых коэффициентов позволяет существенно упростить проведение инженерных расчетов теплообмена излучением.

Принятые ограничения строго выполняются для черных изотермических поверхностей. Действительно, черные тела являются диффузными излучателями, с другой стороны, эффективное излучение черных тел – это собственное излучение, зависящее только от температуры, которая принимается постоянной вдоль соответствующей (изотермической) поверхности.

Реальные поверхности теплообменных устройств с хорошим приближением можно считать серыми диффузными излучателями и отражателями. Эффективное излучение серых поверхностей складывается из собственного и отраженного излучения. Если поверхности изотермичны, то по крайней мере собственное излучение будет постоянным вдоль поверхности. Универсальным способом проверки достоверности результатов будет разбиение системы на более мелкие составляющие поверхности (точно так же как при численном интегрировании уменьшают шаг интегрирования, скажем вдвое, и сравнивают результаты для оценки ошибки интегрирования).

22.3 Расчет угловых коэффициентов

В предыдущем пункте мы ввели понятие углового коэффициента излучения (22.2), установили *свойство взаимности* (22.7) и вывели формулу (22.5), позволяющую рассчитать угловой коэффициент по заданным геометрическим характеристикам системы. Как было показано на простом примере (см. формулу (22.3)), все что необходимо для расчета теплообмена излучением в прозрачной среде – это определить значения угловых коэффициентов.

Далее вы увидите, что это не слишком сложная проблема и что вряд ли на практике встретится ситуация, когда понадобится прямой метод (22.5) с многократным интегрированием.

В большинстве случаев системы, которые приходится рассчитывать – замкнутые или их можно искусственно замкнуть поверхностью с подходящими свойствами.

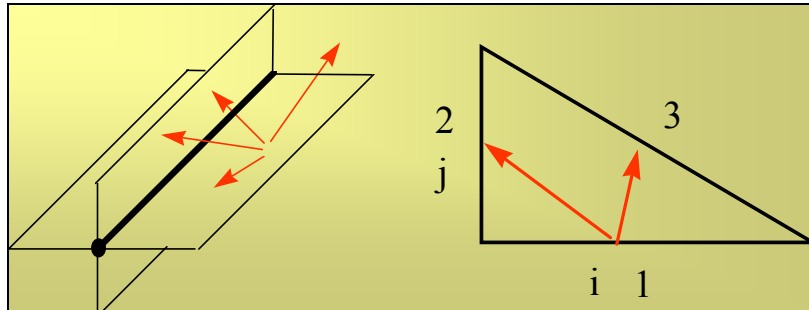


Рис. 22.3. Задача о космическом радиаторе

Пусть, например, проектируется «космический холодильник» (Рис. 22.3): требуется охладить жидкость, протекающую в трубе, посредством отвода теплоты излучением в пространство. Для увеличения поверхности теплосъема устанавливают длинные продольные ребра, которые излучают не только в космос, но и друг на друга. Поскольку ребра длинные, можно считать задачу «двухмерной», как показано в правой части рисунка. Заданы размеры катетов h_1 и h_2 . Космическое пространство имитируется гипотенузой 3 как абсолютно черной поверхностью при температуре абсолютного нуля, так что поверхность 3 все поглощает и ничего не излучает. Теперь можно рассмотреть задачу об угловых коэффициентах в замкнутой системе.

Для таких систем очевидным является *свойство замкнутости* угловых коэффициентов:

$$\sum_{j=1}^N \varphi_{ij} = 1, \quad (22.8)$$

где N – число поверхностей, $i, j = 1..N$. Соотношение (22.8) можно записать для каждой поверхности системы. Например, для поверхности $i=1$:

$$\varphi_{11} + \varphi_{12} + \varphi_{13} = 1.$$

Это означает, что сумма долей излучения 1-го тела на себя и на другие поверхности, образующие замкнутую систему, равна единице. Для невыпуклых (плоских или выпуклых) поверхностей угловые коэффициенты «самооблучения» равны нулю. Например, $\varphi_{11} = 0$.

Удобно представить угловые коэффициенты в виде матрицы $N \times N$. Для нашего примера:

$$\Phi = \begin{bmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \varphi_{13} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \varphi_{23} \\ \varphi_{31} & \varphi_{32} & \varphi_{33} \end{bmatrix}.$$

Элементы этой матрицы находят, воспользовавшись свойствами замкнутости, взаимности, «невогнутости» и простейшими геометрическими соотношениями.

Благодаря «невогнутости», все элементы на диагонали равны нулю:

$$\varphi_{11} = 0; \quad \varphi_{22} = 0; \quad \varphi_{33} = 0.$$

Имеется три отношения взаимности:

$$h_2 \varphi_{21} = h_1 \varphi_{12}; \quad h_3 \varphi_{31} = h_1 \varphi_{13}; \quad h_3 \varphi_{32} = h_2 \varphi_{23}, \quad (22.9)$$

и три уравнения свойства замкнутости:

$$\varphi_{12} + \varphi_{13} = 1; \quad \varphi_{21} + \varphi_{23} = 1; \quad \varphi_{31} + \varphi_{32} = 1. \quad (22.10)$$

В последних трех уравнениях нулевые диагональные коэффициенты опущены.

Единственный безразмерный геометрический параметр, который полностью определяет геометрию системы, это отношение заданных катетов: $\beta \equiv h_2 / h_1$.

Тогда для отношения гипотенузы 3 к катету 1 и к катету 2 имеем:

$$h_3 / h_1 = \sqrt{1 + \beta^2}, \quad h_3 / h_2 = \sqrt{1 + \beta^2} / \beta.$$

Итак, для шести неизвестных угловых коэффициентов получены шесть линейных уравнений (22.9), (22.10), содержащих заданный геометрический параметр β . Результат решения линейной системы будет следующим:

$$\varphi_{12} = \frac{1}{2}(1 + \beta - \sqrt{1 + \beta^2}). \quad (22.11)$$

График этой зависимости представлен на Рис. 22.4.

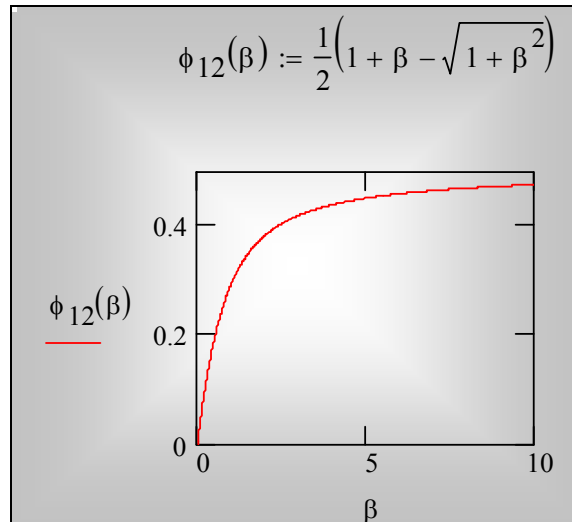


Рис. 22.4. Угловой коэффициент в системе двух взаимно перпендикулярных полос

Остальные коэффициенты проще непосредственно вычислить из уравнений (22.9), (22.10). Как пример, приведем матрицу угловых коэффициентов для равнобедренного прямоугольного треугольника с $\beta = 1$:

$$\Phi = \begin{bmatrix} 0 & 0,707 & 0,293 \\ 0,707 & 0 & 0,293 \\ 0,5 & 0,5 & 0 \end{bmatrix}$$

Таким образом, применение свойств взаимности и замкнутости позволило найти матрицу угловых коэффициентов для простой геометрической системы. В справочной литературе имеется обширная коллекция такого типа формул для разнообразных конфигураций (в том числе трехмерных).

Еще одно очевидное свойство угловых коэффициентов, *свойство распределительности*, может существенно помочь при вычислениях. Оно следует непосредственно из определения понятия углового коэффициента. Пусть вы решили разбить поверхность 2 на две подповерхности $2'$ и $2''$, например, чтобы учесть изменение температуры вдоль ребра 2 (Рис.22.5) Тогда

$$\varphi_{12} = \varphi_{12'} + \varphi_{12''}, \quad (22.12)$$

так как излучение тела 1, попадающее на тело 2, состоит из двух частей – излучения, попадающего на $2'$ и излучения, попадающего на $2''$, а эти части и есть, согласно определению, угловые коэффициенты в правой части

(22.12). Формула для расчета соприкасающихся сторон 1 и 2 или 1 и 2' известна (см. (22.11)). Следовательно, из соотношения (22.12) можно вычислить угловой коэффициент разнесенных полос 1 и 2'.

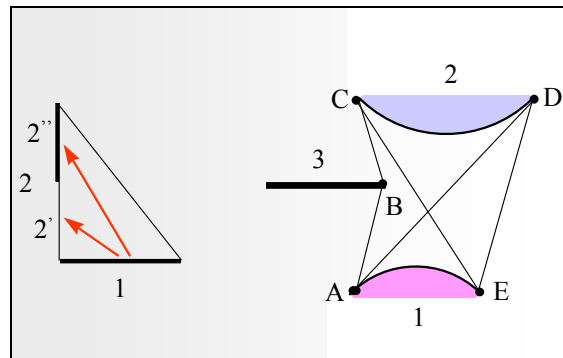


Рис.22.5. Расчет угловых коэффициентов на основе свойства распределительности (слева) и методом натянутых нитей.

Расчет угловых коэффициентов в двумерных системах (для цилиндрических поверхностей различной формы) можно проводить универсальным *методом натянутых нитей* (Рис.22.5):

$$\phi_{12} = \frac{1}{2} \frac{(AD+EC) - (ABC+ED)}{AE}, \quad (22.13)$$

где в числителе правой части фигурируют:

- сумма длин пересекающихся нитей AD и EC
- сумма длин непересекающихся нитей ABC и ED,

а в знаменателе – протяженность поверхности 1, т.е. AE.

Нити «прикрепляются» к граничным точкам поверхностей, т.е. точкам A, E и C,D.

Этот метод позволяет учесть влияние третьей поверхности, частично затеняющей поверхность 2 от излучения поверхности 1. Если сдвинуть поверхность 3 вправо до соприкосновения с нитью ED, то сумма непересекающихся сравняется с суммой пересекающихся нитей, и угловой коэффициент обратится в ноль, как и следовало ожидать.

Итак, используя свойства взаимности (22.7), замкнутости (22.8), распределительности (22.12), метод натянутых нитей (22.13), а также большую справочную коллекцию формул и графиков, практически всегда без сложных вычислений можно определить необходимый набор (матрицу) угловых коэффициентов.

22.4 Теплообмен излучением в замкнутой системе

Замкнутая система N серых изотермических поверхностей с заданными температурами T_i схематически представлена на Рис. 22.6. Поверхности идентифицируются индексами i или j , $i, j = 1..N$, при описании их попарного радиационного взаимодействия. Поверхности разделены прозрачной (не излучающей и не поглощающей) средой. Требуется найти значения плотностей результирующего потока излучения $E_{рез_i}$.

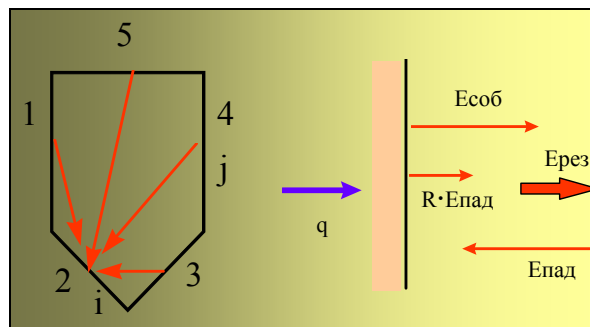


Рис. 22.6. Теплообмен излучением в замкнутой системе

Предполагаются известными значения степени черноты ε_i поверхностей, которые считаются серыми диффузными излучателями. Задана геометрия системы, значения площадей поверхностей F_i , их форма, размеры и взаимное расположение, так что угловые коэффициенты ϕ_{ij} могут быть предварительно рассчитаны.

Расчет базируется на двух очевидных соотношениях, следующих из определения понятий эффективного, собственного, падающего и результирующего потоков:

$$E_{эф} = E_{соб} + R E_{пад}, \quad R = 1 - A \quad (22.14)$$

$$E_{рез} = E_{эф} - E_{пад}. \quad (22.15)$$

Эти соотношения могут быть записаны для каждой i -поверхности системы.

В качестве *неизвестных* величин выступают потоки *эффективного* излучения. Проблема состоит в том, что падающее на данную поверхность излучение создается *всеми* телами системы, поэтому необходимо выразить поток падающего излучения через эффективные излучения *всех* поверхностей.

Начнем с взаимодействия фиксированной i -поверхности с какой-либо j -поверхностью. Все излучение j -поверхности есть

$$E_{эф_j} F_j, \text{ Вт.}$$

На i -поверхность попадает часть этого излучения, определяемая угловым коэффициентом j -поверхности на i -поверхность:

$$E\text{эф}_j F_j \varphi_{ji}, \text{ Вт.}$$

Плотность потока падающего излучения от одной j -поверхности составит:

$$\frac{E\text{эф}_j F_j \varphi_{ji}}{F_i}, \text{ Вт/м}^2,$$

или, с учетом свойства взаимности ($F_j \varphi_{ji} = F_i \varphi_{ij}$),

$$E\text{эф}_j \varphi_{ij}.$$

Теперь необходимо просуммировать плотности падающего излучения от всех j -поверхностей ($j=1 \dots N$), то есть

$$E_{\text{пад}_i} = \sum_j E\text{эф}_j \cdot \varphi_{ij}.$$

Следовательно, для каждой i -поверхности в соответствии с формулой (22.14) можно записать следующее уравнение:

$$E\text{эф}_i = E_{\text{соб}_i} + R_i E_{\text{пад}_i} = E_{\text{соб}_i} + R_i \sum_j E\text{эф}_j \cdot \varphi_{ij} \quad (22.16)$$

согласно которому эффективное излучение i -поверхности складывается из собственного и отраженного излучения этой поверхности, причем последнее есть R_i – доля от падающего излучения, обусловленного эффективным излучением всех j -поверхностей. Уравнение (22.16) содержит известную величину собственного излучения, определяемую по закону Стефана–Больцмана:

$$E_{\text{соб}_i} = \varepsilon_i \sigma T_i^4.$$

Неизвестными величинами в (22.16) являются $E\text{эф}_i$. Ясно, что получилась система *линейных* уравнений относительно эффективных потоков излучения, решение которой, с принципиальной точки зрения, получить несложно.

После того как величины $E\text{эф}_i$ определены для всех поверхностей, рассчитывают плотности результирующего потока излучения, которые определяются в соответствии с формулой (22.15) как разности эффективного и падающего излучения:

$$E_{\text{рез}_i} = E\text{эф}_i - \sum_j E\text{эф}_j \varphi_{ij}. \quad (22.17)$$

Задача решена.

Полезно представить систему линейных уравнений (22.16) в стандартном виде:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{E}\Phi = \mathbf{B},$$

где \mathbf{A} – матрица $N \times N$ коэффициентов системы уравнений, \mathbf{B} – вектор–столбец правых частей, $\mathbf{E}\Phi$ – вектор–столбец искомых величин. После такого преобразования можно просто обратиться к стандартной компьютерной программе решения системы линейных уравнений.

Используем для отдельно стоящей величины $E\Phi_i$ в уравнениях (22.16) и (22.17) тождество

$$E\Phi_i \equiv \sum_j E\Phi_j \delta_{ij},$$

где δ_{ij} – символ Кронекера:

$$\delta_{ij} = 1 \text{ если } i = j; \quad \delta_{ij} = 0 \text{ если } i \neq j.$$

Под знаком суммы в действительности остается только одно ненулевое слагаемое с $j=i$, но такая подстановка позволит нам привести подобные члены, содержащие эффективные потоки в левой и правой частях уравнений:

$$\sum_j (\delta_{ij} - R_i \varphi_{ij}) E\Phi_j = E\text{собр}_i, \quad (22.18)$$

$$E\text{рез}_i = \sum_j (\delta_{ij} - \varphi_{ij}) E\Phi_j. \quad (22.19)$$

Нетрудно увидеть в операторах суммирования правило умножения матрицы на вектор: элементы строки i умножаются на элементы вектора и складываются. Поэтому оба этих уравнения представляются в матричном виде следующим образом:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{E}\Phi = \mathbf{B}; \quad \mathbf{E}\text{рез} = \mathbf{D} \cdot \mathbf{E}\Phi. \quad (22.20)$$

Элементы матриц и вектора правой части рассчитываются по формулам:

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \delta_{ij} - R_i \varphi_{ij}, & b_i &= E\text{собр}_i = \varepsilon_i \sigma T^4, \\ D_{ij} &= \delta_{ij} - \varphi_{ij}. \end{aligned} \quad (22.21)$$

Коэффициент отражения для серых тел вычисляется как $R_i = 1 - \varepsilon_i$.

Теперь задача подготовлена к решению на компьютере.

Задача со смешанными условиями на поверхностях. Пусть на некоторых поверхностях системы заданы значения температуры, и требуется найти значения плотности результирующего потока на этих поверхностях.

На других поверхностях заданы значения плотностей результирующего потока излучения и требуется найти их температуры. Частным случаем является адиабатически изолированная поверхность (теплоизолированная стенка), для которой результирующий поток равен нулю. Например, это огнеупорная обмуровка парогенератора.

Из уравнений вида (22.16) или (22.17) необходимо скомбинировать систему из N уравнений с N неизвестными по следующему правилу: для поверхностей с заданной температурой следует включить уравнение (22.16), а для поверхностей с заданными плотностями результирующего потока – уравнение (22.17). В первом случае уравнение содержит известную величину собственного излучения, а во втором – заданную величину плотности результирующего потока.

Элементы матрицы и вектора правой части уравнения для эффективных потоков

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{E}\varepsilon\mathbf{f} = \mathbf{B}.$$

теперь определяются по формулам:

а) задана температура поверхности

$$A_{ij} = \delta_{ij} - R_i \varphi_{ij}; \quad b_i = E \text{соб}_i = \varepsilon_i \sigma T^4, \quad (22.22)$$

б) задан результирующий поток

$$A_{ij} = \delta_{ij} - \varphi_{ij}; \quad b_i = E \text{рез}_i$$

После того как величины $E\varepsilon\mathbf{f}_i$ определены для всех поверхностей, необходимо: вычислить по уравнению (22.17) значения $E \text{рез}_i$ для тех поверхностей, где были заданы температуры; вычислить по уравнению (22.16) значения $E \text{соб}_i$ для тех поверхностей, где были заданы результирующие потоки излучения, после чего рассчитать температуры этих поверхностей:

$$T_i = \left(\frac{E \text{соб}_i}{\varepsilon_i \sigma} \right)^{1/4}.$$

Теплопроводность и конвекция в прозрачной среде. В заключение сделаем важное замечание, касающееся постановки задачи. Мы пренебрегли другими способами теплопереноса между поверхностями, такими как теплопроводность и конвекция в (прозрачной) газовой среде, заполняющей

объем системы. Эти эффекты учитываются при расчете реальных установок следующим образом.

Пусть заданы температуры поверхностей, а газовая среда между ними отсутствует (система находится в вакууме). Решив задачу так, как это описано выше, мы получим значения *радиационных* результирующих потоков для каждой поверхности. Пусть теперь система заполнена *прозрачным* (не излучающим и не поглощающим) газом. Это никак не скажется на значениях *радиационных* потоков E , поскольку они определяются только температурами поверхностей. Что же изменится?

Если горячая поверхность соприкасается с относительно холодным газом, то от стенки к газу возникнет тепловой поток за счет конвекции. Теперь *через стенку извне* потребуется подводить больше тепла, а именно *суммарную* величину радиационного результирующего потока $E_{рез}$ и конвективного потока. Говорят, что процессы радиационного и конвективного теплообмена в прозрачных газах развиваются параллельно, независимо один от другого. Мы подробнее обсудим этот вопрос позже на числовых примерах.

22.5 Аналитические решения для простых систем

Теплообмен излучением между телом и оболочкой. Рассмотрим применение полученных уравнений для расчета простейшей замкнутой системы из двух поверхностей – внутреннего тела 1 и окружающей его оболочки 2 (Рис. 22.7а). Предполагаем, что поверхность внутреннего тела – невогнутая. Для обеих поверхностей считаются известными их площади, температуры, степени черноты. Требуется определить результирующий поток излучения.

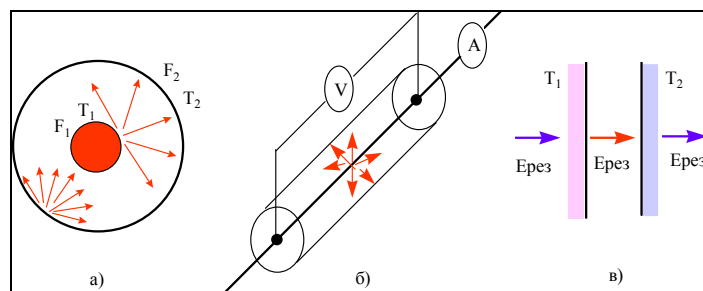


Рис. 22.7. Теплообмен излучением между телом и оболочкой

Угловые коэффициенты излучения в этой системе находятся просто. Выпишем свойства замкнутости и взаимности:

$$\begin{aligned} \varphi_{11} + \varphi_{12} &= 1; & \varphi_{21} + \varphi_{22} &= 1; \\ F_1 \varphi_{12} &= F_2 \varphi_{21} \end{aligned}$$

Поскольку внутренняя поверхность 1 невогнутая, $\varphi_{11} = 0$, получаем:

$$\varphi_{12} = 1; \quad \varphi_{21} = F_1 / F_2; \quad \varphi_{22} = 1 - \varphi_{21} = 1 - F_1 / F_2. \quad (22.23)$$

Это означает, что все излучение внутренней поверхности 1 попадает на оболочку 2. Только часть излучения оболочки 2, равная отношению внутренней поверхности к внешней, попадает на внутреннюю поверхность; другая часть переизлучается на оболочку.

Для круглых цилиндров $F = 2\pi RL$, $L \gg R$ и $\varphi_{21} = R_1/R_2$.

Для сфер $F = 4\pi R^2$ и $\varphi_{21} = R_1^2/R_2^2$.

Сформируем матрицу системы уравнений (22.20) для эффективных потоков излучения, используя соотношения (22.21). Для этого последовательно определим следующие матрицы.

Матрица угловых коэффициентов есть:

$$\Phi = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \varphi_{21} & 1 - \varphi_{21} \end{bmatrix}.$$

Матрица, которая получается умножением первой строки на коэффициент отражения R_1 , второй строки – на R_2 (и так далее для систем из большого количества поверхностей):

$$\Phi_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 \cdot R_1 \\ \varphi_{21} R_2 & (1 - \varphi_{21}) R_2 \end{bmatrix}.$$

Единичная матрица (матричное представление символа Кронекера):

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Матрица системы линейных уравнений для определения потоков эффективного излучения:

$$\mathbf{A} = I - \Phi_R = \begin{bmatrix} 1 & -R_1 \\ -\varphi_{21} R_2 & 1 - R_2(1 - \varphi_{21}) \end{bmatrix}.$$

Вектор–столбец правой части системы уравнений, составленный из плотностей собственного излучения поверхностей, и вектор–столбец искоемых величин плотностей эффективного излучения:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} A_1 E_{01} \\ A_2 E_{02} \end{bmatrix} \quad \mathbf{E}\Phi = \begin{bmatrix} E\Phi_1 \\ E\Phi_2 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, система уравнений в матричной форме есть:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{E}\Phi = \mathbf{B}$$

Получить решение линейной системы из двух уравнений в общем виде несложно, на даже для такой простой задачи выкладки будут довольно длинными. Поэтому следует воспользоваться системой символьных вычислений в пакете Mathcad или Maple. Результат будет следующим:

$$\mathbf{E}\Phi = \begin{bmatrix} \frac{R_1 \varepsilon_2 E_{0,2} + \varepsilon_1 E_{0,1} - R_2 \varepsilon_1 E_{01} + R_2 \varphi_{21} \varepsilon_1 E_{0,1}}{R_2 \varphi_{21} R_1 - 1 + R_2 - R_2 \varphi_{21}} \\ - \frac{R_2 \varphi_{21} \varepsilon_1 E_{0,1} + \varepsilon_2 E_{0,2}}{R_2 \varphi_{21} R_1 - 1 + R_2 - R_2 \varphi_{21}} \end{bmatrix}.$$

Коэффициент отражения серых тел вычисляется как $R_i = 1 - \varepsilon_i$.

Далее необходимо воспользоваться уравнением (22.19) для вычисления плотностей потоков результирующего излучения. В матричной форме это соотношение выглядит следующим образом:

$$\mathbf{E}_{рез} = (\mathbf{I} - \Phi) \cdot \mathbf{E}\Phi$$

Выполнив необходимые символьные вычисления (в Mathcad или Maple), получают формулу для плотности результирующего потока на внутренней поверхности:

$$E_{рез1} = \frac{E_{0,1} - E_{0,2}}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \left(\frac{1}{\varepsilon_2} - 1 \right) \varphi_{21}}, \text{ Вт/м}^2, \quad (22.24)$$

где $\varphi_{21} = F_1 / F_2$, $E_{0,1} = \sigma T_1^4$, $E_{0,2} = \sigma T_2^4$.

Плотность результирующего потока на поверхности оболочки рассчитывается из баланса:

$$Q_{рез} = E_{рез1} F_1 = -E_{рез2} F_2, \text{ Вт.}$$

Формула (22.24) широко используется в практических расчетах, и мы опишем эти применения далее.

Рассмотрим два предельных случая при изменении соотношения размеров внутренней и внешней поверхности F_1 / F_2 .

а) Пусть размеры внутреннего тела 1 существенно меньше размеров оболочки (Рис. 22.7б, проволока на оси цилиндра большого диаметра). Тогда

$$\frac{F_1}{F_2} \rightarrow 0; \quad \varphi_{21} \rightarrow 0$$

и расчетная формула (22.24) переписывается следующим образом:

$$E_{рез1} = \varepsilon_1 \sigma (T_1^4 - T_2^4), \text{ Вт/м}^2. \quad (22.25)$$

Замечательным свойством этого решения является независимость результирующего потока излучения от степени черноты и размеров оболочки (просто они должны быть велики по сравнению с размерами внутреннего тела). Ситуация выглядит так, как будто большая оболочка ведет себя как черное тело, поглощая все излучение внутренней поверхности.

б) Пусть размеры внутреннего тела 1 приближаются к размерам оболочки 2 и между ними остается только тонкий зазор. Тогда

$$\frac{F_1}{F_2} \rightarrow 1; \quad \varphi_{21} \rightarrow 1$$

и расчетная формула (22.24) переписывается следующим образом:

$$E_{рез1} = \frac{\sigma (T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1}, \text{ Вт/м}^2. \quad (22.26)$$

Поскольку величины поверхностей теперь практически одинаковы, значения плотности результирующего потока также будут одинаковыми (но с разным знаком). Эта ситуация идентична теплообмену излучением между бесконечными плоскими пластинами (Рис. 22.7в). Фактически важно только то, что зазор между поверхностями очень мал по сравнению с другими размерами системы.

Калориметрический метод экспериментального определения степени черноты. На Рис. 22.7б проиллюстрирована идея экспериментального определения степени черноты проволоки (внутреннее тело), натянутой по оси вакуумированного цилиндра большого диаметра (оболочка). Производя точные измерения силы тока и напряжения электрически обогреваемой проволоки, определяют Джоулево тепло (Вт), передаваемое посредством излучения от нити к термостатированной при температуре T_2 оболочке и, зная поверхность нити, находят плотность результирующего потока $E_{рез1}$. Температуру нити T_1 измеряют, например, используя температурную зависимость электрического сопротивления проволоки (т.е. методом термометра сопротивления). Наконец, по формуле (22.25) вычисляют искомое значение степени черноты. Применение формулы (22.25)

оправдано, поскольку поверхность тонкой проволоки существенно меньше поверхности цилиндрической оболочки.

Защита от излучения с помощью экранов. Часто бывает необходимо уменьшить результирующий поток излучения между телами, например, чтобы снизить тепловые потери из высокотемпературной установки, оградить датчик температуры в газовом объеме от нагрева излучением высокотемпературных стенок, защитить человека от воздействия высокотемпературного излучения и т.п. В таких случаях устанавливают непрозрачные для теплового излучения экраны. Воспользуемся схемой на Рис. 22.8а для вывода расчетного соотношения при установке одного плоского экрана. Требуется определить результирующий поток излучения.

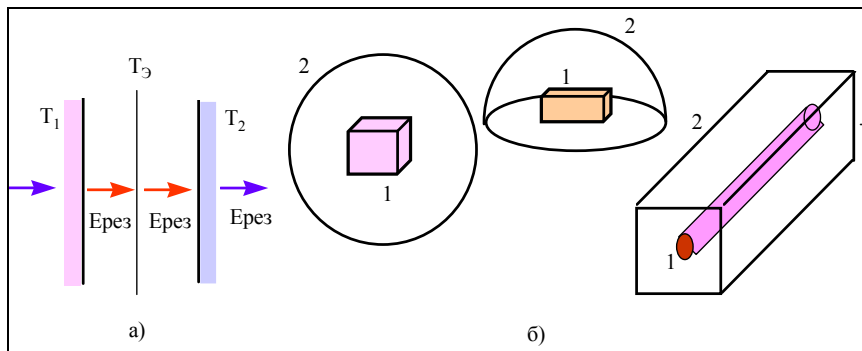


Рис. 22.8. Теплообмен излучением в системах различной конфигурации.

Основной идеей вывода является равенство результирующих потоков по обеим сторонам экрана, так как в противном случае его температура изменялась бы во времени – увеличивалась, если подводится тепла больше, чем отводится, или уменьшалась в противоположной ситуации. Для каждого из промежутков «1–Э» и «Э–2» можно воспользоваться формулой (22.26):

$$E_{рез} = \frac{\sigma(T_1^4 - T_Э^4)}{\frac{1}{\epsilon_1} + \frac{1}{\epsilon_Э} - 1} \equiv \frac{\sigma(T_1^4 - T_Э^4)}{\epsilon_{1Э}}$$

$$E_{рез} = \frac{\sigma(T_Э^4 - T_2^4)}{\frac{1}{\epsilon_Э} + \frac{1}{\epsilon_2} - 1} \equiv \frac{\sigma(T_Э^4 - T_2^4)}{\epsilon_{Э2}}$$

Значки тождества показывают, что мы просто ввели обозначения для длинных выражений в знаменателе, используя так называемые приведенные степени черноты. Перенос в левые части знаменатели правых частей и

складывая оба уравнения, мы исключаем неизвестную температуру экрана и получаем для плотности результирующего потока формулу:

$$E_{рез}^{Экр} = \frac{\sigma(T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{\varepsilon_{1Э}} + \frac{1}{\varepsilon_{Э2}}}. \quad (22.27)$$

В исходной ситуации без экрана результирующий поток был:

$$E_{рез} = \frac{\sigma(T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{\varepsilon_{12}}}.$$

Сравнивая два последних выражения, мы видим, что добавление экрана приводит к появлению в знаменателе дополнительных слагаемых, то есть к уменьшению результирующего потока.

Чтобы вывести запоминающееся правило, предположим, что степени черноты всех поверхностей одинаковы. Тогда все приведенные степени черноты также одинаковы, и при установке одного экрана мы получаем двукратное уменьшение результирующего потока:

$$\frac{E_{рез}^{Экр}}{E_{рез}} = \frac{1}{2},$$

а при установке N экранов:

$$\frac{E_{рез}^{Экр}}{E_{рез}} = \frac{1}{N+1}. \quad (22.28)$$

Еще более эффективную защиту можно обеспечить, применяя экраны с низким коэффициентом поглощения (степени черноты), например, алюминиевые ($\varepsilon \approx 0,2$).

Применение формулы (22.24) для тел различной формы. Выше, при введении понятия углового коэффициента излучения, было показано, что необходимо соблюдать условие постоянства плотности потока эффективного излучения вдоль поверхности. Поэтому формула (22.24) строго справедлива, например, для коаксиальных изотермических цилиндров или концентрических сфер. Однако в приближенных расчетах ее широко используют для самых разнообразных конфигураций (Рис. 22.8б). Следует только помнить, что при выводе мы считали внутреннюю поверхность невогнутой (плоской или выпуклой).

22.6 Примеры, приложения

Выше мы рассмотрели теплообмен излучением вне связи с другими процессами переноса теплоты в разделяющей поверхности среде – теплопроводностью и конвекцией. Мы выделяли из реального окружения (реального технического устройства) некоторый замкнутый объем, ограниченный поверхностями с различными заданными температурами, и рассчитывали потоки излучения между этими поверхностями. Возникает два вопроса:

а) как связаны различные процессы переноса (радиация, теплопроводность, конвекция)

б) как «подключена» рассматриваемая область к реальному окружению.

При решении первого вопроса важно принятое нами предположение о прозрачности среды, заполняющей выделенный объем. Газ в этом объеме *поглощает* излучения стенок и сам ничего *не излучает*. *Потоки излучения Ерез* при этом совершенно не зависят от температуры газа, а определяются только *температурами стенок*. Однако если температуры газа и стенки неодинаковы, неизбежно возникнет тепловой поток за счет теплопроводности и (или) конвекции.

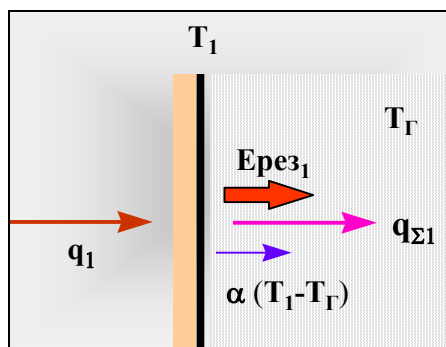


Рис. 22.9. Радиационные и конвективные потоки тепла.

Из схемы на Рис. 22.9 ясно, что суммарный поток теплоты от стенки составит:

$$q_{\Sigma 1} = E_{\text{рез}1} + \alpha_1(T_1 - T_{\Gamma}), \quad (22.29)$$

где α_1 – коэффициент теплоотдачи от поверхности 1 к газу в рассматриваемом объеме. Обратите внимание, в каком порядке записаны температуры в выражении для температурного напора: положительным считается поток от стенки.

Теперь мы переходим ко второму вопросу, а именно, как «подключена» рассматриваемая область к окружению. По существу, это проблема постановки граничных условий. Задание температур поверхностей – это

естественная и наиболее удобная форма граничных условий для задач теплообмена излучением. Но при реальной постановке инженерной задачи эти температуры могут быть неизвестными!

В стационарных условиях поток, определенный формулой (22.29), должен подводиться (q_1) каким-то образом в систему (Рис. 22.9):

$$q_1 = q_{\Sigma 1}; \quad q_1 = E_{рез1} + \alpha_1(T_1 - T_d). \quad (22.30)$$

Левая часть записана для воображаемой контрольной поверхности, расположенной слева, а правая часть – справа от реальной поверхности тела 1. Это и есть формулировка граничного условия для потоков теплоты.

Рассмотрим возможные частные случаи.

1) Задана температура поверхности. Тогда соотношение (22.30) используется просто для расчета потока q_1 , который каким-либо образом должен подводиться извне, чтобы поддерживать температуру стенки на заданном уровне.

2) Задан тепловой поток q_1 , подводимый извне. Тогда уравнение (22.30) нужно включить в систему уравнений для расчета лучистых потоков. В результате решения будет найдена температура стенки T_1 .

3) Заданы температура $T_{нар}$ внешнего теплоносителя и коэффициент теплоотдачи $\alpha_{нар}$ с внешней стороны, так что $q_1 = \alpha_{нар}(T_{нар} - T_1)$. Тогда уравнение (22.30) переписывается в виде

$$\alpha_{нар}(T_{нар} - T_1) = E_{рез1} + \alpha_1(T_1 - T_d)$$

и включается в систему уравнений для расчета лучистых потоков. В результате решения будет найдена температура стенки T_1 .

Задача о радиационных заморозках

Рассмотрим далее в качестве примера задачу из области природных явлений, задачу о так называемых радиационных заморозках. Почему весной или осенью при *положительной* температуре воздуха в ночное время случаются заморозки на почве, земля и растения покрываются инеем? Оказывается, это связано с теплообменом излучением между поверхностью земли и «небом» (Рис. 22.10).

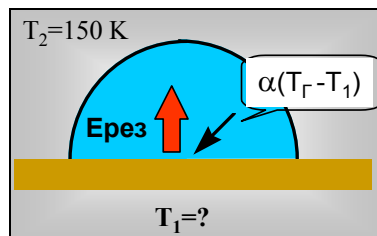


Рис. 22.10. Задача о радиационных заморозках.

Будем считать теплопровод к поверхностному слою от более глубоких слоев почвы пренебрежимо малым. Тогда величина q_1 принимается равной нулю (Рис. 22.10) и граничное условие (22.30) запишется следующим образом:

$$0 = E_{рез_1} + \alpha_1(T_1 - T_{\Gamma}) \quad (22.31)$$

Здесь $\alpha_1 \approx 10 \text{ Вт}/(\text{м}^2\text{К})$ – коэффициент теплоотдачи от воздуха к поверхности, $T_1, \text{К}$ – искомая температура поверхности почвы, $T_{\Gamma} = 10^\circ\text{C} = 283 \text{ К}$ – температура воздуха.

В нашей модели небо – это сфера большого радиуса над участком земли, поэтому для расчета теплообмена излучением годится формула (22.25):

$$E_{рез_1} = \varepsilon_1 \sigma (T_1^4 - T_2^4) \quad (22.32)$$

где T_2 – эффективная (радиационная) температура неба. Если бы атмосфера была абсолютно прозрачной, то эта температура в ночное время была бы близка к абсолютному нулю. Реальной оценкой для ясного ночного неба является $T_2=150 \text{ К}$, а для облачного неба $T_2=250 \text{ К}$. Коэффициент поглощения поверхности почвы близок к единице.

Итак, два соотношения (22.31), (22.32) составляют нелинейную систему уравнений для результирующей плотности потока излучения на поверхности почвы и для температуры почвы. Поскольку сейчас для нас важна наглядность, а не эффективность вычислений, приведем графическое решение этой системы (Рис. 22.11). Используя неизвестную температуру T_1 как параметр, вычислим и нанесем на график значения результирующего потока излучения по формулам (22.31) и (22.32). Решение находится в пересечении этих линий.

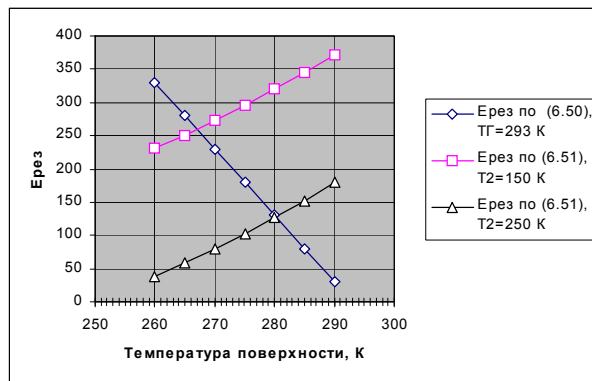


Рис. 22.11. Температура поверхности почвы при различных значениях радиационной температуры неба.

Как видно из графиков, при ясном небе с радиационной температурой 150 К можно прогнозировать заморозки на почве. Температура понизится примерно до $-6\text{ }^{\circ}\text{C}$. При облачном небе с радиационной температурой 250 К температура поверхности будет примерно $+7\text{ }^{\circ}\text{C}$. Напомним, что температура воздуха в обоих случаях $+10\text{ }^{\circ}\text{C}$.

Задача о высокотемпературном газовом теплообменнике

В теплообменнике типа «труба в трубе» (Рис. 22.12) внутренняя труба 1 есть высокотемпературный нагреватель, обеспечивающий тепловую нагрузку q_1 , Вт/м². В кольцевом зазоре протекает нагреваемый газ при температуре $T_{\Gamma} = 400\text{ К}$. Внешняя поверхность теплоизолирована. Требуется определить температуры поверхности нагревателя T_1 и теплоизолированной поверхности T_2 при различных значениях тепловой нагрузки q_1 . Коэффициенты теплоотдачи следует рассчитать по подходящей формуле конвективного теплообмена, но в числовом примере мы просто приняли ориентировочные значения $\alpha_1 = \alpha_2 = 50\text{ Вт/ (м}^2\text{К)}$. Степени черноты поверхностей $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$.

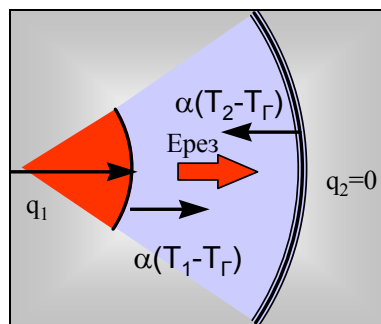


Рис. 22.12. Задача о нагреве газа в кольцевом канале.

Для составления системы уравнений понадобится формула (22.24) и два граничных условия вида (22.30):

$$E_{рез1} = \frac{\sigma(T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \left(\frac{1}{\varepsilon_2} - 1\right)\varphi_{21}}$$

$$q_1 = E_{рез1} + \alpha_1(T_1 - T_{\Gamma})$$

$$0 = E_{рез2} + \alpha_2(T_2 - T_T)$$

$$E_{рез1} 2\pi R_1 = -E_{рез2} 2\pi R_2$$

Результаты численного решения этой нелинейной системы показаны на Рис. 22.13 в форме зависимости температур обеих поверхностей от плотности теплового потока на поверхности нагревателя.

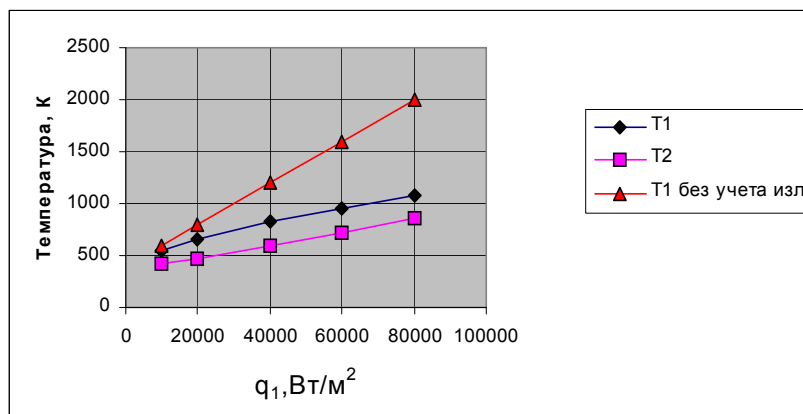


Рис. 22.13. Радиационно–конвективный теплообмен при течении газа в кольцевом канале.

Во–первых, обратите внимание на то, какую большую ошибку при расчете температуры нагревателя мы сделали бы, не учитывая радиационный теплообмен (сравните верхнюю и среднюю линии). На основе такого ошибочного расчета проектировщик был бы вынужден ограничить плотность теплового потока величиной примерно 30000 Вт/м², опасаясь пережога нагревателя. В действительности же, как показывают результаты правильного, с учетом радиации, расчета (см. среднюю кривую), нагреватель сможет работать при вдвое большей плотности теплового потока.

Во–вторых, следует внимательно разобраться в причинах улучшения суммарного радиационно–конвективного теплообмена. Излучение нагревателя повышает температуру внешней поверхности (нижняя кривая), и эта поверхность отдает теплоту газу посредством конвекции. Газ по–прежнему не участвует непосредственно в радиационном теплообмене, будучи прозрачным для теплового излучения.

Задача об экранных поверхностях нагрева

Обычно в камерах сгорания энергетических установок излучение воспринимается рядами труб, расположенными вблизи огнеупорных теплоизолированных стенок. Такие ряды называются экранами (они экранируют стенки камеры сгорания). Внутри труб протекает рабочее тело (теплоноситель), к которому передается в конечном счете результирующий поток излучения от раскаленных газов в камере сгорания (Рис. 22.14).

Использованы следующие обозначения:

1– черная поверхность с заданной температурой T_1 , имитирующая излучение топки,

2– ряд труб с диаметром d и относительным шагом $S=s/d$ и с заданной температурой T_2 ,

3–адиабатическая стенка.

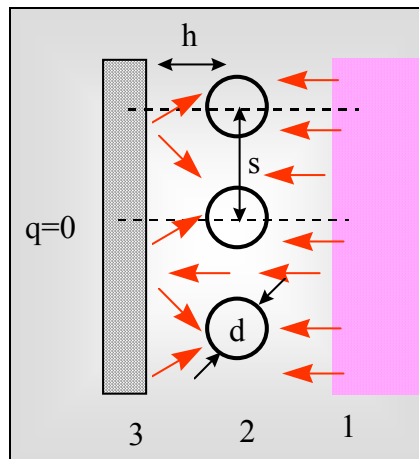


Рис. 22.14. Задача об экранных поверхностях нагрева

Если трубы расположены не слишком тесно и не слишком близко к стенке (практически при $h > 1.5d$, $s > 1.5d$), то излучение поверхности 1 частично попадает на стенку 3 и переизлучается на ряд труб 2, обеспечивая равномерный обогрев по периметру труб.

Целью расчета является определение результирующего потока излучения на поверхности ряда труб 2. Это хороший пример задачи со смешанными граничными условиями.

Найдем прежде всего угловые коэффициенты для рассматриваемой замкнутой системы из трех поверхностей. Эти коэффициенты образуют матрицу 3×3 :

$$\varphi_{ij} = \begin{bmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \varphi_{13} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \varphi_{23} \\ \varphi_{31} & \varphi_{32} & \varphi_{33} \end{bmatrix}.$$

Далее потребуется формула для углового коэффициента излучения плоскости на параллельный ряд труб (этот результат нетрудно получить методом натянутых нитей):

$$\varphi_{12} = 1 + \frac{\arctan(\sqrt{S^2 - 1}) - \sqrt{S^2 - 1}}{S}. \quad (22.33)$$

Остальные коэффициенты находят следующим образом. Так как поверхности 1 и 3 – плоские (невогнутые), то они не излучают на самих себя:

$$\varphi_{11} = 0; \quad \varphi_{33} = 0.$$

Отношение суммарной поверхности труб к экранированной плоской поверхности есть $F_2/F_1 = \pi D/s = \pi/S$.

Угловой коэффициент трубного ряда 2 на плоскости 1 рассчитывают, используя свойство взаимности:

$$\varphi_{21} = \varphi_{12} \frac{F_1}{F_2} = \varphi_{12} \frac{S}{\pi}.$$

Из симметрии системы следует, что $\varphi_{23} = \varphi_{21}$.

Теперь можно применить свойство замкнутости, чтобы рассчитать угловой коэффициент ряда труб на самого себя:

$$\varphi_{21} + \varphi_{22} + \varphi_{23} = 1$$

$$\varphi_{22} = 1 - 2\varphi_{21} = 1 - 2\varphi_{12} \frac{S}{\pi}.$$

Излучение плоскости 1 на плоскость 3 рассчитывается из свойства замкнутости, записанного для поверхности 1:

$$\varphi_{11} + \varphi_{12} + \varphi_{13} = 1; \quad \varphi_{13} = 1 - \varphi_{12}.$$

Аналогично, для плоскости 3 имеем благодаря симметрии системы:

$$\varphi_{31} = \varphi_{13} = 1 - \varphi_{12}; \quad \varphi_{32} = \varphi_{12}.$$

Приведем полученные результаты в форме матрицы:

$$\varphi_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & \varphi_{12} & 1 - \varphi_{12} \\ \frac{S}{\pi} \varphi_{12} & 1 - 2 \frac{S}{\pi} \varphi_{12} & \frac{S}{\pi} \varphi_{12} \\ 1 - \varphi_{12} & \varphi_{12} & 0 \end{bmatrix}.$$

Запишем далее систему уравнений для потоков эффективного излучения. На поверхностях 1 и 2 заданы значения температуры. Для черной поверхности 1 эффективное излучение равно собственному излучению:

$$E\varphi_1 = Eo_1.$$

Для ряда труб:

$$E\varphi_2 = \varepsilon_2 Eo_2 + (1 - \varepsilon_2) \sum_{j=1}^3 E\varphi_j \varphi_{2j}.$$

На поверхности 3 задано значение плотности результирующего потока, равное нулю:

$$0 = E\varphi_3 - \sum_{j=1}^3 E\varphi_j \varphi_{3j}.$$

Три последних соотношения составляют систему линейных уравнений относительно неизвестных значений плотностей эффективных потоков. Решая эту систему методом исключения Гаусса, мы получим аналитические выражения для эффективных потоков, после чего воспользуемся формулой для вычисления искомой плотности результирующего потока на поверхности трубного ряда 2:

$$Eрез_2 = E\varphi_2 - \sum_{j=1}^3 E\varphi_j \varphi_{2j}.$$

Результат будет следующим:

$$Eрез_2 = E\varphi_2 - \sum_{j=1}^3 E\varphi_j \varphi_{2j} = -\frac{S}{\pi} \frac{(E''_1 - E''_2)}{\frac{1}{\varphi_{12}(2 - \varphi_{12})} + \frac{S}{\pi} \left(\frac{1}{\varepsilon_2} - 1 \right)}. \quad (22.34)$$

Эти вычисления проведены с помощью символьного процессора в пакетах Mathcad или Maple.

При практических расчетах предпочитают заменять подсистему 3–2 эквивалентной плоской поверхностью с той же температурой, что и температура трубного ряда, но с некоторой другой, эффективной степенью

черноты. Соотношение площадей истинной поверхности труб и эквивалентной плоскости, как видно из Рис. 22.14, есть:

$$\frac{F_2}{F_{eq}} \equiv \frac{F_2}{F_1} = \frac{F_2}{F_3} = \frac{\pi d}{s} = \frac{\pi}{S}.$$

Площадь эквивалентной поверхности – это просто площадь адиабатической стенки, перед которой установлен экран. Поэтому плотность результирующего излучения на эквивалентной плоскости определится из соотношения:

$$E_{рез_2} F_2 = E_{рез_{eq}} F_{eq}$$

или

$$E_{рез_{eq}} = E_{рез_2} \frac{F_2}{F_{eq}} = E_{рез_2} \frac{\pi}{S}. \quad (22.35)$$

Тогда формулу (22.34) можно переписать для эквивалентной системы «1–Экв» следующим образом:

$$E_{рез_{eq}} = - \frac{(E''_1 - E''_2)}{\frac{1}{\varphi_{12}(2 - \varphi_{12})} + \frac{S}{\pi} \left(\frac{1}{\varepsilon_2} - 1 \right)}. \quad (22.36)$$

Теперь мы сопоставим формулу (22.36) с обычной формулой (22.26), которую используют для расчета теплообмена между плоскостями (напомним, что в нашем примере $\varepsilon_1=1$):

$$E_{рез_{eq}} = -\varepsilon_{eq} (E''_1 - E''_2).$$

Следовательно, эффективная степень черноты эквивалентной плоскости есть:

$$\varepsilon_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{\varphi_{12}(2 - \varphi_{12})} + \frac{S}{\pi} \left(\frac{1}{\varepsilon_2} - 1 \right)}, \quad (22.37)$$

где φ_{12} вычисляется по формуле (22.33).

Итак, окончательные рекомендации для расчета экранов будут следующими. Следует заменить трубный экран плоской поверхностью с такой же температурой, как и на поверхности труб, но с эффективной степенью черноты, рассчитанной по формуле (22.37). После того как рассчитана плотность результирующего потока для эквивалентной плоскости, можно найти истинную плотность теплового потока на стенках труб по формуле (22.35).

Следует подчеркнуть, что основным результатом анализа является соотношение (22.37) для эффективной степени черноты экранированной поверхности. При расчете более сложных конфигураций, чем рассмотренная в примере, экранированные участки заменяются эквивалентной поверхностью с эффективной степенью черноты (22.37) и с той же температурой, что и на поверхности труб.

Задача об орбитальной платформе

Отвод теплоты с целью поддержания необходимого температурного режима *космического аппарата* осуществляется посредством инфракрасного излучения, поскольку другие механизмы переноса – теплопроводность и конвекция – не функционируют в вакууме. Подлежащая сбросу теплота выделяется системой жизнеобеспечения, электронной аппаратурой, энергетической установкой. Аппарат может нагреваться, поглощая солнечную радиацию. При орбитальном полете в общем балансе могут быть существенны также потоки собственного и отраженного излучения планеты.

Для сброса теплоты в космос применяются *радиаторы* – пластинчатые конструкции, с поверхности которых происходит излучение в пространство. Вдоль пластинчатых элементов радиатора теплота транспортируется теплопроводностью.

Приведем в качестве примера данные для американской космической системы Аполло. Внутреннее тепловыделение аппарата оценивалось в 2500 Вт, причем из них 900 Вт было необходимо отводить из кабины экипажа при температуре примерно 280 К, а остальные 1600 Вт – от аппаратуры при температуре 322 К. Исследовалась работа радиаторов на земной орбите, в открытом космосе, на лунной орбите и на лунной поверхности. Выяснилось, например, что на лунной поверхности необходимы дополнительные экраны или требуется специальный выбор места посадки вне экстремальных по радиационным условиям областей.

Элементарную оценку необходимой поверхности радиатора *Area* получают, приравнявая внутреннее тепловыделение собственному излучению радиатора:

$$Area = \frac{\overbrace{W}^{\text{Тепловыделение, Вт}}}{\underbrace{\varepsilon \sigma T_{\text{radiator}}^4}_{\text{Плотность собственного излучения радиатора}}}.$$

Расчет дает явно заниженные значения поверхности *Area*, и целью рассматриваемого далее учебного проекта является разработка более полной модели (Рис. 22.15), учитывающей:

- Внутреннее тепловыделение
- Поглощение солнечного излучения

- Собственное излучение в космос
- Распространение теплоты по элементам конструкции радиатора посредством теплопроводности
- Нестационарность теплового режима

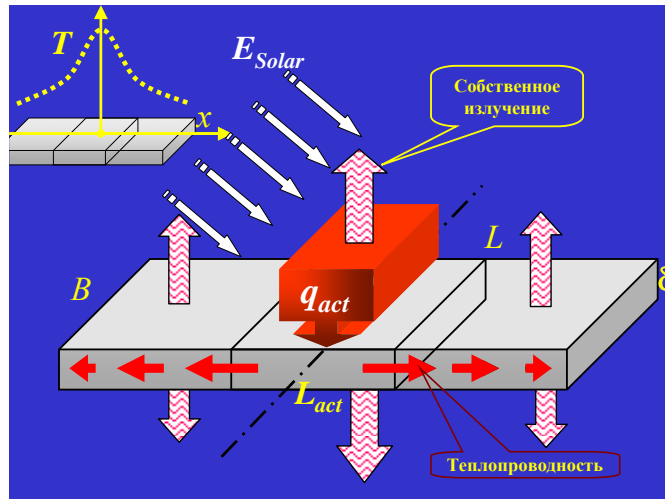


Рис. 22.15. Тепловая схема орбитальной платформы

Геометрия платформы принята предельно простой – это пластина ($L \cdot B$) с активной центральной частью L_{act} и боковыми панелями – радиаторами. Предполагается, что в центральной (активной) части платформы имеется тепловыделение, обусловленное функционированием энергетической установки, электронной аппаратуры, системы жизнеобеспечения. Теплота передается вдоль пластины посредством теплопроводности и поступает в пассивную часть, выполняющую функцию дополнительного излучателя – радиатора.

Плотность потока солнечного излучения на орбите Земли E_{Solar} (т.н. солнечная постоянная) составляет 1370 Вт/м^2 . Ориентация платформы задается углом ψ между ее нормалью и направлением на Солнце. При $\psi = 0$ вклад солнечного излучения в тепловой баланс платформы будет максимальным, а при $\psi = \pi/2$ – нулевым.

Плотность собственного излучения платформы определяется как функция локальной температуры:

$$q_{s_emission} = -\epsilon\sigma T(x, \tau)^4, \quad (38)$$

где $\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8} \text{ Вт/м}^2\text{К}^4$ – постоянная Стефана–Больцмана. Обратным тепловым излучением космоса пренебрегают, поскольку его температура близка к абсолютному нулю.

Принципиальное значение имеют радиационные свойства поверхности. Специальное покрытие из оксида титана или оксида магния обеспечивает следующее распределение спектральной степени черноты $\varepsilon_\lambda(\lambda)$ по длине волны излучения (для умеренных значений температуры):

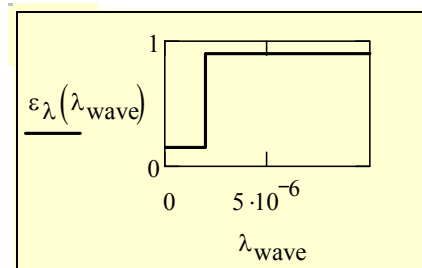


Рис. 22.16. Спектральная степень черноты платформы

Для операций с высокотемпературным коротковолновым солнечным излучением следует использовать значение коэффициента поглощения

$$A = \varepsilon_\lambda \Big|_{\lambda < 2 \text{ мкм}} = 0.15 ,$$

а для низкотемпературного длинноволнового (инфракрасного) излучения платформы – степень черноты

$$\varepsilon = \varepsilon_\lambda \Big|_{\lambda > 2 \text{ мкм}} = 0.9 .$$

Благодаря этим замечательным свойствам покрытия удастся значительно снизить температуру радиационных поверхностей.

Если внешние радиационные условия и внутреннее тепловыделение фиксированы, то устанавливается тепловое равновесие: поглощенное солнечное излучение и внутреннее тепловыделение будут уравниваться собственным излучением платформы в космос. Равновесная температура переменна вдоль платформы, поскольку теплота преимущественно выделяется в центральной (активной) части платформы и распространяется теплопроводностью вдоль радиатора.

Если ориентация платформы или режимы работы оборудования изменяются, то возникают нестационарные (переходные) тепловые процессы, исследование которых, как показывает ссылка на проект Apollo, так же актуально, как и расчет стационарного режима.

Таким образом, предметом анализа является пространственно-временное распределение температуры $T(x, \tau)$ орбитальной платформы.

Поставленная задача решается в Лабораторной работе «Численное моделирование температурных полей радиационных поверхностей»:

..\Labs_HMT\Lab_Orbital_Platform\Lab_Orbital_Platform.pdf

К компьютерной модели можно обратиться по ссылке:

..\Labs_HMT\Lab_Orbital_Platform\OrbitalPlatform_pdesolve_mc14.xmcdz

Здесь мы приведем только ядро вычислительной программы (Рис. 22.17). Дифференциальное уравнение теплопроводности включает источниковый член, содержащий излучение платформы в космос, поглощение солнечного излучения и тепловыделение в активной зоне. Нестационарное температурное поле платформы рассчитывается методом Pdesolve.

Pdesolve Method

Given **Дифференциальное уравнение теплопроводности**

$$T_{\tau}(x, \tau) = a \cdot T_{xx}(x, \tau) + \left(\frac{-q_{s_emission}(T(x, \tau))}{\lambda} \cdot uDf \cdot a + \frac{q_{s_absorb}}{\lambda} \cdot \frac{uDf}{2} \cdot a + \frac{q_{s_act}(x)}{\lambda} \cdot \frac{uDf}{2} \cdot a \right)$$

$T(x, 0) = T_{init}$ << Начальное условие

$T_x(0, \tau) = 0$ $T_x\left(\frac{L}{2}, \tau\right) = 0$ << **Граничное условие при $x=0$ и при $x=L/2$**

$T := Pdesolve \left(T, x, \left(\frac{0}{2} \right), \tau, \left(\frac{0}{\tau_{Max}} \right), nX, nTime \right)$ << Численное интегрирование

Polynomial !!!

Рис. 22.17. Расчет температурного поля платформы

Полное пространственно-временное представление процесса установления температурного режима дается трехмерным графиком на Рис. 22.18. По вертикальной оси откладывается температура, а в горизонтальной плоскости – координата Coordinate вдоль пластины (вдоль платформы) и время Time. В основании графика показано стилизованное изображение платформы.

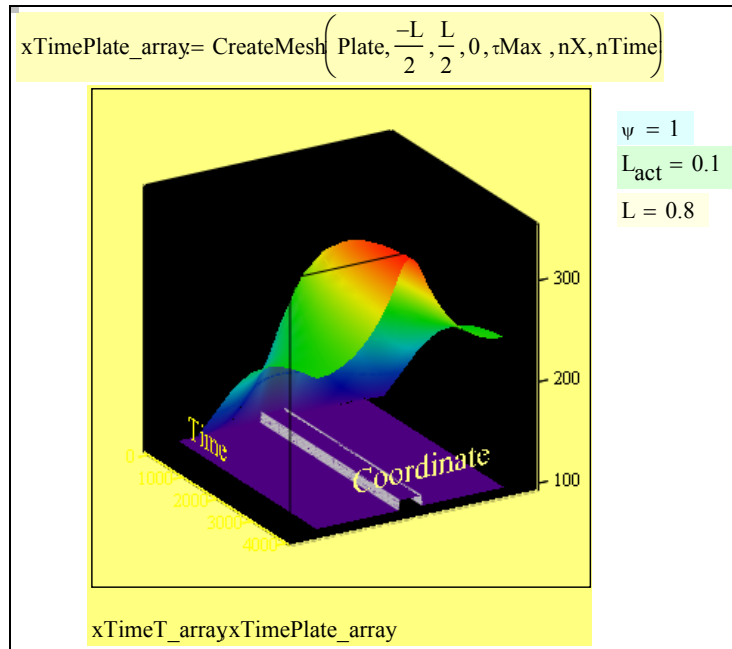


Рис. 22.18. Пространственно-временная диаграмма изменения температуры платформы

Динамическую, развернутую по времени картину температурного поля платформы получают с помощью анимации:

..\Avi_HMT\Avi_Orbital_Platform.avi