

2 Законы сохранения. Дифференциальные уравнения теплообмена

2.1 Общая форма балансового уравнения

Из элементарных процессов переноса, описанных в предыдущей главе, складывается следующая общая картина теплообмена (Рис. 2.1):

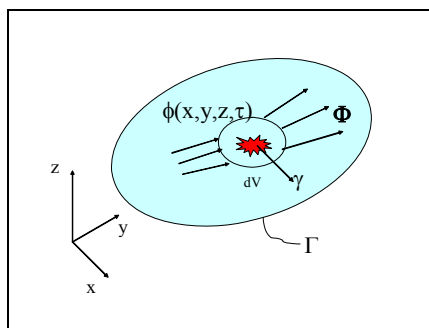


Рис. 2.1. К формулировке обобщенного уравнения сохранения.

Рассматривается область, отделенная границей Γ от окружающей среды и заполненная движущейся со скоростью $\mathbf{w}(x, y, z, \tau)$ двухкомпонентной жидкостью с переменной температурой $t(x, y, z, \tau)$ и концентрацией $c_1(x, y, z, \tau)$.

Неоднородность полей температуры и концентрации вынуждает появление кондуктивных потоков тепловой энергии и массы компонентов – векторных полей $\mathbf{q}(x, y, z, \tau)$ и $\mathbf{j}_{1, \text{conduct}}(x, y, z, \tau)$.

Перемещение жидкости в пространстве обеспечивает конвективный перенос экстенсивных (связанных с массой вещества) величин, таких как энтальпия, масса компонента смеси. При этом формируются векторные поля конвективных потоков $\rho \mathbf{w}h$, $\rho_1 \mathbf{w}$. Жидкость движется под действием давления и вязких напряжений, а также массовых сил (таких как гравитация).

На границе области происходит взаимодействие с окружающей средой, которое должно быть описано *граничными условиями*. Например, через границу могут проходить потоки вещества и энергии. На практике граница Γ чаще всего отделяет элементы конструкций (твердые тела) от обтекающих их потоков газов или жидкостей (теплоносителей).

В общем случае система эволюционирует, развивается во времени из некоторого начального состояния, которое должно быть определено *начальными условиями*.

Перечислим переменные, которые должны быть найдены в процессе решения задачи.

- Температура: $t(x,y,z,\tau)$
- Концентрация: $c_1(x,y,z,\tau)$
- Давление: $p(x,y,z,\tau)$
- Скорость: $w(x,y,z,\tau)$

Если поля указанных величин определены, можно рассчитать также поля потоков энергии и вещества, применяя формулировки *законов переноса*, рассмотренные в предыдущей главе. Мы намереваемся далее использовать фундаментальные *законы сохранения массы, импульса, энергии* с целью получить замкнутое математическое описание, связывающие перечисленные выше искомые величины.

Выделим в окрестности какой-либо внутренней точки дифференциально малый *фиксированный в пространстве* контрольный объем dV . Наблюдая во времени за переменными состояниями контрольного объема, мы обнаружим, вообще говоря, изменение значений t, c_1, p, w . Например, может увеличиться температура, и это означает, что увеличилась внутренняя энергия в контрольном объеме.

Имеется две возможных причины таких изменений. Во-первых, *через поверхность* контрольного объема проходят потоки энергии (вещества, импульса). Во-вторых, *внутри объема* могут действовать внутренние источники или стоки (например, тепловая энергия может «порождаться» в процессе ядерных превращений в энергетическом атомном реакторе, или поглощаться при эндотермической химической реакции).

Балансовое уравнение, или уравнение сохранения, представляющее сказанное в компактной универсальной форме, записывается для единичного контрольного объема следующим образом:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \tau} = -\text{div}(\Phi) + \gamma \quad (2.1)$$

Согласно (2.1), увеличение содержания какой-либо экстенсивной величины в контрольном объеме (левая часть) является следствием притока через его поверхность (первое слагаемое в правой части) и действия внутреннего источника (второе слагаемое).

В уравнении (2.1):

■ φ - плотность некоторой экстенсивной величины, т.е. ее содержание в единице контрольного объема, $[\varphi] = (*) / \text{м}^3$

■ Φ - плотность потока этой величины, включающая кондуктивную и конвективную составляющие, $[\Phi] = (*) / (\text{м}^2\text{с})$

■ γ - мощность внутреннего источника, т. е. производство в единице объема за единицу времени, $[\gamma] = (*) / (\text{м}^3\text{с})$

Звездочка в формулах размерности заменяет конкретную размерность переносимой экстенсивной величины (массы «кг», энергии «Дж», импульса «кг·м/с»).

Подчеркнем, что контрольный объем фиксирован в пространстве, т.е. фиксированы его координаты (x, y, z) и размер. Именно поэтому мы используем частную производную по времени для описания скорости увеличения содержания (левая часть уравнения (2.1)) и имеем возможность отнести все изменения к единице объема.

Поясним смысл первого слагаемого в правой части балансового уравнения. Согласно определению, дивергенция есть суммарный поток вектора через замкнутую поверхность дифференциально малого контрольного объема, отнесенный к единице объема и направленный наружу. Это как раз то, что необходимо, за исключением направления – мы рассчитываем приток в контрольный объем, поэтому необходим знак минус.

Если просуммировать балансы (2.1) для конечного фиксированного в пространстве объема V , то получится уравнение сохранения в интегральной форме:

$$\begin{aligned} \int_V \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} dV &= - \int_V \operatorname{div}(\Phi) dV + \int_V \gamma dV \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{d}{d\tau} \int_V \varphi dV &= - \int_{F_\Gamma} (\Phi \cdot \mathbf{n}_\Gamma) dF_\Gamma + \int_V \gamma dV, \end{aligned} \quad (2.2)$$

где \mathbf{n}_Γ – единичный вектор *внешней* нормали к граничной поверхности F_Γ . Согласно (2.2), приращение какой-либо величины φ в рассматриваемом объеме (левая часть) является следствием притока через его поверхность (первое слагаемое в правой части) и действия внутреннего источника (второе слагаемое). Ясно, почему при интегрировании оператора дивергенции получился поверхностный интеграл. На *внутренних* границах соседних элементарных объемов dV поток Φ суммируется два раза с разными знаками, т.е. сокращается. Поэтому остается только поток через границу области F_Γ , как и записано в (2.2).

Структура балансового соотношения (2.1) – с оператором дивергенции от потока Φ сохраняемой величины φ в правой части – остается одинаковой как для элементарного объема, так и для конечных частей объекта. Такую форму записи называют *дивергентной* или *консервативной*.

Нам остается далее наполнить универсальную форму (2.1) конкретным содержанием. Полезно предварительно просмотреть выражения для потоков массы, импульса, энергии, полученные ранее в гл.1 Электронного курса (см. [Chapt_1_Transport_Laws.pdf](#))

2.2 Закон сохранения массы. Уравнение неразрывности.

В этом случае

$$\varphi \equiv \rho; \quad \Phi \equiv \rho \mathbf{w}; \quad \gamma \equiv 0.$$

Напомним, что скорость жидкости можно интерпретировать как объемный расход через единичную контрольную поверхность. Тогда произведение скорости на плотность даст плотность потока массы $\rho \mathbf{w}$. Внутренние источники отсутствуют, так как масса, конечно, сохраняется.

После соответствующих подстановок в (2.1) получают **уравнение неразрывности**:

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} = -\operatorname{div}(\rho \mathbf{w}). \quad (2.3)$$

Для несжимаемых жидкостей (и для газов при скоростях не выше примерно трети скорости звука) плотность практически постоянна. Поэтому уравнение неразрывности можно записать приближенно в более простом виде:

$$\operatorname{div}(\rho \mathbf{w}) = 0 \quad \text{или} \quad \operatorname{div}(\mathbf{w}) = 0. \quad (2.4)$$

2.3 Закон сохранения 1-компонента. Уравнение конвективной диффузии

В этом случае

$$\Phi \equiv \rho_1 = \rho c_1; \quad \mathbf{\Phi} \equiv \mathbf{j}_{1, \text{conduct}} + \rho_1 \mathbf{w} \equiv \mathbf{j}_{1, \text{conduct}} + \rho \mathbf{w} c_1; \quad \gamma \equiv 0.$$

Предполагается, что химических реакций в объеме среды не происходит, поэтому источник массы считается нулевым.

После подстановки этих выражений в универсальную форму балансового соотношения (2.1) получают уравнение сохранения (баланса) компонента смеси:

$$\frac{\partial(\rho c_1)}{\partial \tau} = -\operatorname{div}(\mathbf{j}_{1, \text{conduct}} + \rho \mathbf{w} c_1), \quad (2.5)$$

согласно которому увеличение содержания рассматриваемого компонента в контрольном объеме происходит вследствие притока массы этого компонента через поверхность контрольного объема; потоки массы обусловлены диффузией и конвективным переносом.

Кондуктивный (диффузионный) поток массы законом диффузии Фика:

$$\mathbf{j}_{1, \text{conduct}} = -\rho D \operatorname{grad} c_1,$$

подстановка которого в уравнение баланса (2.5) приводит к **дифференциальному уравнению конвективной диффузии**:

$$\frac{\partial(\rho c_1)}{\partial \tau} = -\operatorname{div}(-\rho D \operatorname{grad} c_1 + \rho \mathbf{w} c_1). \quad (2.6)$$

Это уравнение является определяющим для расчета поля концентрации c_1 . Концентрация второго компонента двухкомпонентной смеси легко вычисляется через c_1 : $c_2 = 1 - c_1$.

Отметим, что мы ввели существенное ограничение, отказавшись от химических реакций в объеме среды. Однако в общем курсе тепломассообмена не предусмотрено подробное рассмотрение таких сложных процессов. С другой стороны, во многих случаях на практике химические реакции происходят на поверхностях раздела (на стенках). Это так называемые каталитические реакции. Их скорость контролируется подводом необходимых компонентов из газовой фазы посредством диффузионных процессов. Такие задачи можно решать в принятой нами постановке (см. (2.6)), как и очень широкий круг проблем, связанных с распространением пассивных примесей, испарением и конденсацией парогазовых смесей и т.д.

Уравнение (2.6) можно записать в явной форме относительно концентрации. Для этого следует раскрыть дифференциальные операции для произведения двух функций $(\rho \cdot c_1)$ и $(\rho \mathbf{w} \cdot c_1)$, как показано ниже, и привлечь уравнение неразрывности (2.3):

$$\rho \frac{\partial(c_1)}{\partial \tau} + c_1 \frac{\partial(\rho)}{\partial \tau} = -\operatorname{div}(\mathbf{j}_{1,c}) - \{\rho \mathbf{w} \cdot \operatorname{grad} c_1 - c_1 \cdot \operatorname{div}(\rho \mathbf{w})\}.$$

В левой и правой частях присутствует уравнение неразрывности (2.3), умноженное на c_1 . Сокращая, получим:

$$\rho \frac{\partial c_1}{\partial \tau} = -\operatorname{div}(-\rho D \operatorname{grad} c_1) - \rho \mathbf{w} \cdot \operatorname{grad} c_1. \quad (2.7)$$

Явная форма может быть удобной для анализа. Но это *неконсервативная* форма записи, в отличие от (2.6), поскольку оператор конвективного переноса (второй в правой части) не является дивергенцией. Различие форм представления может быть существенным в рамках приближенного численного анализа. В общем, предпочитают консервативность, т.е. такие схемы, для которых законы сохранения выполняются строго, несмотря на то, что поля величин, таких как температура или концентрация, рассчитываются только приближенно.

2.4 Закон сохранения энергии. Уравнение энергии.

Вообще говоря, мы должны были бы здесь записать закон сохранения полной энергии, включающей *внутреннюю* и *кинетическую* энергию, и учесть перенос энергии не только в форме теплоты, но и в форме работы.

Однако, принимая во внимание реальные условия, в которых происходит тепломассообмен в большинстве теплообменных и теплотехнологических установок, а также в природе, можно ввести ряд вполне оправданных упрощений. При обычных, относительно малых скоростях потока (меньших

примерно трети скорости звука) вклад *кинетической* энергии в баланс энергии оказывается пренебрежимо малым. Поскольку при таких скоростях перепады давления в потоке малы по сравнению с самим значением давления, то в термодинамическом смысле можно считать процесс теплообмена происходящим *при постоянном давлении*. Как известно, для изобарических процессов теплота, подведенная к системе, расходуется на увеличение энтальпии. Поэтому мы запишем балансовое соотношение (2.1) для *энтальпии* двухкомпонентной среды, сделав подстановки:

$$\varphi \equiv \rho h; \quad \Phi \equiv \mathbf{q} + \rho \mathbf{w} h; \quad \gamma \equiv q_V.$$

Согласно получившемуся уравнению (2.8) :

$$\frac{\partial(\rho h)}{\partial \tau} = -\operatorname{div}(\mathbf{q} + \rho \mathbf{w} h) + q_V, \quad (2.8)$$

увеличение энтальпии в единичном контрольном объеме происходит за счет кондуктивного потока энергии \mathbf{q} и конвективного переноса энтальпии через поверхность контрольного объема, а также вследствие действия внутреннего источника тепла.

Для кондуктивного потока энергии (теплового потока) используется выражение (см. [Chapt_1_Transport_Laws.pdf](#)):

$$\mathbf{q} = -\lambda \operatorname{grad} t + \mathbf{j}_{1, \text{conduct}}(h_1 - h_2).$$

Кондуктивный поток массы определяется законом Фика:

$$\mathbf{j}_{1, \text{conduct}} = -\rho D \operatorname{grad} c_1.$$

После подстановки этих выражений в (2.1) получают **дифференциальное уравнение энергии**:

$$\frac{\partial(\rho h)}{\partial \tau} = -\operatorname{div}(-\lambda \operatorname{grad} t - \rho D(h_1 - h_2) \operatorname{grad} c_1 + \rho \mathbf{w} h) + q_V. \quad (2.9)$$

Это уравнение является определяющим для расчета температурного поля. Отметим, что необходимы дополнительные термодинамические соотношения, устанавливающие зависимость энтальпии от температуры и концентрации.

Уравнение энергии в явной форме относительно температуры

Проведем дополнительные преобразования уравнения (2.9) с целью перейти к явной форме относительно температуры. Раскроем операцию дифференцирования в левой части и дивергенции – в правой:

$$\rho \frac{\partial h}{\partial \tau} + h \frac{\partial \rho}{\partial \tau} = -\operatorname{div}(-\lambda \operatorname{grad} t - \rho D(h_1 - h_2) \operatorname{grad} c_1) + q_V - h \cdot \operatorname{div}(\rho \mathbf{w}) - \rho \mathbf{w} \cdot \operatorname{grad} h$$

Сокращая в левой и правой частях уравнение неразрывности (2.3), умноженное на h , получим:

$$\rho \frac{\partial h}{\partial \tau} = -\operatorname{div}(-\lambda \operatorname{grad} t - \rho D(h_1 - h_2) \operatorname{grad} c_1) + q_V - \rho \mathbf{w} \cdot \operatorname{grad} h \quad (2.10)$$

Учтем теперь, что энтальпия смеси h зависит от температуры и концентрации компонентов $h(t, c_1, c_2)$, и продифференцируем h как сложную функцию от времени:

$$\rho \frac{\partial h}{\partial \tau} = \rho \left\{ \frac{\partial h}{\partial t} \Big|_{p, c_1, c_2} \frac{\partial t}{\partial \tau} + \frac{\partial h}{\partial c_1} \Big|_{T, p, c_2} \frac{\partial c_1}{\partial \tau} + \frac{\partial h}{\partial c_2} \Big|_{T, p, c_1} \frac{\partial c_2}{\partial \tau} \right\}$$

Это выражение для изменения энтальпии оправдано применительно к идеальным газам или несжимаемым средам, когда изменением энтальпии в зависимости от давления можно пренебречь, а также для теплообменников, в которых скорость потока и *перепады* давления обычно относительно невелики.

Согласно известным термодинамическим соотношениям

$$\frac{\partial h}{\partial t} \Big|_{p, c_1, c_2} = c_p; \quad \frac{\partial h}{\partial c_1} \Big|_{T, p, c_2} = h_1; \quad \frac{\partial h}{\partial c_2} \Big|_{T, p, c_1} = h_2, \quad (2.11)$$

где c_p – теплоемкость смеси, h_1, h_2 – парциальные энтальпии компонентов. Учитывая, что $c_2 = 1 - c_1$, получим для левой части:

$$\rho \frac{\partial h}{\partial \tau} = \rho \left\{ c_p \frac{\partial t}{\partial \tau} + (h_1 - h_2) \frac{\partial c_1}{\partial \tau} \right\}$$

Аналогично преобразуется $\operatorname{grad} h$ в правой части уравнения:

$$\operatorname{grad} h = c_p \operatorname{grad} t + (h_1 - h_2) \operatorname{grad} c_1$$

Теперь уравнение энергии (2.10) запишется в виде:

$$\rho c_p \frac{\partial t}{\partial \tau} + (h_1 - h_2) \rho \frac{\partial c_1}{\partial \tau} = -\operatorname{div}(-\lambda \operatorname{grad} t - \rho D(h_1 - h_2) \operatorname{grad} c_1) + q_V - \rho \mathbf{w} \cdot (c_p \operatorname{grad} t + (h_1 - h_2) \operatorname{grad} c_1),$$

где в левой и правой части взаимно сокращаются операторы уравнения (2.7), домноженные на $(h_1 - h_2)$. Окончательно получаем уравнение для температуры в следующей форме:

$$\rho c_p \frac{\partial t}{\partial \tau} = -\operatorname{div}(-\lambda \operatorname{grad} t) - \rho c_p \mathbf{w} \cdot \operatorname{grad} t + q_V + \rho D \operatorname{grad} c_1 \cdot \operatorname{grad}(h_1 - h_2) \quad (2.12)$$

Для теплообмена, не осложненного диффузией, то есть при $c_1 = 0$ или $c_1 = \text{const}$:

$$\rho c_p \frac{\partial t}{\partial \tau} = -\operatorname{div}(-\lambda \operatorname{grad} t) - \rho c_p \mathbf{w} \cdot \operatorname{grad} t + q_V \quad (2.13)$$

Если отключить механизм конвективного переноса, т.е. считать нулевым поле скорости в системе координат, связанной с объектом, то получится *дифференциальное уравнение теплопроводности*:

$$\rho c_p \frac{\partial t}{\partial \tau} = -\operatorname{div}(-\lambda \operatorname{grad} t) + q_V \quad (2.14)$$

Это уравнение применяют для расчета температурных полей в твердых телах, а также жидких или газообразных средах, если в них гарантированно отсутствует перемешивание. Согласно (2.14), увеличение энтальпии в единичном контрольном объеме (левая часть) происходит за счет кондуктивного потока энергии (т.е. за счет теплопроводности) через поверхность контрольного объема (первый оператор справа), а также вследствие действия внутреннего источника тепла (второй оператор справа).

Замечание о радиационном переносе. Дополнительно к механизму теплопроводности в уравнении (2.13) следует, в общем случае, учитывать перенос энергии \mathbf{q}_R посредством электромагнитного излучения (теплообмен излучением, радиационный теплообмен), т.е. в правой части (2.13) должен появиться дополнительный оператор $(-\operatorname{div}(\mathbf{q}_R))$.

Когда говорят о *тепловом* излучении, предполагают, что поглощение электромагнитного излучения в некотором диапазоне длин волн приводит к изменению теплового состояния тела, точно так же как и испускание электромагнитных волн определяется тепловым состоянием (температурой) тела. Согласно закону Планка, максимум на спектре теплового излучения при обычных для теплоэнергетики температурах находится в области видимых и инфракрасных волн. Поэтому указанный диапазон электромагнитных волн принято в технике относить к тепловому излучению.

Имеется два предельных случая, когда радиационные потоки можно не включать в уравнение (2.13). Во-первых, это случай прозрачной среды (например, сухого воздуха), когда излучение практически не поглощается в объемах среды и не излучается этими объемами. Следовательно, потоки входящего в контрольный объем и покидающего его излучения должны быть одинаковыми, т.е. $\operatorname{div}(\mathbf{q}_R) = 0$. Во-вторых, это случай полностью непрозрачной для излучения среды (например, металла), когда просто $\mathbf{q}_R = 0$.

Мы ограничимся здесь этими общими замечаниями. Так называемый сложный теплообмен (комбинированный перенос энергии с участием

теплопроводности, конвекции и излучения) является предметом специальных разделов учебного курса.

2.5 Закон сохранения импульса. Уравнение движения.

Идентифицируем переменные ϕ , Φ , γ в обобщенном уравнении сохранения (2.1) для гидродинамической задачи. Импульс ϕ единичного контрольного объема есть произведение его массы (т.е. плотности жидкости) на скорость:

$$\phi \equiv \rho \mathbf{w}, \text{ (кг м/с)/м}^3.$$

Плотность потока импульса Φ определяется действием сил давления, вязких напряжений и конвективным переносом импульса, поэтому:

$$\Phi \equiv p\mathbf{I} - \boldsymbol{\sigma}' + \rho \mathbf{w} \mathbf{w}, \text{ (кг м/с)/(м}^2\text{с)}.$$

Порождение γ импульса внутри контрольного объема является результатом действия внешних сил, таких как сила гравитации или электромагнитные силы при течении проводящей жидкости в магнитном поле. Ограничимся учетом гравитационных эффектов, как наиболее важных на практике. Сила гравитации, действующая на единичный объем (т.е. вес), есть произведение плотности на ускорение силы тяжести:

$$\gamma = \rho \mathbf{g}, \text{ (кг м/с)/(м}^3\text{с)}.$$

Итак, обобщенные величины в случае переноса импульса записываются следующим образом:

$$\phi \equiv \rho \mathbf{w}; \quad \Phi \equiv p\mathbf{I} - \boldsymbol{\sigma}' + \rho \mathbf{w} \mathbf{w}; \quad \gamma \equiv \rho \mathbf{g}.$$

После подстановки этих выражений в универсальную форму (2.1), получают уравнение сохранения импульса:

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{w})}{\partial \tau} = -\mathbf{div}(p\mathbf{I} - \boldsymbol{\sigma}' + \rho \mathbf{w} \mathbf{w}) + \rho \mathbf{g}, \quad (2.15)$$

или, после вычисления дивергенции от тензора давления $p\mathbf{I}$,

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{w})}{\partial \tau} = -\mathbf{grad} p - \mathbf{div}(-\boldsymbol{\sigma}' + \rho \mathbf{w} \mathbf{w}) + \rho \mathbf{g}. \quad (2.16)$$

При подстановке в уравнение сохранения импульса (2.16) закона вязкого трения Стокса (см. [Chapt 1 Transport Laws.pdf](#)):

$$\boldsymbol{\sigma}' = \mu(\mathbf{grad} \mathbf{w} + (\mathbf{grad} \mathbf{w})^T) - \frac{2}{3}\mu(\mathbf{div} \mathbf{w})\mathbf{I},$$

получится **дифференциальное уравнение движения** вязкой жидкости – определяющее уравнение для векторного поля скорости.

Если поле температуры $t(x,y,z)$ в жидкости неравномерное, то и распределение плотности $\rho(t)$ будет неравномерным. Можно представить себе, что более нагретые объемы погружены в холодную и потому более плотную жидкость. Если система находится в поле силы тяжести, то в результате возникнут Архимедовы силы, вызывающие движение, даже если в системе нет перекачивающих насосов. Такие процессы называются *естественной* конвекцией, в противоположность *вынужденной* конвекции, когда движение вынуждается внешними источниками. Различие плотностей может быть вызвано переменностью температуры и (или) концентрации смеси в пространстве. Соответственно говорят о *термо-гравитационной* и *концентрационно-гравитационной конвекции*. Для задач с заметным влиянием свободной конвекции предпочитают при записи уравнения движения (2.16) учесть Архимедовы силы в явном виде, как показано далее.

Пример свободноконвективного течения представлен на Рис. 2.2. Нагревательный элемент в виде горизонтальной трубки помещен в вертикальный канал. Движение жидкости представлено векторным полем скорости, поле температур – изотермами и цветом (или градациями серого на черно-белом изображении). Вблизи стенки жидкость горячая (показана теплыми оттенками цвета), вдали – остается холодной.

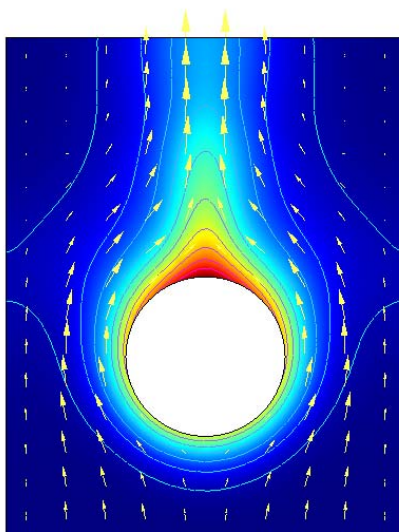


Рис. 2.2. Свободная конвекция вблизи обогреваемой горизонтальной трубы

Анимация

[..\Avi HMT\Avi free conv trans qW 1000 Noslip.wmv](#)

показывает формирование свободноконвективного течения во времени. Мы включаем нагреватель и наблюдаем, как прогревается жидкость вблизи стенки, как возникает и усиливается подъемное движение жидкости под действием Архимедовых сил.

Формализуем эти наблюдения следующим образом. Пусть контрольный объем с плотностью $\rho(t)$ погружен в окружающую жидкость с отличающейся плотностью (ρ_∞). Тогда возникает Архимедова сила, «равная весу вытесненной жидкости»: $(-\rho_\infty \mathbf{g})$. Результирующая этих двух сил называется *выталкивающей силой*. Мы добавляем в правую часть (2.16) слагаемое $(-\rho_\infty \mathbf{g})$ и объединяем с силой тяжести ($\rho \mathbf{g}$); следует одновременно вычесть такую же величину, чтобы не внести ошибки в правую часть:

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{w})}{\partial \tau} = -\text{grad } p - \mathbf{div}(-\boldsymbol{\sigma}' + \rho \mathbf{w} \mathbf{w}) + (\rho - \rho_\infty) \mathbf{g} + \rho_\infty \mathbf{g}. \quad (2.17)$$

Применим теперь это уравнение для области, где плотность постоянна $\rho = \rho_\infty$ и движение отсутствует или поле скоростей однородное, $\mathbf{w} = \text{const}$, так что не остается никаких сил в потоке, кроме гидростатического давления и гравитации:

$$0 = -\text{grad } p_{hs} + \rho_\infty \mathbf{g} \Rightarrow \rho_\infty \mathbf{g} = \text{grad } p_{hs},$$

т.е. величина $(\rho_\infty \mathbf{g})$ определяет поле *гидростатического* давления p_{hs} . Делая в (2.17) соответствующую подстановку вместо последнего слагаемого $(\rho_\infty \mathbf{g})$ в правой части, объединяя градиенты давления и обозначая $p - p_{hs} \equiv p_m$, получим формулировку уравнения движения жидкости с выталкивающей силой:

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{w})}{\partial \tau} = -\text{grad } p_m - \mathbf{div}(-\boldsymbol{\sigma}' + \rho \mathbf{w} \mathbf{w}) + (\rho - \rho_\infty) \mathbf{g}. \quad (2.18)$$

Давление p_m называют движущим (motive, англ.) давлением. Оно связано с ускорением, силами вязкости и выталкивающей силой. В неподвижной и однородной среде градиент этого давления нулевой. Если же жидкость неподвижна, например, в начальный момент времени, но распределение плотности стало неравномерным при включении нагревателя, то возникает ненулевой градиент

$$\text{grad } p_m = (\rho - \rho_\infty) \mathbf{g},$$

под действием которого и начнет развиваться свободноконвективное течение. Анимацию такого развивающегося свободноконвективного течения можно посмотреть по ссылке

[..\Avi\HMT\FreeConv_Tube_Channel_dT_animate.wmv.](#)

Картина получена при численном интегрировании выведенных в этом разделе уравнений неразрывности, энергии и движения.

2.6 Система дифференциальных уравнений конвективного теплообмена.

Приведем сводку полученных выше дифференциальных уравнений теплообмена.

Уравнение неразрывности:

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} = -\operatorname{div}(\rho \mathbf{w}). \quad (2.19)$$

Уравнение конвективной диффузии:

$$\frac{\partial(\rho c_1)}{\partial \tau} = -\operatorname{div}(-\rho D \operatorname{grad} c_1 + \rho \mathbf{w} c_1). \quad (2.20)$$

Уравнение энергии:

$$\frac{\partial(\rho h)}{\partial \tau} = -\operatorname{div}(-\lambda \operatorname{grad} t - \rho D(h_1 - h_2) \operatorname{grad} c_1 + \rho \mathbf{w} h) + q_V. \quad (2.21)$$

Уравнение движения:

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{w})}{\partial \tau} = -\operatorname{div}(p_m \mathbf{I} - \boldsymbol{\sigma}' + \rho \mathbf{w} \mathbf{w}) + (\rho - \rho_\infty) \mathbf{g}. \quad (2.22)$$

где

$$\boldsymbol{\sigma}' = \mu(\operatorname{grad} \mathbf{w} + (\operatorname{grad} \mathbf{w})^T) - \frac{2}{3} \mu(\operatorname{div} \mathbf{w}) \mathbf{I}.$$

Число неизвестных, а это 1) температура $t(x, y, z, \tau)$, 2) концентрация $c_1(x, y, z, \tau)$, 3) давление $p(x, y, z, \tau)$ и 4) скорость $\mathbf{w}(x, y, z, \tau)$, равно числу уравнений, и в этом смысле получено замкнутое описание задачи конвективного теплообмена.

2.7 Термодинамические соотношения и свойства теплоносителей

Величины (t, c_1, p, \mathbf{w}) составляют набор параметров, полностью определяющих состояние рассматриваемой нами системы (Рис. 2.1). Мы стремимся к тому, чтобы посредством интегрирования уравнений (2.19)–(2.22) найти поля этих величин.

Кроме (t, c_1, p, \mathbf{w}) , уравнения содержат и другие величины – плотность и энтальпию, коэффициенты теплопроводности, диффузии, вязкости. Поэтому необходимы дополнительные соотношения, устанавливающие их связь с основным набором переменных.

В число этих соотношений входят, прежде всего, термодинамические уравнения состояния:

$$\rho = \rho(T, p, c_1) \quad (\text{термическое})$$

$$h = h(T, p, c_1) \quad (\text{калорическое}).$$

Например, для идеально-газовой смеси:

$$\frac{p}{\rho} = RT; \quad R = c_1 R_1 + (1 - c_1) R_2.$$

и, если принять теплоемкость примерно постоянной величиной в актуальном интервале температур,

$$h = c_p \cdot t; \quad c_p = c_1 c_{p1} + (1 - c_1) c_{p2}.$$

Кроме того, необходимы данные по коэффициентам переноса:

$$\lambda = \lambda(t, p, c_1); \quad D = D(t, p, c_1); \quad \mu = \mu(t, p, c_1).$$

По свойствам веществ в литературе имеется обширная справочная информация.

2.8 Математическая структура уравнений конвективного теплообмена.

Уравнения конвективного теплообмена (2.19)–(2.22) записаны в компактной векторной форме. Такая запись ясно отражает физический смысл уравнений. Векторная форма уравнений одинакова для различных систем координат.

Приведем краткую математическую справку о применявшихся выше векторных операциях для ортогональных систем координат (например, декартовой, цилиндрической, сферической).

Вектор представляют его координатным разложением:

$$\mathbf{w} = \mathbf{i}_j w_j \equiv \sum_{j=1}^3 \mathbf{i}_j w_j. \quad (2.23)$$

Условились проводить суммирование по повторяющимся индексам, даже если знак суммы явно не фигурирует.

Тензор записывают, указывая два характерных направления

$$\mathbf{D} = \mathbf{i}_j \mathbf{i}_k D_{jk}. \quad (2.24)$$

В результате двойного суммирования получается девятикомпонентное разложение. Традиционно тензор представляют в виде квадратной матрицы, опуская единичные векторы.

Скалярное произведение вычисляют, пользуясь правилами умножения единичных векторов в ортогональной системе координат:

$$\mathbf{i}_j \cdot \mathbf{i}_k = \delta_{jk}, \quad (2.25)$$

где символ Кронекера $\delta_{jk} = 1$, если $j = k$; $\delta_{jk} = 0$, если $j \neq k$.

Операция, указанная точкой (знаком скалярного произведения), должна совершаться над единичными векторами, *стоящими непосредственно слева и справа от знака операции*. Например, для скалярного произведения векторов имеем:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{i}_j a_j \cdot \mathbf{i}_k b_k = (\mathbf{i}_j \cdot \mathbf{i}_k) a_j b_k = \delta_{jk} a_j b_k. \quad (2.26)$$

Теперь в двойной сумме останутся только компоненты с $j = k$ (для других слагаемых символ Кронекера равен нулю), и мы продолжаем вычисления следующим образом, применяя правило суммирования по повторяющимся индексам:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \delta_{jj} a_j b_j = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3. \quad (2.27)$$

В дальнейшем очевидный этап с подстановкой символа Кронекера мы будем опускать.

Скалярное произведение векторов полезно для вычисления потока вектора через произвольно ориентированную площадку, заданную вектором единичной нормали.

Вычислим скалярное произведение тензора на вектор, как в формулировке закона Фурье для анизотропных материалов:

$$\begin{aligned} \mathbf{D} \cdot \mathbf{a} &= \mathbf{i}_j \mathbf{i}_k D_{jk} \cdot \mathbf{i}_n a_n = \mathbf{i}_j (\mathbf{i}_k \cdot \mathbf{i}_n) D_{jk} a_n = \mathbf{i}_j D_{jn} a_n = \\ &= \mathbf{i}_1 (D_{11} a_1 + D_{12} a_2 + D_{13} a_3) + \\ &+ \mathbf{i}_2 (D_{21} a_1 + D_{22} a_2 + D_{23} a_3) + \\ &+ \mathbf{i}_3 (D_{31} a_1 + D_{32} a_2 + D_{33} a_3) \end{aligned} \quad (2.28)$$

Результат вычислений - вектор. Скалярное произведение тензора на вектор полезно также для вычисления потока тензорной величины (потока импульса) через произвольно ориентированную площадку, заданную вектором единичной нормали.

Операции с дифференциальными векторными операторами дивергенции и градиента производить так же легко, если ограничиться только декартовыми координатами, для которых *единичные векторы постоянны* (не меняются от точки к точке).

Вычислим, например, дивергенцию от градиента температуры, как это необходимо сделать в уравнении энергии (2.21):

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\operatorname{grad} T) &= \nabla \cdot \nabla T = \mathbf{i}_j \frac{\partial}{\partial x_j} \cdot \mathbf{i}_k \frac{\partial T}{\partial x_k} = (\mathbf{i}_j \cdot \mathbf{i}_k) \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial T}{\partial x_k} = \\ &= \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial T}{\partial x_j} = \frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x_3^2} \end{aligned} \quad (2.29)$$

Результат вычислений – оператор Лапласа от температуры (скаляр).

Еще одним видом умножения является прямое умножение, без использования какого-либо символа. Прямое произведение вектора скорости на вектор скорости образует тензор плотности потока:

$$\rho \mathbf{w} \mathbf{w} = \rho \mathbf{i}_j w_j \mathbf{i}_k w_k = \rho \mathbf{i}_j \mathbf{i}_k w_j w_k. \quad (2.30)$$

Последняя операция, которую мы рассмотрим, есть дивергенция от тензора, как это имеет место в уравнении движения (2.22):

$$\operatorname{div}(\mathbf{D}) = \nabla \cdot \mathbf{D} = \mathbf{i}_j \frac{\partial}{\partial x_j} \cdot \mathbf{i}_k \mathbf{i}_n D_{kn} = (\mathbf{i}_j \cdot \mathbf{i}_k) \mathbf{i}_n \frac{\partial}{\partial x_j} D_{kn} = \mathbf{i}_n \frac{\partial}{\partial x_k} D_{kn}. \quad (2.31)$$

Результат вычислений – вектор.

Вычисления для давления в уравнении движения производятся следующим образом:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(p\mathbf{I}) &= \mathbf{i}_j \frac{\partial}{\partial x_j} \cdot \mathbf{i}_k \mathbf{i}_n p \delta_{kn} = (\mathbf{i}_j \cdot \mathbf{i}_k) \mathbf{i}_n \frac{\partial}{\partial x_j} p \delta_{kn} = \\ &= \mathbf{i}_n \frac{\partial}{\partial x_k} p \delta_{kn} = \mathbf{i}_n \frac{\partial p}{\partial x_n} = \operatorname{grad}(p). \end{aligned} \quad (2.32)$$

На первый взгляд, приведенные вычисления кажутся слишком формальными. Однако это самые простые правила, с помощью которых можно производить векторные и тензорные операции, выражающие в символической форме фундаментальные законы переноса и сохранения.

Дифференциальные уравнения тепломассообмена (2.19)–(2.22) образуют систему уравнений в частных производных второго порядка. В полной постановке это нелинейная система уравнений. Источниками нелинейности являются операторы конвективного переноса, содержащие вторые степени зависимых переменных (произведения скорости на скорость, скорости на концентрацию, скорости на энтальпию). Нелинейность появляется также, если молекулярные коэффициенты переноса зависят от температуры и концентрации. Нелинейны задачи турбулентного переноса (см. пункт 2.9).

Эта краткая характеристика показывает, что интегрирование уравнений тепломассообмена является сложной задачей. Только при существенных упрощениях, при работе с асимптотическими ситуациями оказываются возможными аналитические решения. Хотя роль таких решений для понимания сущности тепломассообмена очень важна, при математическом

моделировании реальных, возникающих на практике задач аналитические методы часто оказываются неприменимыми.

Основная тенденция в теории и практике тепломассообмена – все более широкое использование компьютерного моделирования, с тем чтобы максимально учесть принципиально важные эффекты и работать с полными математическими моделями, а не быть вынужденными «упрощать» задачу до такой степени, что модель совсем перестает быть похожей на реальный объект.

2.9 Коэффициенты турбулентного переноса

В несколько метафорическом смысле можно утверждать, что наблюдая за различными потоками в природе, мы визуальнo фиксируем решения (интегралы) дифференциальных уравнений движения (2.19), (2.22).

Сказанное верно и для спокойной ламинарной струйки воды, вытекающей из приоткрытого крана, и для бурного турбулентного потока горной реки. Однако если в первом случае мы можем без особых трудностей воспроизвести наблюдаемое решение с помощью аналитических преобразований на бумаге, то во втором для моделирования во всех деталях наблюдаемого нестационарного неупорядоченного движения окажется недостаточно всей мощи современных суперкомпьютеров.

Ламинарно-турбулентный переход совершается при достижении некоторых критических значений числа Рейнольдса, таких, что большинство практически важных течений в технике и природе являются турбулентными. В связи с этим необходимо приспособить полученные выше уравнения (2.19)–(2.22) для решения этого круга задач.

Общепринятый инженерный подход состоит в следующем.

■ Самой важной наблюдаемой особенностью турбулентного потока является очень высокая интенсивность процессов переноса, которая обеспечивается интенсивным перемешиванием жидкости. Поэтому коэффициенты теплопроводности, диффузии, вязкости в выражениях законов переноса вида

$$q = -\lambda \frac{\partial t}{\partial n}; \quad j_i = -D \frac{\partial c_i}{\partial n}; \quad \tau = \mu \frac{\partial u}{\partial n}.$$

считают не просто характеристиками молекулярного переноса (индекс М в (2.33)), но *эффективными* величинами, содержащими дополнительную составляющую, связанную с турбулентным перемешиванием (индекс «Т» в (2.33)):

$$\lambda = \lambda_M + \lambda_T; \quad D = D_M + D_T; \quad \mu = \mu_M + \mu_T. \quad (2.33)$$

■ Заменяя молекулярные коэффициенты *эффективными* значениями, одновременно отказываются от детального описания мелкомасштабных

хаотических пульсационных движений, рассматривая только *сглаженное, осредненное основное течение*.

Проблема состоит в разработке расчетных моделей для определения коэффициентов турбулентного переноса. Существует целая иерархия таких моделей, применяемых к турбулентным течениям различной сложности. Например, в случае каналов сложной формы или вблизи межфазных границ следует учитывать тензорную природу коэффициентов, поскольку турбулентность, вообще говоря, не изотропна (пример коэффициента переноса как тензорной величины рассматривался в связи с теплопроводностью в анизотропном теле, см. гл. 1 Электронного курса, [Chapt 1 Transport Laws.pdf](#)).

Простейшая модель основывается на газокинетической аналогии. Молекулярный перенос осуществляется в процессе хаотического теплового движения, когда молекулы обмениваются энергией при столкновениях. Как метафору, этот образ используют для турбулентного переноса. В качестве частиц выступают громадные (по сравнению с молекулярными масштабами) объемы жидкости – турбулентные моли, хаотически перемещающиеся в *осредненном* потоке. В некоторой степени это похоже на газовую смесь, содержащую некий компонент с очень большими молекулами.

Представление о порядке величин дают следующие оценки. Согласно элементарной газокинетической теории, имеем для молекулярной вязкости

$$\mu \approx \rho w l, \quad (2.34)$$

где w – скорость теплового движения молекул, т.е. примерно скорость звука, l – длина свободного пробега. Тогда для воздуха при нормальных условиях:

$$\mu \approx 1 \cdot 300 \cdot 10^{-7} \approx 10^{-5}, \text{ кг / (м с)}.$$

Ту же формулу (2.34) можно принять для турбулентной вязкости, полагая w скоростью движения турбулентных молей, а l – длиной свободного пробега моля (турбулентным масштабом). На основе экспериментальных данных,

$$w \approx 0.1 \cdot W; \quad l \approx 0.1 \cdot L,$$

где W и L – характерные значения скорости и поперечного размера потока (вблизи от стенки L пропорционально расстоянию от стенки). Тогда при течении воздуха в трубе диаметром 1 м со скоростью 1 м/с получим для турбулентной вязкости:

$$\mu_t \approx 1 \cdot (0.1 \cdot 1) \cdot (0.1 \cdot 1) \approx 10^{-2}, \text{ кг / (м с)},$$

т.е. величину, на три порядка превосходящую молекулярное значение.

Подчеркнем, что коэффициенты турбулентного переноса *не являются* физическими параметрами, в отличие от молекулярных характеристик. Они зависят от скорости потока и расстояния от твердых поверхностей. В развитом турбулентном потоке турбулентные коэффициенты на несколько

порядков превышают молекулярные характеристики. Однако в непосредственной близости от твердых стенок турбулентность подавляется вязкостью, так что остаются только молекулярные составляющие.

Пример математической и компьютерной модели турбулентного потока приводится в [гл. 19](#) Электронного курса, где рассматриваются течения пленок жидкости, образующихся при конденсации пара.