

### 3 Краевые условия

#### 3.1 Контрольные объемы на границе

Как уже говорилось в начале предыдущей главы (см. [Chapt 2 ConservationLaws.pdf](#)), на границе рассматриваемой области происходит взаимодействие с окружающей средой, которое должно быть описано *граничными условиями*.

Кроме того, необходима полная информация о начальном состоянии, из которого происходит дальнейшая эволюция во времени. *Начальные условия* задают в виде пространственных распределений искомым переменных (температуры, концентрации, скорости) в исследуемом объекте. Если решается стационарная задача, то необходимость в начальных условиях отпадает.

Начальные и граничные условия объединяют термином *краевые условия*. Постановка краевых условий является необходимым и часто самым ответственным этапом математического моделирования, если речь идет о сложных задачах с границами раздела фаз, на которых происходят фазовые превращения вещества, действуют силы поверхностного натяжения и т.п.

Сейчас мы рассмотрим только самые простые аспекты постановки граничных условий, в основном применительно к задачам теплопроводности.

Возвращаясь к схеме, использованной при формулировке уравнений сохранения ([Chapt 2 ConservationLaws.pdf](#)), заметим, что среди контрольных объемов  $dV$ , заполняющих рассматриваемую область, должны быть и такие, которые попадут на границу раздела  $\Gamma$  (Рис. 3.1).

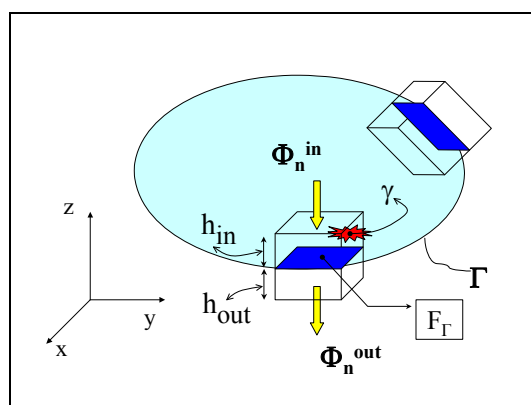


Рис. 3.1. Специальный контрольный объем на границе

Стороны специального, построенного на участке границы  $F_\Gamma$  контрольного объема, обозначенные как  $h$ , должны быть перпендикулярны границе. Специфика таких приграничных контрольных объемов состоит в том, что одна из граней ( $h_{in}$ ) всегда находится внутри, а другая ( $h_{out}$ ) – всегда снаружи.

Процедура записи балансов в форме обобщенного уравнения

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \tau} = -\operatorname{div}(\Phi) + \gamma$$

теперь должна быть изменена, чтобы учесть, что за пределами границы  $F_\Gamma$  находится окружающая среда с совершенно другими свойствами. Необходимо разбить контрольный объем на два по схеме

$$(h_{in} + h_{out}) \cdot F_\Gamma \Rightarrow (h_{in} \cdot F_\Gamma) + (h_{out} \cdot F_\Gamma)$$

Контрольный объем стягивается к поверхности  $F_\Gamma$  таким образом, что высоты  $h$  стремятся к нулю, а участок границы  $F_\Gamma$  остается фиксированным. Благодаря указанному предельному переходу мы с самого начала пренебрежем потоками через боковые грани контрольного объема, так что при вычислении оператора  $\operatorname{div}(\Phi)$  нужно будет взять только потоки через внутреннюю и наружную грани. В результате, обобщенное уравнение сохранения для специального граничного контрольного объема записывается в следующем виде:

$$\begin{aligned} (h_{in} \cdot F_\Gamma) \cdot \frac{\partial \Phi_{in}}{\partial \tau} + (h_{out} \cdot F_\Gamma) \cdot \frac{\partial \Phi_{out}}{\partial \tau} = \Phi_n^{in} \cdot F_\Gamma - \Phi_n^{out} \cdot F_\Gamma + \\ + \gamma_{in} \cdot (h_{in} \cdot F_\Gamma) + \gamma_{out} \cdot (h_{out} \cdot F_\Gamma). \end{aligned}$$

При предельном переходе (стягивании к поверхности) объемные члены обращаются в ноль, и запись баланса сводится к условию на границе:

$$0 = \Phi_n^{in} \cdot F_\Gamma - \Phi_n^{out} \cdot F_\Gamma \quad \text{или} \quad \Phi_n^{in} = \Phi_n^{out}, \quad (3.1)$$

согласно которому плотности потоков по обеим сторонам границы раздела одинаковы (см. Рис. 3.1).

Дальнейшая конкретизация (3.1) зависит от особенностей рассматриваемой задачи. Несколько примеров рассмотрено ниже.

### 3.2 Граничные условия для задач теплопроводности

Пусть рассматриваемый объект – это твердое тело (Рис. 3.1), обменивающееся теплотой с окружающей средой. Требуется найти температурное поле  $t(x, y, z, \tau)$  в объекте. Математическая формулировка этой задачи состоит из дифференциального уравнения теплопроводности, полученного в предыдущей главе курса:

$$\rho c_p \frac{\partial t}{\partial \tau} = -\operatorname{div}(-\lambda \operatorname{grad} t) + q_v.$$

и описания теплового взаимодействия с окружающей средой, которое предстоит составить.

**Граничное условие первого рода (условие Дирихле).** С чисто математической точки зрения, было бы достаточно положить температуру поверхности тела равной некоторой заданной (известной до решения задачи) функции  $t_\Gamma$  от координат точек на поверхности и от времени:

$$t(x_\Gamma, y_\Gamma, z_\Gamma, \tau) = t_\Gamma(x_\Gamma, y_\Gamma, z_\Gamma, \tau) \quad (3.2)$$

В простейшем случае это может быть некоторая постоянная температура:

$$t(x_\Gamma, y_\Gamma, z_\Gamma, \tau) = t_\Gamma = \text{const}.$$

Однако пока остается неясным, как осуществить такое условие для реального объекта, в лабораторных или промышленных установках.

**Граничное условие второго рода (условие Неймана).** Пусть описание некоторой задачи на вербальном (словесном) уровне выглядит так: твердое тело обогревается снаружи мощным потоком высокотемпературного теплового излучения  $q_R$ . Соответствующая математическая формулировка получается из (3.1) следующим образом:

$$\begin{aligned} \Phi_n^{in} = -\lambda \left[ \frac{\partial t}{\partial n} \right]_{n=-0} ; \quad \Phi_n^{out} = q_R; \quad \Rightarrow \\ -\lambda \left[ \frac{\partial t}{\partial n} \right]_{n=-0} = q_R \end{aligned} \quad (3.3)$$

где  $q_R$  – заданная величина теплового потока на поверхности, возможно, функция времени и координат точек на поверхности. Задав плотность потока, мы фактически задаем градиент температуры на поверхности:  $n$  означает внешнюю нормаль, а запись  $n = -0$  подчеркивает, что величины вычисляются *внутри* объекта бесконечно близко к его поверхности.

**Граничное условие третьего рода (условие смешанного типа, условие Роббина).** На практике граница  $\Gamma$  чаще всего отделяет элементы конструкций (твердые тела) от обтекающих их потоков газов или жидкостей (теплоносителей). В свое время Исаак Ньютон экспериментально, с помощью специально изготовленных им термометров, исследовал охлаждение первоначально сильно нагретых металлических тел в воздухе. Он обнаружил, что скорость падения температуры пропорциональна самой температуре тела:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = \sim (t - t_f),$$

В современной формулировке закон охлаждения Ньютона записывается следующим образом:

$$q = \alpha(t_w - t_f), \quad (3.4)$$

где  $\Delta t \equiv t_w - t_f$  – температурный напор, разность температур стенки (поверхности) и окружающей среды. В отечественной литературе на (3.4) ссылаются как на закон (или уравнение) Ньютона–Рихмана.

Ясно, почему в уравнении (3.4) должен фигурировать температурный напор: при одинаковых температурах поверхности и окружающей среды никакого теплового потока не возникает. Из общих соображений понятно также, что если теплоотвод пропорционален разности температур, то и скорость понижения температуры тела будет пропорциональна этой разности температур (как в исходной формулировке Ньютона).

Коэффициент пропорциональности  $\alpha$  в (3.4) называется *коэффициентом теплоотдачи* и является мерой интенсивности конвективного теплообмена между поверхностью и теплоносителем (этот процесс для краткости называют теплоотдачей). Размерность коэффициента теплоотдачи находится из определяющего уравнения (3.4):

$$[\alpha] = [q] / [\Delta t] = \text{Вт} / (\text{м}^2 \cdot \text{К}).$$

Представление о порядке величины коэффициента теплоотдачи дает следующая таблица:

Процесс теплоотдачи	Теплоноситель	$\alpha$ , Вт/(м <sup>2</sup> ·К)
свободная конвекция	воздух	10 <sup>1</sup>
свободная конвекция	вода	10 <sup>2</sup>
вынужденная конвекция	воздух	10 <sup>2</sup>
вынужденная конвекция	вода	10 <sup>3</sup>
кипение, конденсация	вода	10 <sup>4</sup> – 10 <sup>5</sup>

Пусть охлаждение твердого тела в среде с температурой  $t_f$  происходит по закону Ньютона–Рихмана. Соответствующая математическая формулировка *граничного условия третьего рода* получается из (3.1) следующим образом:

$$\Phi_n^{in} = -\lambda \left[ \frac{\partial t}{\partial n} \right]_{n=0} ; \quad \Phi_n^{out} = \alpha(t_w - t_f)$$

и окончательно:

$$-\lambda \left[ \frac{\partial t}{\partial n} \right]_{n=0} = \alpha(t_w - t_f). \quad (3.5)$$

При задании граничных условий третьего рода устанавливается связь между неизвестными заранее температурой и градиентом температуры на поверхности.

Вариация параметров  $\alpha$  и  $t_f$  предоставляет широкие возможности регулирования условий охлаждения (или нагрева) тел.

Если обеспечить очень высокое значение коэффициента теплоотдачи  $\alpha$ , например, посредством интенсивного перемешивания жидкости, то фактически будет реализовано условие Дирихле, поскольку из (3.5) следует, что  $t_w \rightarrow t_f$  при  $\alpha \rightarrow \infty$  и конечном значении теплового потока.

Если задать очень малое значение  $\alpha$ , то получится условие адиабатической поверхности, т.е. частный случай условия Неймана при нулевом тепловом потоке на поверхности.

Если  $t_f \gg t_w$ , то фактически опять будет задано условие Неймана с подводимым к поверхности тепловым потоком  $q \approx \alpha t_f$ .

### 3.3 Граничные условия для задач конвективного теплообмена

В предыдущем параграфе коэффициент теплоотдачи использовался при задании граничного условия в *задачах теплопроводности* и рассматривался как заданный параметр.

В действительности коэффициент теплоотдачи является сложной функцией скорости и режима течения, формы и размеров обтекаемой поверхности, свойств теплоносителя. Хотя к настоящему времени накоплен широкий перечень решенных задач, его ревизия и пополнение остается главным содержанием теории *конвективного теплообмена*. Именно с этой целью приходится интегрировать (в основном, численными методами) систему дифференциальных уравнений теплообмена.

В качестве тепловых условий на твердых границах в этом случае задают температуру или тепловой поток (или какие-либо распределения этих величин вдоль границ).

После того как получено распределение  $t(x,y,z,\tau)$  в потоке жидкости (в результате аналитического или численного решения системы дифференциальных уравнений конвективного теплообмена), коэффициент теплоотдачи вычисляют по определяющему соотношению:

$$\alpha \equiv \frac{q|_{n=+0}}{t_w - t_f} = \frac{-\lambda_f \frac{\partial t}{\partial n}|_{n=+0}}{t_w - t_f}, \quad (3.6)$$

где  $n$  – внешняя нормаль к обтекаемой поверхности,  $q$  – плотность теплового потока в жидкости ( $n = +0$ ),  $\lambda_f$  – коэффициент теплопроводности жидкости. Температура жидкости  $t_f$  берется на удалении от стенки, там, где она перестает заметно изменяться; для внутренних течений (как при теплообмене в трубе) обычно используют среднюю по теплосодержанию температуру потока.

### **Условия прилипания**

В теории теплообмена оперируют с моделью непрерывной (сплошной) вязкой жидкости. Считают, что при контакте с твердыми поверхностями силы молекулярного взаимодействия обеспечивают полное торможение, *прилипание* жидкости. Условие равенства нулю *касательной составляющей скорости* на твердой неподвижной стенке называется *условием прилипания*:

$$u|_{n=+0} = 0.$$

Более общей формулировкой, применимой также для движущихся границ раздела жидкость – газ, является равенство *касательных составляющих скорости* по обеим сторонам поверхности раздела.

В тех же предположениях о сплошности среды можно говорить о тепловом «условии прилипания»: температуры сред по обеим сторонам поверхности раздела одинаковы. Например, если посредством микротермопары измерена температура твердой поверхности, то можно утверждать, что такой же будет *температура газа* в бесконечной близости к стенке.

$$t|_{n=+0} = t|_{n=-0}$$

Сказанное относится к задачам без фазовых превращений. При изучении интенсивных процессов конденсации и испарения вводят понятие о газокинетическом термическом сопротивлении на границе раздела и соответствующем скачке температур. Фундаментальное описание этих эффектов дается в книге<sup>1</sup>.

### **Условие непроницаемости**

Для большинства теплообменных установок обычной является ситуация, когда твердая поверхность непроницаема для контактирующего с ней потока жидкости или газа. Для неподвижной стенки это условие записывается как равенство нулю *нормальной составляющей скорости* потока непосредственно на стенке:

---

<sup>1</sup> Лабунцов Д.А. Физические основы энергетики. М.: Издательство МЭИ, 2000. 388 с.

$$v|_{n=+0} = 0$$

В специальных разделах теории тепломассообмена рассматривают задачи с проницаемыми для вещества поверхностями раздела: пористыми стенками со вдувом или отсосом, межфазными границами с испарением или конденсация и другие. Граничные условия для скорости потока на стенке в таких случаях будут комбинированными: для продольных составляющих справедливо условие прилипания, но поперечные составляющие не равны нулю.

### 3.4 Геометрия

Постановка граничных условий тесно связана с заданием геометрии рассматриваемой области. В учебных курсах обычно ограничиваются задачами с простой геометрией, рассматривая в основном одномерные температурные поля в пластине или цилиндре. Однако реальные задачи, возникающие в инженерной практике, часто требуют определения температурных полей в трехмерных объектах очень сложной геометрической формы. При этом даже самый первый этап моделирования – построение геометрической модели сложного реального объекта – становится невыполнимым без специального математического обеспечения, применяемого в системах автоматизированного проектирования (CAD-системах).

На Рис. 3.2 показано, как можно построить деталь с отверстием с помощью геометрического конструктора математического пакета ANSYS. Конструктор предоставляет в распоряжение пользователя набор тел простой формы, т.н. примитивов - прямоугольный блок, цилиндр, призма, сфера, конус, а также ряд логических операций, позволяющих вычитать, складывать, приклеивать, перекрывать примитивы и таким образом строить все более сложные геометрические объекты.

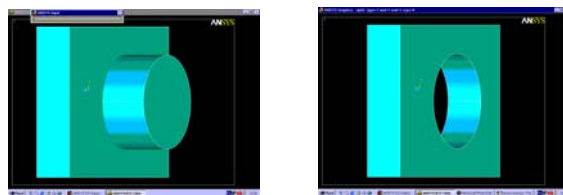


Рис. 3.2. Формирование геометрической модели объекта.

В левой части рисунка на экране дисплея показаны два выбранных пользователем пересекающихся примитива – блок и цилиндр. Далее к этим примитивам применяется логическая операция вычитания (subtract) и в результате получается деталь с отверстием. Одновременно задаются

числовые геометрические параметры, такие как радиусы, размеры сторон и т.д.

На следующем этапе работы можно идентифицировать участки границ и указать на них соответствующие граничные условия. Геометрический пример на Рис. 3.2 построен в универсальном математическом пакете ANSYS (демонстрационная версия), предназначенном для решения задач прочности, теплофизики, электромагнетизма, гидрогазодинамики.

### 3.5 Визуализация решений

После того как разработана математическая модель некоторого теплообменного процесса или аппарата, включающая

- дифференциальные уравнения неразрывности, энергии, движения и
- начальные и граничные условия, обсуждавшиеся выше в этой главе,

задача отправляется на решение с целью получить распределения температур и тепловых потоков. Обычно приходится обращаться к численным методам и соответствующим математическим пакетам. Результаты получаются в виде обширных массивов (таблиц) чисел, мало пригодных для непосредственного восприятия. Поэтому заключительный этап работы – анализ результатов – начинается с их *визуализации*. Приведем несколько примеров.

Первый пример связан с компьютерным моделированием кипения. Этот процесс теплообмена трудно поддается формализации из-за его непосредственно наблюдаемой сложности и хаотичности. Однако элементарные составляющие, такие как рост пузырьков пара, доступны численному моделированию.

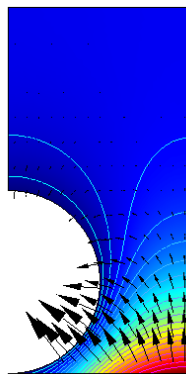


Рис. 3.3. Подвод теплоты к пузырьку пара на обогреваемой поверхности



Рассматривая Рис. 3.3, полезно мысленно дополнить его отражением влево – это осесимметричная задача о пузырьке пара в перегретой жидкости на горизонтальной обогреваемой поверхности. Результаты численного решения представлены в виде контурной диаграммы для температуры и векторного поля теплового потока. Градиенты температуры и тепловые потоки локализованы в клиновидной зоне у основания пузырька (такие режимы возможны при высоком давлении в кипящей жидкости).

Постановка краевой задачи теплопроводности следующая. Левая граница рисунка соответствует вертикальной оси симметрии. Верхняя граница адиабатическая, она проведена на достаточном удалении от актуальной области вблизи нижнего правого угла, где имеют место значительные тепловые потоки. Правая поверхность – адиабатическая граница расчетной области, приходящейся на один пузырек. На нижней поверхности задана постоянная плотность теплового потока.

Цвет, как обычно, указывает на уровень температуры. Синий цвет – это жидкость при температуре насыщения, красный в нижнем правом углу – *перегретая* жидкость у стенки. Изотермы, как и следовало ожидать, перпендикулярны к адиабатическим поверхностям. Тесное расположение изотерм у стенки соответствует большим градиентам температуры и большим тепловым потокам.

Поскольку полная картина кипения включает рост пузырька в слое первоначально перегретой жидкости, показанная на Рис. 3.3 стационарная картина должна быть дополнена анализом соответствующей нестационарной задачи теплопроводности. Получающуюся динамическую картину развития температурного поля можно увидеть, запустив видеоролик:

[..\Avi\\_HMT\Avi\\_Boiling\\_HighPres\\_transient.avi](#)

Результат анализа оказывается следующим: при рассматриваемом режиме (кипении при высоком давлении) релаксация температурного поля вокруг пузырька происходит очень быстро, поэтому Рис. 3.3 удовлетворительно представляет квазистационарное температурное поле в жидкости вблизи растущего пузырька пара. В целом, с математической моделью кипения можно ознакомиться в презентации:

[..\Mathcad\\_HMT\18\\_PoolBoiling\Present\\_Boil\\_Sol\DM\\_of\\_Nucl\\_Boil\\_CD.ppt](#)

Другой пример демонстрирует изменения, которые мы могли бы наблюдать, постепенно увеличивая скорость вынужденного обтекания горячей трубы с постоянной температурой поверхности:

[..\Avi\\_HMT\CrossTubeFlow\\_Animate.wmv](#)

Два важных наблюдения полезно зафиксировать. Во-первых, происходит очевидное уменьшение толщины прогретого слоя жидкости у стенки (толщины т.н. *теплового пограничного слоя*, показанного красным цветом на

кадрах анимации). Это означает, что градиент температуры у стенки увеличивается с ростом скорости обтекания и, следовательно, увеличивается плотность теплового потока. Во-вторых, происходит формирование циркуляционного течения в кормовой части цилиндра, что также влияет на температурное поле вблизи стенки трубы.

Два последующих примера относятся к свободной конвекции около горизонтального обогреваемого цилиндра.

Анимация

[..\Avi\\_HMT\Avi\\_free\\_conv\\_trans\\_qW\\_1000\\_Noslip.wmv](#)

показывает развитие свободноконвективного течения во времени. Мы включаем нагреватель и наблюдаем, как прогревается жидкость вблизи стенки, как возникает и усиливается подъемное движение жидкости под действием Архимедовых сил.

Видеоролик

[..\Avi\\_HMT\FreeConv\\_Tube\\_Channel\\_dT\\_animate.wmv](#)

демонстрирует изменения картины течения и теплообмена при постепенном увеличении температуры цилиндра.

Приведенные примеры наглядно показывают сложность и многообразие задач теплообмена, если иметь в виду многомерную геометрию реальных инженерных объектов, нелинейность уравнений, неустойчивость гидродинамических полей.

Универсальным средством решения таких задач становится все в большей мере численное моделирование на компьютерах. В [гл. 5](#) Электронного курса подробно рассмотрена технология построения компьютерной модели твэла (тепловыделяющего элемента ядерного реактора) в инженерном математическом пакете Matlab.